Задачный раздел

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Некоторые из этих задач (не обязательно самые сложные!) требуют знания «неэлементарной» математики — анализа, линейной алгебры и т. п.

Составителям этой подборки кажется, что предлагаемые ниже задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим свои собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются). Если автор задачи нам неизвестен, то в скобках указывается «фольклор».

1. На пир собрались 100 людоедов, и они стали есть друг друга. Оказалось, что из любых 10 найдется один, оказавшийся в желудке у другого. Докажите, что найдется цепочка из 12 вложенных людоедов. (*В. Сендеров*)

2. Дана матрица ортогонального преобразования (a_{ij}) размера 3×3, причем все $a_{ij} \neq 0$. Пусть $B = (b_{ij}) = (a_{ij}^{-1})$. Докажите, что $\det B = 0$. (*А. Джумадильдаев*)

3. Докажите, что система уравнений с n параметрами $a_1, \ldots, a_n$
$$\begin{cases} a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0, \\ a_1x_1^2 + \cdots + a_nx_n^2 = 0, \\ \ldots \\ a_1x_1^n + \cdots + a_nx_n^n = 0 \end{cases}$$
имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда сумма некоторых a_i равна 0. (*В. Доценко*)

4. а) Можно ли разбить пространство на окружности? А плоскость?
б) Можно ли покрыть плоскость окружностями так, чтобы любая точка была покрыта ровно три раза? А два раза? (*А. Белов*)

5. Двое играют на клетчатой ленте в следующую игру. Первый куда угодно ставит два крестика, второй — один нолик. Цель первого — поставить 100 крестиков в ряд, цель второго — ему помешать.

а) Докажите, что первый может выиграть.

б) Может ли он выиграть, сделав 2^{45} ходов?

в)* 2^{90} ходов? (*А. Канель*)

6. t_k — бесконечная последовательность положительных чисел. Докажите, что ряд $\sum(1+t_{k+1})/(kt_k)$ расходится. (*Фольклор*)

7. Пусть G — бесконечный ориентированный граф, $V(n)$ — число вершин, в которые можно попасть из фиксированной вершины O не более чем за n шагов. Докажите, что если $\lim_{n\to\infty} V(n)/n^2 = 0$, то найдется вершина графа, в которую входит не меньше стрелок, чем выходит. (*Фольклор*)

8. Аналитическая функция (т. е. которая разлагается в каждой точке во всюду сходящийся ряд Тейлора) принимает в рациональных точках рациональные значения. Верно ли, что она — многочлен? (*Фольклор*)

9. Дан выпуклый n-угольник и n точек внутри него. Каждой точке сопоставляется сторона n-угольника (разным точкам — разные стороны) и рассматриваются треугольники, построенные на точках и соответствующих сторонах. Докажите, что можно так установить соответствие, чтобы получившиеся треугольники

   а) не перекрывались;

   б) покрывали внутренность многоугольника. (*В. Произволов*)

10. Для тройки прямых можно определить окружность — окружность, описанную около соответствующего треугольника. Для четверки прямых общего положения можно определить точку — как пересечение всех окружностей троек прямых (исходная четверка без одной). Для пятерки прямых можно определить окружность — как окружность, проходящую через все точки четверок и т.д. Докажите, что вся эта цепочка определений корректна. (*Фольклор*)

11. Рассматриваются слова от букв русского алфавита. Слова вида sut и $suut$ имеют одинаковый смысл (здесь s, u, t — произвольные слова, возможно, пустые). Докажите, что количество различных смыслов конечно. (*Фольклор*)

12. Докажите, что $\inf\limits_{x_i>0} S_n(2) = 6$, где

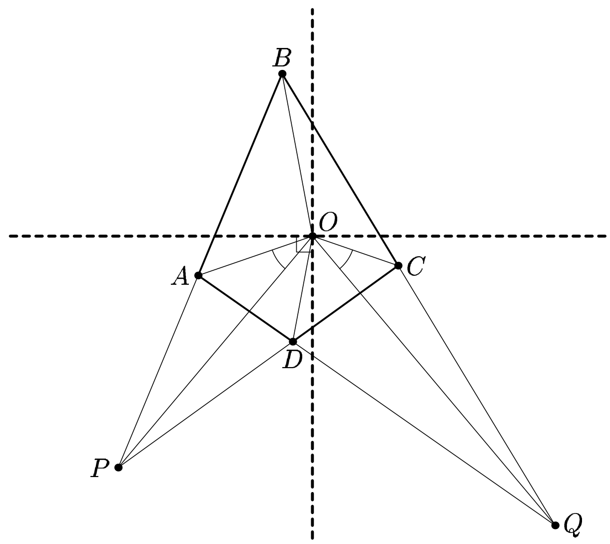
$$S_n(2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+1}+x_{i+2}}{x_i+x_{i+3}};\ x_i>0;\ x_{i+n}=x_i;\ n\geqslant 6.$$

(*С. Чимэдцэрэн*)

Исправления

В задачнике №2 «Математического Просвещения» условие задачи 2.10 (автор — С. Маркелов) было приведено неверно. Была также была допущена ошибка в №5 при формулировке задачи 5.2 (автор — А. Я. Белов). Приводим правильные условия этих задач и предлагаем читателям попробовать свои силы в их решении.

2.10. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взята такая точка O, что $\angle AOP = \angle COQ$, где P и Q — точки пересечения лучей BA, CD и BC, AD соответственно. Докажите, что биссектрисы углов AOC и BOD перпендикулярны друг другу.



5.2. Али-Баба делит с разбойником 10 куч золотого песку. Али-Баба может в любой момент взять три кучи и уйти, либо он может выбрать 4 любые кучи и разделить каждую из куч на правую и левую часть. Далее разбойник правые части нетождественно переставляет, и затем части объединяются — каждая левая с новой правой.

Сможет ли Али-Баба унести с собой свыше 49 кг золотого песку, если всего было 50 кг?