Конкурсы и олимпиады

Конкурс задач по линейной алгебре

Бóльшая часть этих задач предлагалась Э. Б. Винбергом студентам НМУ весной 1993 года.

Победители конкурса будут награждены математической литературой (в том числе и с дарственными надписями авторов). При определении победителей будут учитываться в первую очередь наиболее простые и красивые решения. Срок представления решений — 1 мая 2003 г. Участниками конкурса могут быть школьники и студенты первого курса.

Работы следует присылать по адресу 121002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, к. 202 (с пометкой «На конкурс „Математического просвещения“»).

Условия задач конкурса можно также найти в Интернете по адресу
`www.mccme.ru/free-books/matpros.html`

Условия задач

1. Доказать, что всякий пятигранный выпуклый конус в трехмерном евклидовом пространстве можно линейным преобразованием привести к такому виду, чтобы каждое ребро было перпендикулярно противоположной грани.

2. Указать конечное число троек подпространств пространства K^n, обладающее тем свойством, что для любого n-мерного пространства V над полем K и любой его тройки подпространств V_1, V_2, V_3 найдется изоморфизм $V \to K^n$, отображающий V_1, V_2, V_3 на подпространства одной из указанных троек.

3. Доказать, что не существует более чем $\left[n^2/4\right] + 1$ линейно независимых матриц порядка n, перестановочных между собой.

4. Функция $f(x, y)$ двух действительных переменных является многочленом от x при любом фиксированном y и многочленом от y при любом фиксированном x. Доказать, что f — многочлен от двух переменных.

5. Пусть $\mathbf{A}$ — такой линейный оператор в эрмитовом пространстве, что матричные элементы оператора $(\exp\ t\mathbf{A}^*)(\exp\ t\mathbf{A})$ суть многочлены от t. Доказать, что пространство V может быть разложено в ортогональную сумму $\mathbf{A}$-инвариантных подпространств U и W таким образом, что оператор $\mathbf{A}|_U$ нильпотентен, а оператор $\mathbf{A}|_W$ косоэрмитов.

6. Пусть α и β — движения n-мерного евклидова пространства, удовлетворяющие условиям $\alpha^3\beta^3 = (\alpha\beta)^2 = id$. Доказать, что α и β имеют общую инвариантную прямую.

7. Назовем тройку (A, B, C) квадратных матриц 3-го порядка абсолютно вырожденной, если любая их линейная комбинация вырожденна. Доказать, что с помощью преобразования вида

$$(A, B, C) \mapsto (UAV, UBV, UCV),$$

где U и V — невырожденные матрицы, любую абсолютно вырожденную тройку можно привести к виду, удовлетворяющему одному из трех условий:

1) первый столбец всех трех матриц нулевой;

2) левый нижний угол размера 2×2 всех трех матриц нулевой;

3) последняя строка всех трех матриц нулевая;

4) все три матрицы кососимметрические.