Наш семинар: математические сюжеты

Неэлементарность некоторых интегралов элементарных функций

В. В. Прасолов

В 1833 г. Лиувилль [4] построил первые примеры элементарных[1)] функций, интегралы от которых не элементарны. В частности, он показал, что неопределённый интеграл $\int e^{x^2}\,dx$ не является элементарной функцией. Лиувилль доказал также весьма общую теорему, которая позволяет строить другие примеры элементарных функций, интегралы от которых не элементарны.

Наиболее естественно теорема Лиувилля формулируется и доказывается на языке дифференциальных полей, который ближе к алгебре, чем к анализу. Возможно, именно поэтому теорема Лиувилля не столь хорошо известна, как она того заслуживает. Тем более, что её современное доказательство (приведённое, например, в [7]) не так уж сложно, а сам предмет весьма интересен.

Лиувилль добился успеха в решении этой трудной задачи во многом благодаря тому, что он ввёл удачное определение элементарной функции. Лиувилль воспользовался тем, что тригонометрические функции и обратные к ним выражаются через экспоненту и логарифм, а экспоненту и логарифм можно определить с помощью следующего свойства: если $g(x) = e^{f(x)}$, то $g'(x) = f'(x)g(x)$.

В теории Лиувилля основной объект — это *дифференциальное поле* K, т. е. поле, в котором задана операция *дифференцирования* $a \mapsto a'$, обладающая следующими свойствами: $(a+b)' = a' + b'$ и $(ab)' = a'b + ab'$ для

[1)]Определение элементарной функции приведено чуть ниже.

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 7, 2003(126–136)

любых элементов a, b поля K. Мы всегда будем предполагать, что характеристика поля K равна нулю.

Если $a \neq 0$ и $a' = b'a$, то элемент a называют *экспонентой* элемента b, а элемент b называют *логарифмом* элемента a.

Легко проверить, что $\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - ab'}{b^2}$, $(a^n)' = na^{n-1}a'$ для любого целого n и $1' = 0$, поскольку $1' = (1^2)' = 2 \cdot 1 \cdot 1'$.

Элемент $c \in K$ называют *константой*, если $c' = 0$. Константы образуют подполе в поле K.

Дифференциальное поле $L \supset K$ называют *дифференциальным расширением* поля K, если дифференцирование поля K совпадает с ограничением на K дифференцирования поля L.

Напомним, что поле, полученное присоединением к полю K элементов $t_1, \ldots, t_n$, обозначают $K(t_1, \ldots, t_n)$. Дифференциальное расширение $L \supset K$ называют *элементарным*, или *расширением Лиувилля*, если $L = K(t_1, \ldots, t_n)$, где каждый элемент t_i удовлетворяет одному из следующих трёх условий:

- ▷ t_i алгебраичен над $K_i = K(t_1, \ldots, t_{i-1})$, т. е. $t_i^n + a_{n-1}t_1^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ для некоторого натурального n и некоторых $a_0, \ldots, a_{n-1} \in K_i$;
- ▷ t_i — экспонента элемента поля K_i;
- ▷ t_i — логарифм элемента поля K_i.

Комплекснозначную функцию, определённую в области $U \subset \mathbb{C}$, будем называть *элементарной*, если она лежит в некотором элементарном расширении поля рациональных функций $\mathbb{C}(z)$. Все привычные для нас функции — полиномы, рациональные функции, экспоненты, логарифмы, тригонометрические функции и обратные к ним являются элементарными по Лиувиллю.

Теорема, доказанная Лиувиллем, состоит в том, что если интеграл элементарной функции α является элементарной функцией, то функция α имеет весьма специальный вид. А именно, справедливо следующее утверждение (которое мы приводим в современной формулировке).

Теорема 1 (Лиувилль). *Пусть $\alpha \in K$, где K — некоторое дифференциальное поле. Если уравнение $y' = \alpha$ имеет решение y, лежащее в некотором элементарном расширении поля K, имеющем то же самое поле констант, то в поле K существуют константы $c_1, \ldots, c_n$ и элементы $u_1, \ldots, u_n, v$, для которых*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v'.$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы Лиувилля и к построению на её основе примеров элементарных функций, неопределённые интегралы которых неэлементарны, докажем два вспомогательных свойства дифференциальных расширений полей.

Лемма 1. *Пусть L — расширение дифференциального поля K. Тогда дифференцирование поля K можно продолжить на L, а если расширение L алгебраическое, то дифференцирование поля K продолжается на L единственным образом.*

Доказательство. Предположим, что элемент X *трансцендентен* (т. е. не алгебраичен) над K. Тогда на кольцо многочленов $K[X]$ дифференцирование поля K можно продолжить следующим образом: $D(\sum a_k X^k) = \sum a_k' X^k$. На поле рациональных функций $K(X)$ полученное дифференцирование можно продолжить по формуле

$$D\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{(Du)v - (Dv)u}{v^2}.$$

Предположим теперь, что элемент x алгебраичен над K и $f(X) \in K[X]$ — его минимальный многочлен. Рассмотрим дифференцирование $\frac{\partial}{\partial x}$ кольца $K[X]$, заданное формулой

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum a_k X^k\right) = \sum k a_k X^{k-1}.$$

Относительно этого дифференцирования все элементы поля K являются константами. Поэтому для любого фиксированного многочлена $g(X) \in K[X]$ оператор $D + g(X)\partial/\partial x$ является дифференцированием кольца $K[X]$, ограничение которого на K совпадает с D, т. е. совпадает с исходным дифференцированием поля K. Подберём многочлен $g(X)$ так, чтобы указанное дифференцирование переводило в себя идеал (f) кольца $K[X]$, порождённый многочленом $f(X)$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$(Df)(x) + g(x)f'(x) = 0, \quad \text{где} \quad f'(X) = \frac{\partial}{\partial x} f(X).$$

Но $f'(x) \neq 0$, поскольку f — минимальный многочлен элемента x. Поэтому корректно определён элемент

$$g(x) = -(Df)(x)/f'(x) \in K(x) = K[x] \cong K[X]/(f).$$

Этому элементу соответствует многочлен кольца $K[X]$, который определён с точностью до прибавления к нему многочлена, кратного $f(X)$. Построенное таким образом дифференцирование кольца $K[X]$ индуцирует дифференцирование поля $K[X]/(f) \cong K(x)$, продолжающее исходное дифференцирование поля K.

Мы доказали, что дифференцирование поля можно продолжить на поле, полученное в результате присоединения к исходному полю одного элемента (алгебраического или трансцендентного). Поэтому дифференцирование можно продолжить на поле, полученное в результате присоединения конечного множества элементов. Нас будут интересовать только такие расширения, поэтому мы не будем обсуждать доказательство в случае, когда присоединяется бесконечно много элементов. (В этом случае доказательство проводится с помощью леммы Цорна.)

Докажем теперь, что в случае алгебраического расширения продолжение дифференцирования определено однозначно. Пусть D_1 и D_2 — два дифференцирования поля L, ограничения которых на K совпадают. Нужно доказать, что если элемент x алгебраичен над K, то $D_1x = D_2x$. Разность $D_1 - D_2$ является дифференцированием, аннулирующим K (т.е. отображающим все элементы K в нуль). Поэтому нужно доказать, что если дифференцирование аннулирует поле K, то оно аннулирует и любой элемент x, который алгебраичен над K. Пусть $f(X) \in K[X]$ — минимальный многочлен элемента x. Тогда $f(x) = 0$ и $f'(x) \neq 0$. Поэтому $0 = \big(f(x)\big)' = f'(x)x'$, а значит, $x' = 0$.

Лемма 2. *Пусть K — дифференциальное поле, $K(t)$ — дифференциальное расширение поля K, имеющее то же самое поле констант, причём элемент t трансцендентен над K.*

а) *Если $t' \in K$, то для любого многочлена $f(t) \in K[t]$ положительной степени элемент $\big(f(t)\big)'$ является многочленом либо той же самой степени, что и f, либо степени на 1 меньше, в зависимости от того, отличен старший коэффициент многочлена f от константы или нет.*

б) *Если $t'/t \in K$, то для любого элемента $a \in K^* = K \setminus \{0\}$ и любого натурального числа n имеет место равенство $(at^n)' = dt^n$, где $d \in K^*$. Далее, для любого многочлена $f(t) \in K[t]$ положительной степени элемент $\big(f(t)\big)'$ является многочленом той же самой степени, что и f; этот многочлен делится на f тогда и только тогда, когда $f(t)$ — моном.*

Доказательство. а) Пусть $f(t) = a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0$, где $a_0, \dots, a_n \in K$ и $a_n \neq 0$. По условию $t' = b \in K$, поэтому

$$\big(f(t)\big)' = a_n't^n + (na_nb + a_{n-1}')t^{n-1} + \dots + (a_1b + a_0').$$

Если $a_n' \neq 0$, то $\big(f(t)\big)'$ — многочлен степени n. Предположим, что $a_n' = 0$ и $na_nb + a_{n-1}' = 0$. Тогда $(na_nt + a_{n-1})' = na_nb + a_{n-1}' = 0$, т.е. элемент $na_nt + a_{n-1}$ является константой. По условию все константы лежат в K, а значит, $t \in K$. Это противоречит трансцендентности элемента t. Поэтому если $a_n' = 0$, то $\big(f(t)\big)'$ — многочлен степени $n - 1$.

б) Ясно, что $(at^n)' = a't^n + nat^{n-1}t' = (a'+nab)t^n$, где $b = t'/t \in K$. Если $a' + nab = 0$, то $(at^n)' = 0$, т. е. at^n — константа, а значит, $t^n \in K$. Это противоречит трансцендентности элемента t. Поэтому $d = a' + nab \neq 0$.

Пусть $f(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0$, где $a_0, \dots, a_n \in K$ и $a_n \neq 0$. Тогда

$$\big(f(t)\big)' = (a_n' + na_n b)t^n + \dots + a_0'.$$

Мы только что доказали, что $a_n' + na_n b \neq 0$. Поэтому $\big(f(t)\big)'$ — многочлен степени n.

Предположим, что многочлен $f(t)$ не моном, т. е. он содержит по крайней мере два ненулевых слагаемых $a_n t^n$ и $a_m t^m$. Если многочлен $\big(f(t)\big)'$ делится на $f(t)$, то коэффициенты этих многочленов должны быть пропорциональны. В частности,

$$\frac{a_n' + na_n b}{a_n} = \frac{a_m' + ma_m b}{a_m}, \text{ т. е. } \frac{a_n'}{a_n} + n\frac{t'}{t} = \frac{a_m'}{a_m} + m\frac{t'}{t}.$$

При условии, что $a_n a_m t^{n+m} \neq 0$, последнее равенство эквивалентно равенству $(a_n t^n / a_m t^m)' = 0$. Значит, $a_n t^n / a_m t^m \in K$, что снова противоречит трансцендентности элемента t.

Теперь можно приступить к доказательству теоремы Лиувилля.

Доказательство теоремы Лиувилля. Мы предположили, что существует последовательность дифференциальных расширений полей $K \subset K(t_1) \subset \dots \subset K(t_1, \dots, t_N)$ со следующими свойствами:

- ▷ у всех этих полей одно и то же подполе констант;
- ▷ каждый элемент t_i либо алгебраичен над полем $K(t_1, \dots, t_{i-1})$, либо является экспонентой или логарифмом элемента этого поля;
- ▷ существует элемент $y \in K(t_1, \dots, t_N)$, для которого $y' = \alpha$.

Доказательство проведём индукцией по N. При $N = 0$ утверждение очевидно. Действительно, элемент y лежит в поле K, поэтому можно положить $v = y$. Предположим, что $N > 0$ и для $N - 1$ утверждение уже доказано. Тогда это утверждение можно применить к полям $K(t_1) \subset K(t_1, \dots, t_N)$ и получить, что элемент α можно записать в требуемом виде, но только элементы $u_1, \dots, u_n, v$ будут лежать в поле $K(t_1)$, а не в K, как это нужно. Остаётся это исправить. Положим для краткости $t_1 = t$. По условию элемент t либо алгебраичен над K, либо является логарифмом или экспонентой элемента поля K.

Рассмотрим сначала случай, когда элемент t алгебраичен над K. Тогда существуют многочлены $U_1, \dots, U_n, V$ с коэффициентами из K, для которых $u_1 = U_1(t), \dots, u_n = U_n(t), v = V(t)$. Построим алгебраическое замыкание поля $K(t)$ и выберем в нём элементы $\tau_1 = t, \tau_2, \dots, \tau_s$, сопряжённые с t над K. Согласно лемме 1 на алгебраическое расширение дифференциального поля дифференцирование продолжается единственным образом, поэтому из того, что равенство

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\big(U_i(\tau_j)\big)'}{U_i(\tau_j)} + \big(V(\tau_j)\big)'$$

имеет место для $j = 1$, следует, что оно имеет место и для всех $j = 1, 2, \ldots, s$. Просуммировав полученные равенства и поделив их на s, получим, что

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{s} \frac{\big(U_i(\tau_1) \cdot \ldots \cdot U_i(\tau_s)\big)'}{U_i(\tau_1) \cdot \ldots \cdot U_i(\tau_s)} + \Big(\frac{V(\tau_1) + \cdots + V(\tau_s)}{s}\Big)';$$

здесь мы воспользовались тождеством

$$\frac{f_1'}{f_1} + \cdots + \frac{f_s'}{f_s} = \frac{(f_1 \cdot \ldots \cdot f_s)'}{f_1 \cdot \ldots \cdot f_s}. \tag{1}$$

Выражения $U_i(\tau_1) \cdot \ldots \cdot U_i(\tau_s)$ и $V(\tau_1) + \cdots + V(\tau_s)$ являются симметрическими многочленами от $\tau_1, \ldots, \tau_s$ с коэффициентами из K, поэтому эти выражения лежат в K. Таким образом, мы получили для α выражение требуемого вида.

В оставшихся случаях, когда t — экспонента или логарифм элемента поля K, можно предполагать, что элемент t трансцендентен над K. При этом

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\big(u_i(t)\big)'}{u_i(t)} + \big(v(t)\big)',$$

где $u_1(t), \ldots, u_n(t)$, $v(t)$ — рациональные функции с коэффициентами из K. Каждую рациональную функцию $u_i(t)$ можно представить в виде произведения ненулевого элемента поля K и неприводимых над K многочленов со старшим коэффициентом 1, каждый из которых возводится в некоторую степень, положительную или отрицательную. Поэтому, воспользовавшись тождеством (1), можно переписать сумму $\sum c_i\big(u_i(t)\big)'/u_i(t)$ в виде такой же суммы, но в которой $u_i(t)$ — неприводимые многочлены со старшим коэффициентом 1. Действительно, для любого целого n имеет место равенство $(f^n)'/f^n = nf'/f$. Можно также считать, что все многочлены $u_1, \ldots, u_n$ попарно различны и все коэффициенты c_i ненулевые. Далее, рациональную функцию $v(t)$ можно представить в виде суммы многочлена и нескольких слагаемых вида $g(t)/\big(f(t)\big)^r$, где $f(t)$ — неприводимый многочлен со старшим коэффициентом 1 и $g(t)$ — многочлен, степень которого меньше степени многочлена $f(t)$.

Рассмотрим случай, когда t — логарифм элемента K, т. е. $t' = a'/a$ для некоторого $a \in K$. Пусть $f(t)$ — произвольный неприводимый многочлен положительной степени над полем K со старшим коэффициентом 1.

Согласно лемме 2(а) элемент $\bigl(f(t)\bigr)'$ является многочленом, степень которого меньше степени многочлена $f(t)$; в частности, $\bigl(f(t)\bigr)'$ не делится на $f(t)$. Предположим, что многочлен f присутствует в разложении рациональной функции $v(t)$ в качестве слагаемого g/f^r, где $r \geqslant 1$, причём r — максимально возможное значение. Равенство

$$\left(\frac{g}{f^r}\right)' = \frac{g'}{f^r} - \frac{rgf'}{f^{r+1}} \tag{2}$$

показывает, что в разложении $\bigl(v(t)\bigr)'$ присутствует дробь со знаменателем f^{r+1}, поскольку rgf' не делится на f. В выражении для α такая дробь ни с чем не может сократиться, поскольку даже если один из многочленов u_i совпадает с f, то u_i'/u_i — дробь со знаменателем всего лишь f. Таким образом, $v(t)$ — многочлен. Кроме того, многочлен $u_i(t)$ не может зависеть от t (т. е. иметь положительную степень), поскольку иначе u_i'/u_i — несократимая дробь. Значит, $u_i(t) \in K$. Теперь выражение для α показывает, что $\bigl(v(t)\bigr)' \in K$, т. е. $v = ct + d$, где c — константа и $d \in K$. А поскольку $t' = a'/a$, получаем выражение требуемого вида:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + c\frac{a'}{a} + d.$$

Рассмотрим, наконец, случай, когда t — экспонента элемента K, т. е. $t'/t = b'$, где $b \in K$. Пусть $f(t)$ — многочлен положительной степени. Согласно лемме 2(б) $\bigl(f(t)\bigr)'$ — многочлен той же самой степени, причём $\bigl(f(t)\bigr)'$ делится на $f(t)$ тогда и только тогда, когда $f(t)$ — моном. Поэтому если $f(t)$ — неприводимый многочлен положительной степени со старшим коэффициентом 1, отличный от t, то $\bigl(f(t)\bigr)'$ не делится на $f(t)$. Те же самые рассуждения, что и в предыдущем случае, показывают, что такой многочлен $f(t)$ не может встретиться в разложении $v(t)$ в качестве знаменателя и ни один из многочленов $u_i(t)$ не может быть равен $f(t)$. Поэтому $v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k t^k$, причём лишь конечное число коэффициентов a_k отлично от нуля. Кроме того, все $u_i(t)$ лежат в K, за исключением, быть может, одного, равного t. Но в таком случае все выражения $\bigl(u_i(t)\bigr)'/u_i(t)$ лежат в K, поэтому $\bigl(v(t)\bigr)' \in K$. Согласно лемме 2(б) $\bigl(v(t)\bigr)' = \sum d_k t^k$, где $d_k \in K$ и если $a_k \neq 0$, то $d_k \neq 0$. Поэтому $v(t) = v \in K$. Если все $u_i(t)$ лежат в K, то мы немедленно получаем требуемое выражение. Если же, например, $u_1(t) = t$, то мы получаем выражение

$$\alpha = c_1\frac{t'}{t} + \sum_{i=2}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v' = \sum_{i=2}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + (c_1 b + v)'.$$

Это выражение имеет требуемый вид, поскольку $c_1 b + v \in K$. $\square$

Покажем теперь, как с помощью теоремы Лиувилля доказывается неэлементарность некоторых конкретных интегралов. Для этих целей Лиувилль доказал следующий критерий элементарности интеграла $\int f(z)e^{g(z)}dz$, где f и g — рациональные функции (отношения многочленов).

Теорема 2 (критерий Лиувилля). *Пусть $f(z)$ и $g(z)$ — рациональные функции, причём функция f — не тождественный нуль, а функция g — не константа. Интеграл $\int f(z)e^{g(z)}dz$ является элементарной функцией тогда и только тогда, когда существует рациональная функция $a(z)$, для которой имеет место равенство $f = a' + ag'$.*

Доказательство. Прежде всего докажем, что функция $e^{g(z)}$ не алгебраична над полем $\mathbb{C}(z)$. Предположим, что функция e^g удовлетворяет неприводимому уравнению

$$e^{ng} + a_1e^{(n-1)g} + \dots + a_n = 0$$

над полем $\mathbb{C}(z)$. Продифференцировав это уравнение, получим уравнение

$$ng'e^{ng} + \big(a_1' + (n-1)a_1g'\big)e^{(n-1)g} + \dots + a_n' = 0.$$

Это новое уравнение должно быть пропорционально исходному. Следовательно, $ng' = a_n'/a_n$. Но если мы представим a_n и g в виде суммы элементарных дробей вида $p/(z-q)^m$, то получим, что a_n'/a_n является суммой элементарных дробей с линейными знаменателями, а представление g' вообще не может содержать элементарных дробей с линейными знаменателями. Значит, $g' = 0$, т. е. g — константа, а это противоречит условию теоремы.

Положим $e^g = t$. Тогда $t'/t = g'$. Применим теорему Лиувилля в случае, когда $K = \mathbb{C}(z,t)$ и $\alpha = ft$. В результате получим, что если интеграл $\int fe^g dz$ является элементарной функцией, то

$$ft = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v', \tag{3}$$

где $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ и $u_1, \dots, u_n, v \in \mathbb{C}(z,t)$.

Положим $F = \mathbb{C}(z)$. Тогда $f, g \in F$ и $u_1, \dots, u_n, v \in F(t)$. Применяя при необходимости тождество (1) (см. с. 131), можно считать, что все u_i, отличные от элементов F, являются неприводимыми над F многочленами от t со старшим коэффициентом 1. Запишем v в виде суммы элемента кольца $F[t]$ и нескольких слагаемых вида $g(t)/\big(f(t)\big)^r$, где $f(t)$ — неприводимый над F многочлен со старшим коэффициентом 1 и $g(t)$ — многочлен, степень которого меньше степени многочлена $f(t)$. Точно так же, как и при доказательстве теоремы Лиувилля, с помощью леммы 2(б) получаем, что $v = \sum a_k t^k$ (сумма конечная) и все u_i лежат в F, за исключением, быть может, одного, равного t. В таком случае $\sum c_i \frac{u_i'}{u_i} \in F$. Кроме того, $v' = \sum d_k t^k$, где $d_k = a_k' + k a_k g' \in F$. Поэтому равенство (3) показывает, что $ft = (a_1' + a_1 g')t$. Полагая $a = a_1$, получаем требуемое равенство $f = a' + ag'$.

Наоборот, если $f = a' + ag'$, то $(ae^g)' = fe^g$.

Пример 1. Интеграл $\int e^{z^2} dz$ не элементарен.

Доказательство. В этом случае $f(z) = 1$ и $g(z) = z^2$. Поэтому уравнение $f = a' + ag'$ имеет вид $1 = a' + 2az$. Нужно доказать, что это уравнение не имеет решений $a(z) \in \mathbb{C}(z)$. Если в разложении рациональной функции $a(z)$ в качестве слагаемого присутствует дробь со знаменателем $(z-\alpha)^r$, где $r \geqslant 1$, причём r — максимально возможное значение, то тождество (2) на с. 132 показывает, что в выражении $a' + 2az$ присутствует дробь со знаменателем $(z-\alpha)^{r+1}$. Поэтому $a(z)$ — многочлен некоторой степени n. Тогда $a'(z)$ — многочлен степени $n-1$, а $2za(z)$ — многочлен степени $n+1$. Поэтому для многочлена a равенство $1 = a' + 2az$ выполняться не может.

Пример 2. Интеграл $\int \frac{e^z}{z} dz$ не элементарен.

Доказательство. В этом случае $f(z) = 1/z$ и $g(z) = z$. Нужно доказать, что уравнение $\frac{1}{z} = a' + a$ не имеет решений $a \in \mathbb{C}(z)$. Точно так же, как и в предыдущем примере, доказывается, что $a(z)$ — многочлен. Но тогда сумма $a + a'$ тоже многочлен, поэтому она не может быть равна $1/z$.

Пример 3. Интегралы $\int e^{e^z} dz$, $\int \frac{dz}{\ln z}$ и $\int \ln\ln z\, dz$ не элементарны.

Доказательство. Все эти интегралы сводятся к интегралу $\int \frac{e^z}{z} dz$. Во-первых, положив $z = e^u$, получим $\int \frac{e^z}{z} dz = \int e^{e^u} du$. Во-вторых, положив $z = \ln w$, получим $\int \frac{e^z}{z} dz = \int \frac{dw}{\ln w}$. Наконец, интегрируя по частям, получаем $\int \ln\ln z\, dz = z \ln\ln z - \int \frac{e^z}{z} dz$.

Разберём в конце более сложный пример, используя не критерий Лиувилля, а непосредственно саму теорему Лиувилля.

Пример 4. *Интеграл* $\int \frac{\sin z}{z} dz$ *не элементарен.*

Доказательство. С помощью замены $z \mapsto iz$ данный интеграл сводится к интегралу $\int \frac{e^z - e^{-z}}{z} dz$. Как и при доказательстве критерия Лиувилля, рассмотрим дифференциальное поле $\mathbb{C}(z, t)$, где $t = e^z$. Предположим, что интеграл $\int \frac{e^z - e^{-z}}{z} dz$ элементарен. Тогда согласно теореме Лиувилля имеет место равенство

$$\frac{t^2 - 1}{tz} = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v', \tag{4}$$

где $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ и $u_1, \ldots, u_n, v \in \mathbb{C}(z, t)$. Положим $F = \mathbb{C}(z)$. Тогда $u_1, \ldots, u_n, v \in F(t)$. Снова можно считать, что $u_1, \ldots, u_n$ — различные неприводимые многочлены над F со старшим коэффициентом 1, и снова можно представить v в виде суммы многочлена и дробей определённого вида. Применив лемму 2(б), получим, что либо $u_i \in F$, либо $u_i = t$. Следовательно, $\sum c_i \frac{u_i'}{u_i} \in F$. Кроме того, в качестве знаменателей дробей разложения v могут встретиться только степени t. Пусть $v = \sum_k a_k t^k$, $a_k \in F$. Приравнивая в равенстве (4) коэффициенты при t, получаем равенство $\frac{1}{z} = a_1' + a_1$. В примере 2 было показано, что для рациональной функции $a_1(z)$ такое равенство выполняться не может.

Заинтересованный читатель может более подробно ознакомиться с дифференциальной алгеброй, обратившись к книгам [1], [2], [3], [5] и статье [6].

Список литературы

[1] Дэвенпорт Дж. *Интегрирование алгебраических функций.* М.: Мир, 1985.

[2] Капланский И. *Введение в дифференциальную алгебру.* М.: ИЛ, 1959.

[3] Kolchin E. R. *Differential algebra and algebraic groups.* London, Academic Press, 1973.

[4] Liouville J. *Sur la detérmination des integrales dont la valeur est algébrique* // J. École Polytech., 1833. Vol. 14. P. 124–193.

[5] Magid A. R. *Lectures on differential Galois theory.* AMS, 1994.

[6] Rosenlicht M. *Liouville's theorem for functions with elementary integrals* // Pacific J. Math., 1968. Vol. 24. P. 153–161.

[7] Rosenlicht M. *Integration in finite terms* // Amer. Math. Monthly, 1972. Vol. 79. P. 963–972.