Главные направления векторных последовательностей и теорема Леви – Штейница

И. А. Иванов

Преформулируем теорему Леви – Штейница следующим образом.

Теорема. *Пусть c_n — такая последовательность векторов из $\mathbb{R}^d$, что для любого $f \in \mathbb{R}^d$, $f \neq 0$, ряд $\sum_{i=1}^{\infty}(c_i, f)$ условно сходится.*

Тогда для любого $r \in \mathbb{R}^d$ существует такая перестановка натурального ряда $\sigma(n)$, что $\lim\limits_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} c_{\sigma(i)} = r$.

Далее мы будем рассматривать только такие последовательности c_n, которые удовлетворяют условию теоремы. Докажем для них несколько лемм.

Лемма 1. $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

Доказательство. Выберем ортогональный базис из единичных векторов $e_1, \ldots, e_d$. Все ряды $\sum_{i=1}^{\infty}(e_j, c_i)$, где $j = 1, \ldots, d$, условно сходятся. Значит, все скалярные произведения (e_j, c_i) стремятся к нулю с ростом i.

Определение. Пусть e — единичный вектор в R^d. Назовем направление, задаваемое вектором e, *главным* для последовательности c_n, если существует подпоследовательность c_{n_i}, такая, что:
1) $\lim\limits_{i\to\infty} \cos(e, c_{n_i}) = 1$, т. е. векторы c_{n_i} стремятся к e по направлению;
2) ряд $\sum_{i=1}^{\infty} c_{n_i}$ расходится.

Замечание 1. Легко видеть, что множество главных направлений замкнуто. Действительно, пусть имеется последовательность a_i главных направлений, сходящаяся к направлению a. Каждому a_i отвечает своя подпоследовательность векторов, сходящаяся к данному направлению, такая, что ряд, соответствующий этой последовательности, расходится. Но тогда, объединяя достаточно длинные начальные куски этих подпоследовательностей, можно получить подпоследовательность, сходящуюся к a, и тоже определяющую расходящийся ряд.

Лемма 2. *Множество главных направлений не содержится ни в одном открытом полупространстве.*

Доказательство. Пусть π — гиперплоскость в $\mathbb{R}^d$, разбивающая пространство на два полупространства A и B, которая не содержит главных направлений. Докажем, что главные направления существуют в обоих полупространствах A и B.

Выделим в последовательности c_n две подпоследовательности: c_{n_i} составлена из членов c_n, лежащих в A, c_{k_i} — из членов c_n, лежащих в B. Обозначим через e единичный вектор, перпендикулярный π. Так как ряд $\sum_{i=1}^{\infty}(e, c_i)$ сходится условно, то подряды $\sum_{i=1}^{\infty}(e, c_{n_i})$, $\sum_{j=1}^{\infty}(e, c_{k_j})$ расходятся, а, значит, расходятся и подряды $\sum_{i=1}^{\infty} c_{n_i}$, $\sum_{j=1}^{\infty} c_{k_j}$.

Пусть $e_1, \ldots, e_{d-1}$ — базис π.

Последовательность $\cos(e_1, c_{n_i})$ ограничена и, следовательно, имеет предельные точки. Из расходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} c_{n_i}$ следует, что можно найти предельную точку P_1 последовательности $\cos(e_1, c_{n_i})$ и подпоследовательность $u_m^{(1)}$ в c_{n_i} такие, что $\lim_{m\to\infty}\cos(e_1, u_m^{(1)}) = P_1$, а ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_m^{(1)}$ расходится. Действительно, начиная от отрезка $[-1; 1]$, можно построить делением пополам такую последовательность вложенных отрезков I_k, что длина I_k равна 2^{-k} и для всех k расходится ряд, составленный из тех членов c_{n_i}, которые принадлежат I_k. Общая точка этой последовательности будет искомой предельной точкой — убедиться в этом можно, используя рассуждение, аналогичное замечанию 1.

Далее рассмотрим последовательность $\cos(e_2, u_m^{(1)})$. Она также имеет предельные точки и в $u_m^{(1)}$ аналогично можно выбрать такую подпоследовательность $u_m^{(2)}$, что $\lim_{m\to\infty}\cos(e_2, u_m^{(2)}) = P_2$, а ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_m^{(2)}$ расходится.

Продолжая этот процесс, мы найдем такую подпоследовательность $u_m^{(d-1)}$, что для всех $1 \leqslant i \leqslant d-1$ выполнено $\lim_{m\to\infty}\cos(e_i, u_m^{(d-1)}) = P_i$, а ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_m^{(d-1)}$ расходится. Следовательно, направление l, где $\cos(l, e_i) = P_i$, будет главным для последовательности c_{n_i}. Аналогично строится главное направление для последователньости c_{k_j}.

Будем называть наименьший выпуклый конус, содержащий множество векторов M, *конической оболочкой* M.

Лемма 3. *Пусть M — замкнутое множество единичных векторов в $\mathbb{R}^d$, которое не содержится ни в одном открытом полупространстве.*

Тогда существует такое подмножество $M' \subseteq M$, что коническая оболочка M', есть либо все $\mathbb{R}^d$, либо некоторая гиперплоскость в $\mathbb{R}^d$.

Доказательство. Рассмотрим коническую оболочку M. У нее не более одной опорной гиперплоскости (иначе есть открытое полупространство, содержащее M). Если коническая оболочка есть все $\mathbb{R}^d$, то все доказано. В противном случае коническая оболочка M— замкнутое полупространство. Тогда в качестве искомого подмножества можно взять все векторы, принадлежащие опорной гиперплоскости.

Лемма 4. *Пусть e — единичный вектор некоторого главного направления и t_s — такая подпоследовательность c_n, сходящаяся к этому направлению, что ряд $\sum_{s=1}^{\infty} t_s$ расходится.*

Тогда для любых $\lambda > 0$ и $\varepsilon > 0$ существуют такие векторы $t_{s_1}, \dots, t_{s_m}$ из $\{t_s\}$, что

$$|\lambda e - \sum_{i=1}^{m} t_{s_i}| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть заданы $\lambda > 0$ и $\varepsilon > 0$. В последовательности t_s будем рассматривать только векторы v_i, для которых выполняются два условия:

$$1)\ |v_i| < \varepsilon/2; \qquad 2)\ \operatorname{tg}(v_i, e) < \frac{\varepsilon}{2\lambda}.$$

Согласно лемме 1 все векторы t_s, кроме конечного числа, удовлетворяют этим условиям. Легко видеть, что, взяв несколько первых членов последовательности v_i, мы добьемся того, что их сумма попадет в шар радиуса ε с центром в λe.

Лемма 5. *Пусть M — множество единичных векторов главных направлений и вектор r принадлежит конической оболочке M.*

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие векторы $v_1, \dots, v_m$ из $\{c_n\}$, что

$$|r - \sum_{i=1}^{m} v_i| < \varepsilon.$$

Доказательство. Так как r принадлежит конической оболочке M, то существуют такие $e_1, \dots, e_s \in M$ и $a_1, \dots, a_s > 0$, что $r = \sum_{i=1}^{s} a_i e_i$. Согласно лемме 4, для каждого вектора $a_i e_i$, $1 \leqslant i \leqslant s$, существуют m_i векторов $v_1^{(i)}, \dots, v_{m_i}^{(i)}$ из $\{c_n\}$ таких, что

$$|a_i e_i - \sum_{j=1}^{m_i} v_j^{(i)}| < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Без ограничения общности считаем, что используемые для выбора векторов $v_j^{(i)}$ подпоследовательности, сходящиеся к главным направлениям, не пересекаются (для выполнения этого условия достаточно выбросить из каждой подпоследовательности не более чем конечное число членов).

Теперь рассмотрим сумму всех полученных векторов $v_j^{(i)}$. Эта сумма отличается от r не более, чем на ε. Отметим также, что все частичные суммы (суммы нескольких первых векторов из построенных m) по модулю не больше λe.

Доказательство теоремы Леви – Штейница

Согласно лемме 3, примененной ко множеству главных направлений, возможны два случая:

1. Коническая оболочка единичных векторов главных направлений есть все $\mathbb{R}^d$.
2. Коническая оболочка единичных векторов главных направлений есть гиперплоскость в $\mathbb{R}^d$.

Рассмотрим первый случай. Пусть r — вектор, сходимость к которому нужно организовать. Фиксируем некоторое $\varepsilon > 0$.

Применяя лемму 5, мы найдем несколько векторов, таких, что их сумма отличается от r не более чем на $\varepsilon/2$. Возьмем их в качестве первых членов искомой переставленной последовательности. Пусть u_1 — первый вектор из $\{c_n\}$, не использованный нами. Добавим его к искомой последовательности. Пусть теперь построенная сумма отличается от r на вектор r_1. Опять используя лемму 5, найдем еще несколько векторов, чтобы их сумма отличалась от r_1 не более чем на $\varepsilon/4$. Теперь опять берем первый неиспользованный вектор из $\{c_n\}$. Продолжая аналогичным образом, мы добьемся того, что частичные суммы полученной последовательности будут стремиться к вектору r, так как добавление в конце каждого цикла нашего процесса некоторого вектора (всякий раз первого из еще не использованных) в силу леммы 1 не может помешать сходимости. Кроме, того, ясно, что мы использовали все векторы из $\{c_n\}$. Таким образом, мы получили требуемую перестановку.

Рассмотрим второй случай. Пусть коническая оболочка единичных векторов, определяющих главные направления, есть гиперплоскость π. Выберем базис в $\mathbb{R}^d$, первый базисный вектор e которого перпендикулярен π. Согласно Лемме 5, для любого вектора $v \in \pi$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют несколько векторов из $\{c_n\}$, таких, что их сумма отличается от v на вектор, модуль которого меньше ε, и, следовательно, модуль первой координаты меньше ε.

Пусть r — вектор, сходимость к которому нужно организовать. Фиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. По условию ряд $\sum_{i=1}^{\infty}(c_i, e)$, т. е. ряд первых координат в нашем базисе, условно сходится. Согласно теореме Римана, можно выбрать несколько векторов из $\{c_n\}$ так, что первая координата их суммы s будет отличаться от первой координаты вектора r не более чем на $\varepsilon/4$. Возьмем эти векторы в качестве первых членов нашей последовательности. Пусть v — вектор, у которого первая координата равна нулю, а остальные равны разнице соответствующих координат векторов r и s — суммы всех взятых нами на данный момент векторов. Теперь, используя лемму 5, найдем несколько векторов из $\{c_n\}$, таких, что их сумма отличается от v не более чем на $\varepsilon/4$. Возьмем найденные векторы в качестве следующих нескольких членов искомой последовательности. Получим, что по каждой координате сумма всех взятых на данный момент векторов отличается от r не более, чем на $\varepsilon/2$. Теперь возьмем в качестве следующего вектора последовательности первый не использованный еще нами вектор из $\{c_n\}$. Теперь на новом витке процесса с помощью теоремы Римана организуем приближение к вектору r по первой координате на $\varepsilon/8$, а потом добавляя найденные с помощью леммы 5 векторы, добьемся того, чтобы разница по каждой координате была не более $\varepsilon/4$. Потом опять добавим первый неиспользованный вектор и так далее. Ясно, что для заданного ε все частичные суммы, начиная с некоторого момента будут отличаться от r на вектор, по модулю меньший ε. Кроме того, мы использовали все векторы из $\{c_n\}$. Получили требуемую перестановку. Теорема доказана.