Ограничения конечных векторных сумм и доказательство теоремы Леви – Штейница

А. А. Кустарёв

Доказательство, которое мы приведем, хотя и отличается от доказательства Штейница построением и формой, но существенно использует его основную лемму, интересную и саму по себе.

Лемма Штейница. *Существует такая константа C_d, что любое сколь угодно большое, но конечное, множество векторов в $\mathbb{R}^d$, длина которых не превосходит ε, а сумма равна 0, можно упорядочить так, чтобы длина суммы первых k векторов для любого k не превышала $C_d\varepsilon$.*

Другими словами, переставляя слагаемые в любом конечном представлении нуля суммой векторов длины не больше 1, можно добиться того, чтобы все частичные суммы не превосходили по длине некоторой константы, зависящей от размерности, но не от числа слагаемых.

Доказательство этой леммы будет отличаться от того, которое дал сам Штейниц.

В одномерном случае лемма Штейница почти очевидна. Нужное упорядочение получается индуктивно. Выберем первое слагаемое произвольно, а далее выбираем каждое следующее слагаемое по правилу: если текущая частичная сумма положительна, то выбираем любое из оставшихся отрицательных слагаемых, и наоборот. Равенство нулю всей суммы векторов гарантирует возможность такого упорядочения. Ясно также, что ни одна из частичных сумм по модулю не превосходит максимума модуля слагаемых. Таким образом, $C_1 = 1$.

Мы докажем лемму Штейница индукцией по размерности пространства. Индуктивный переход будет использовать еще два факта о перестановках конечных сумм векторов. Мы сформулируем эти факты, говоря не о суммах векторов, а о ломаных с конечным числом звеньев. Доказательство первой леммы использует лемму Штейница в меньшей размерности.

Лемма 1. *Пусть A — начало ломаной в $\mathbb{R}^d$ с конечным числом звеньев и максимальной длиной звена ε, а B — ее конец. Тогда можно так переставить звенья ломаной, чтобы расстояние от любой вершины полученной ломаной до прямой AB не превышало $N_d\varepsilon$, где N_d — константа, зависящая только от размерности d.*

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 7, 2003(165–169)

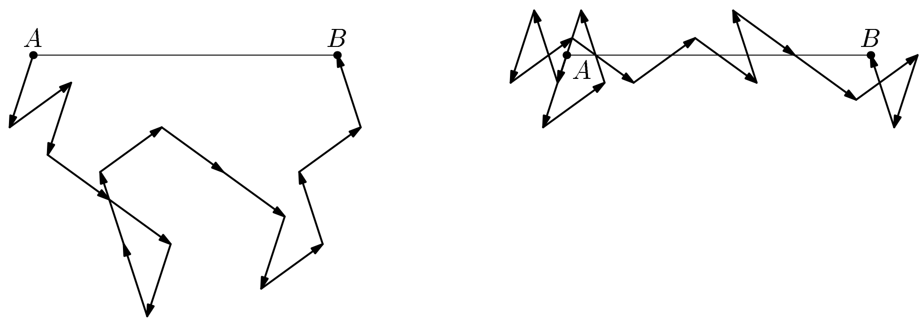

Рис. 1. *Перестановка, описанная в лемме* 1

Доказательство. Спроектируем ломаную на гиперплоскость, ортогональную AB. Тогда точки A и B перейдут в какую-то одну точку C на этой гиперплоскости, которая также будет вершиной ломаной-проекции. По лемме Штейница для размерности $d-1$ можно так переставить звенья этой ломаной, что расстояние от C до любой вершины переставленной ломаной будет не превышать $C_{d-1}\varepsilon$. Тогда соответствующая перестановка исходной ломаной в $\mathbb{R}^d$ и будет искомой. Для константы N_d получаем оценку: $N_d \leqslant C_{d-1}$.

Лемма 2. *Пусть ломаная удовлетворяет условию леммы* 1 (*расстояния от всех вершин до прямой AB меньше $N_d\varepsilon$*) *и дополнительно условию $|A-B| > 2\varepsilon$. Тогда можно так переставить звенья этой ломаной, что некоторый начальный кусок полученной после перестановки ломаной от A до некоторой вершины C удовлетворяет двум условиям:*

- $|B-C| \leqslant 2\varepsilon\sqrt{N_d^2+1}$;
- *расстояния от вершин ломаной, расположенных между A и C, до отрезка AB не превосходят $\varepsilon(N_d + \sqrt{N_d^2+1})$.*

Доказательство. Покажем, что можно так выбрать часть исходной ломаной, начинающуюся в вершине C_A и заканчивающуюся в вершине C_B, что:

- расстояния от C_A до A и от C_B до B не превосходят $\varepsilon\sqrt{N_d^2+1}$,
- проекции на прямую AB всех вершин ломаной между C_A и C_B лежат на отрезке AB.

Занумеруем вершины ломаной в порядке движения от A к B. Будем считать, что точка A лежит «левее» точки B на прямой AB. Выделим множество вершин, проекции которых лежат слева от A. В нем имеется вершина с наибольшим номером. Проекция следующей за ней вершины

Рис. 2. *Выделение правильной части*

будет уже лежать справа от точки A. Эта следующая и будет вершиной C_A. При этом расстояние от ее проекции до точки A меньше ε (так как предыдущая вершина лежит слева от A) и расстояние от C_A до ее проекции меньше $N_d\varepsilon$ (по условию). Следовательно, расстояние от C_A до вершины A меньше $\varepsilon\sqrt{N_d^2+1}$. Аналогично определим точку C_B, выбирая вершину, предыдущую той, которая имеет наименьший номер среди лежащих правее B. Условие $|B-A|>2\varepsilon$ гарантирует, что $C_B \neq C_A$.

Если переставить выделенную часть ломаной в начало (точку A), то ее конец будет находиться на расстоянии не больше $2\varepsilon\sqrt{N_d^2+1}$ от вершины B. Расстояние до отрезка AB при такой перестановке увеличится не более чем на $\varepsilon\sqrt{N_d^2+1}$.

Последовательное применение лемм 1 и 2 к некоторой ломаной, расстояние между началом и концом которой превосходит 2ε, дает такую перестановку вершин, что в ломаной, полученной в результате перестановки, есть непустая *правильная* часть — такой начальный кусок ломаной, который удовлетворяет утверждению леммы 2.

Доказательство леммы Штейница

Если сумма векторов равна нулю, то частичные суммы являются вершинами замкнутой ломаной с длиной звена не больше ε. Без ограничения общности считаем ниже, что $\varepsilon = 1$ и что начальная вершина ломаной совпадает с началом координат. Будем доказывать, что

$$C_d \leqslant N_d + 3\sqrt{N_d^2+1} + 1.$$

Занумеруем вершины ломаной в порядке обхода. Опишем перестановку звеньев ломаной, которая будет удовлетворять лемме Штейница. Выберем в ломаной вершину B_1 с наименьшим номером, для которой

$$2\sqrt{N_d^2+1} < |B_1| < 1 + 2\sqrt{N_d^2+1} \qquad (1)$$

(если такой вершины не найдется, то все вершины лежат в $2\sqrt{N_d^2+1}$-окрестности точки A). Звенья, стоящие до B_1, оставим без изменения. В оставшейся части ломаной переставим звенья так, чтобы выделить правильную часть, которая заканчивается в вершине B_2. Будем продолжать выделение правильных частей из остатка ломаной. Если на каком-то шаге получаем вершину B_k такую, что $|B_k| < 2$, то продолжаем ломаную произвольными звеньями до тех пор, пока не получим вершину B_{k+1}, удовлетворяющую (1).

Из леммы 2 следует, что расстояние от любой вершины, полученной в результате такого процесса, до точки A не превосходит

$$1 + 2\sqrt{N_d^2 + 1} + \left(N_d + \sqrt{N_d^2 + 1}\right) = N_d + 3\sqrt{N_d^2 + 1} + 1.$$

Доказательство теоремы Леви – Штейница

Для доказательства аффинности множества сумм перестановок некоторого ряда достаточно проверить, что если есть две различные точки — суммы перестановок ряда, то и вся прямая, проходящая через эти точки, входит во множество сумм перестановок ряда. Поскольку трудность представляет только случай условно сходящегося ряда, считаем без ограничения общности, что длина общего члена стремится к 0.

Во всех дальнейших рассуждениях полагаем $\varepsilon_n = 1/2^n$.

Доказательство проведем в два этапа. Вначале, применяя лемму Штейница, заменим суммы предельными точками множества частичных сумм ряда.

Лемма 3. *Если A — предельная точка множества частичных сумм некоторого ряда, то найдется такая перестановка этого ряда, для которой A — сумма.*

Доказательство. Пусть S_n — частичная сумма ряда, лежащая в ε_n-окрестности A. Для каждого n рассмотрим ломаную, ведущую из S_n в S_{n+1}, и дополним ее двумя вспомогательными векторами: из A в S_n и из S_{n+1} в A. Получим замкнутую ломаную, у которой A — начало и конец одновременно, а максимальная длина звена этой ломаной ℓ_n стремится к 0 при $n \to \infty$.

Применим к такой ломаной лемму Штейница, получим такую перестановку, что расстояния от вершин переставленной ломаной до A не превосходят $\ell_n C_d$. Удалим вспомогательные вектора из этой перестановки. Получим незамкнутую ломаную, расстояния от вершин которой до A не превосходят $\ell_n C_d + 2\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Далее предполагаем, что есть две различные суммы ряда A и B. Наша цель — доказать, что любая точка прямой AB является предельной точкой множества частичных сумм некоторой перестановки ряда. Для начала построим такую перестановку, что обе точки A и B являются предельными для множества частичных сумм.

Первыми поставим такие слагаемые, что их сумма S_1 лежит в ε_1-окрестности точки A. Затем дополним их другими слагаемыми так, чтобы новая частичная сумма S_2 лежала в ε_2-окрестности точки B (так можно сделать, поскольку и A, и B являются суммами разных перестановок одного и того же ряда). Продолжая чередовать серии, ведущие в A и в B, получим такую перестановку, для которой частичные суммы S_{2i+1} лежат в ε_{2i+1}-окрестности точки A, а частичные суммы S_{2i} — в ε_{2i}-окрестности точки B.

Через P_k, $k > 1$, обозначим слагаемые, которые входят в частичную сумму S_k, но не входят в частичную сумму S_{k-1}.

Рассмотрим некоторую точку $C = (1-t)A + tB$ на прямой AB. Без ограничения общности считаем, что $t > 0$. Обозначим $N = \lceil t \rceil$.

Переставим члены ряда таким образом, чтобы первыми шли слагаемые из S_1, затем — слагаемые из $P_2, P_4, \ldots, P_{2N}$, после них — слагаемые

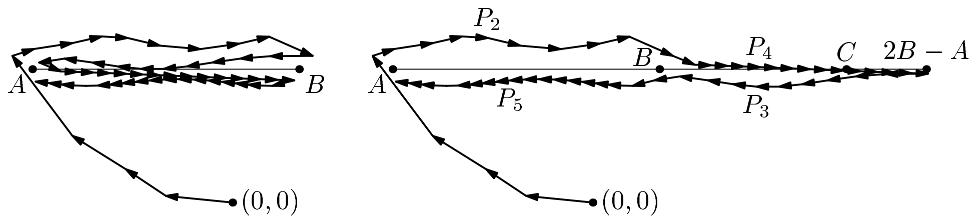

Рис. 3. *Пример для случая* $N = 2$

из P_3, P_5, P_{2N+1} и т. д. (каждый раз выбираем N четных P_k, а затем — соответствующие N нечетных). Заметим, что

$$\begin{aligned} &|(B-A) - (P_{2Nt+2} + P_{2Nt+4} + \cdots + P_{2N(t+1)})| < \sum_{n=2Nt}^{\infty} \varepsilon_n = 2^{-2Nt}, \\ &|(A-B) - (P_{2Nt+3} + P_{2Nt+5} + \cdots + P_{2N(t+1)+1})| < \sum_{n=2Nt+1}^{\infty} \varepsilon_n = 2^{-2Nt}. \end{aligned} \tag{2}$$

К каждой из частей P_k применим перестановку из леммы 1, после чего все вершины ломаных, соответствующих части P_k, будут отстоять от прямой AB не более чем на $N_d\delta_k + 2\varepsilon_{k-1}$, где δ_k — максимальная длина слагаемого из P_k. Оба слагаемых в этом выражении стремятся к 0 при $k \to \infty$.

Из соотношений (2) следует, что сумма $S_{2Nt} + \sum_{j=1}^{N} P_{2Nt+2j}$ близка к $D = (1-N)A + NB$, а сумма $S_{2Nt} + \sum_{j=1}^{N} P_{2Nt+2j} + \sum_{j=1}^{N} P_{2Nt+2j+1}$ близка к A. Поскольку C лежит между A и D, для любого $\varepsilon > 0$ и любого достаточно большого t найдется частичная сумма между S_{2Nt} и $S_{2N(t+1)}$, которая отстоит от C на расстояние $< \varepsilon$.

Таким образом, точка C — предельная точка множества частичных сумм указанной перестановки исходного ряда.