Теорема Леви – Штейница

Эта теорема, обобщающая хорошо известную теорему Римана[1)] о перестановках условно сходящихся числовых рядов, давно и успешно бытует в математическом фольклоре, зачастую под неправильным названием «многомерной теоремы Римана».

Для последовательностей и рядов, составленных из векторов евклидова пространства, понятия предела последовательности, абсолютной и условной сходимости ряда определяются аналогично числовому случаю с заменой модуля числа на длину вектора. Сама же теорема формулируется следующим образом:

> Множество сумм, полученных в результате всевозможных перестановок ряда из векторов евклидова пространства, есть либо пустое множество, либо аффинное многообразие.

Аффинное многообразие — это такое подмножество $\mathbb{R}^d$, которое вместе с любыми двумя различными точками содержит всю прямую, проходящую через эти точки. Аффинное многообразие имеет вид $v+L$, где v — некоторый вектор, а L — произвольное линейное подпространство. В частном случае комплексных рядов, множеством сумм перестановок будет либо пустое множество, либо точка, либо прямая, либо вся плоскость.

Как указано в статье П. Розенталя[2)] эта теорема была впервые доказана П. Леви в 1905 году[3)]. В 1913 г., Штейниц[4)] обнаружил неточность в доказательстве Леви. Он дополнил доказательство Леви, а также привел совершенно иной подход.

Ниже мы приводим две заметки, в которых приводятся различные доказательства этой теоремы. Первое из них, предложенное А. Кустаревым, основано на изучении свойств перестановок *конечных сумм* векторов. Это доказательство, идейно близкое к доказательству, приводимому в упомянутой статье П. Розенталя, представляется наиболее наглядным и

[1)] См., например, Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-ч т. Т. 2. М.: Наука, Физматлит, 1966. С. 316.

[2)] Rosenthal P. The remarkable theorem of Lévy and Steinitz // Amer. Math. Monthly, 1987. Vol. 94, no 4. P. 342–351.

[3)] Lévy P. Sur les séries semi-convergents // Nouv. Ann. de Math., 1905. V. 64. P. 506–511.

[4)] Steinitz E. Bedingt Konvergente Reihen and Konvexe Systeme // J. f ur Math., 1913. Bd. 143. S. 128–175.

элементарным. Второе доказательство, найденное И. А. Ивановым, не использует индукции по размерности пространства (но использует теорему Римана о перестановках числовых рядов). Оно обобщает доказательство, приведенное в книге Г. Полиа и Г. Сегё[5] для случая перестановок комплексных рядов. Вполне возможно, что это — самое короткое из известных доказательств теоремы Леви – Штейница.

[5] Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. В 2-ч т. Т. I. М.: Наука, 1978. С. 119, 308.