# Решения задач из предыдущих выпусков

3.7. Условие. (Задача на исследование). При каких $n$ и $k$ существует замкнутая $n$-звенная ломаная, пересекающая каждое свое звено ровно $k$ раз (такую ломаную будем называть ломаной типа $(n, k)$).

а) Если $n$ и $k$ оба нечетны, то это невозможно.

б) Если $nk$ четно и $n > 3k$, то это возможно.

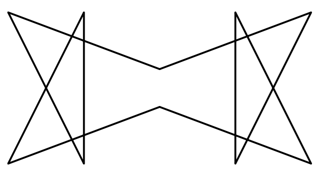
в) Постройте ломаную типа (8,2).

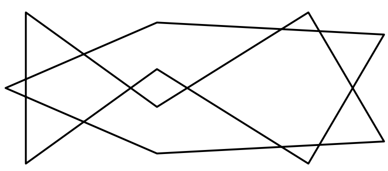
г) Существует ли ломаная типа (6,2).

Приведите разные другие примеры.

Решение. Пункт а). Допустим, что такая ломаная существует. Найдем общее число точек пересечения. Оно равно $nk/2$. Противоречие.

Пункт б). Этот пункт сформулирован неправильно, за что приносим читателям извинения. Например, ломаной (4,1) не существует. Правильная формулировка такова: при четном $k$ и $n \geqslant 2k+6$, ломаная существует. Докажем, что при любом $k = 2m$ существует ломаная $(k + 3, k)$. Рассмотрим вершины правильного $(k+3)$-угольника и будем строить ломаную из его диагоналей. Выберем направление обхода вершин по часовой стрелке. Соединим первую вершину с $(m + 2)$-й (пропустили $m$ вершин) и т. д. по кругу, каждый раз пропускаем $m$ вершин. Получим замкнутую ломаную в виде звезды (поскольку $n$ и $m+1$ взаимно просты). Например, для $k = 2$, $n = 5$ получим обычную пятиконечную звезду. При $n > k + 3$ диагонали $n$-угольника могут образовать несколько замкнутых ломаных. Например, при $k = 2$, $n = 6$ получается звезда Давида. Покажем как можно «сращивать» звёзды.

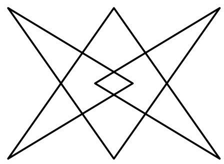


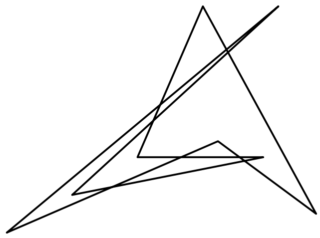


Важно, что, сращивая замкнутые ломаные или замкнутую ломаную с замкнутыми компонентами «распавшейся» звезды, мы получаем замкнутую ломаную. Таким образом, приращивая к ломаной $(k + 3, k)$ звёзды

$(k+3,k)$, $(k+4,k)$ и т. д., мы будем получать ломаные типа $(2k+6,k)$, $(2k+7,k)$ и т. д. Тонкий момент состоит в том, что число связных компонент звезды может превысить число вершин исходной ломаной $(k+3,k)$. Найти выход из этого затруднения мы предоставляем читателю в качестве упражнения.

Решение пункта в) см. рис.





Решение пункта г) (Этот результат публикуется впервые).

Занумеруем звенья ломаной по порядку. Если ломаная существует, то ей можно поставить в соответствие таблицу $6\times 6$, в которой на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца стоит «+», если звенья с такими номерами пересекаются, и стоит «−», если — не пересекаются. Тогда в каждой строке и в каждом столбце таблицы будут стоять ровно 2 плюса, а остальные — минусы. Поскольку ни одно звено не пересекается само с собой и с соседними звеньями, то три диагонали таблицы можно сразу заполнить минусами.

Предположим, что ломаная типа $(6,2)$ существует, тогда надо расставить в пустых клетках «+» и «−» так, чтобы в каждой строке и каждом столбце стояло два плюса. Построим все такие таблицы, а затем докажем, что ни одной из них не может соответствовать замкнутая ломаная.

В первой строке возможны следующие варианты расположения плюсов в пустых клетках: два плюса стоят 1) слева; 2) справа; 3) через одну клетку. При заполнении таблицы будем пользоваться следующими правилами:

- ▷ в клетках с координатами $(i,j)$ и $(j,i)$ стоят одинаковые знаки;
- ▷ если в некотором ряду (строке или столбце) осталось только две пустые клетки, а в остальных стоят нули, то надо поставить два плюса;
- ▷ если осталась одна пустая клетка, то очевидно, «+» или «−» надо поставить.

Рассмотрим первый случай (ставим в первой строке в пустых клетках слева два плюса подряд) и покажем процесс заполнения пустых клеток.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| − | − | + | + | − | − |
| − | − | − | | | |
| ? | − | − | − | | |
| ? | | − | − | − | |
| − | | | − | − | − |
| − | | | | − | − |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| − | − | + | + | − | − |
| − | − | − | | ? | |
| + | − | − | − | ? | |
| + | | − | − | − | |
| − | ? | ? | − | − | − |
| − | | | | − | − |

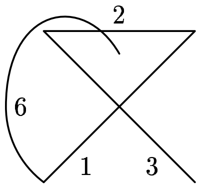
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| − | − | + | + | − | − |
| − | − | − | | + | |
| + | − | − | − | + | ? |
| + | | − | − | − | |
| − | + | + | − | − | − |
| − | | ? | | − | − |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| − | − | + | + | − | − |
| − | − | − | | + | ? |
| + | − | − | − | + | − |
| + | | − | − | − | ? |
| − | + | + | − | − | − |
| − | ? | − | ? | − | − |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| − | − | + | + | − | − |
| − | − | − | ? | + | + |
| + | − | − | − | + | − |
| + | ? | − | − | − | + |
| − | + | + | − | − | − |
| − | + | − | + | − | − |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | − | − | + | + | − | − |
| 2 | − | − | − | − | + | + |
| 3 | + | − | − | − | + | − |
| 4 | + | − | − | − | − | + |
| 5 | − | + | + | − | − | − |
| 6 | − | + | − | + | − | − |

В этом случае мы получили единственный вариант: первое звено пересекается с третьим и четвертым, второе — с пятым и шестым и т. д.




Докажем, что ломаную с такими свойствами построить нельзя. Для этого попробуем ее построить. Заметим, что первые три звена образуют фигуру, изображенную на рисунке. Шестое звено связано с первым и не пересекает третьего, следовательно, оно не может пересечь второе. Противоречие.

Во втором случае получается таблица, которая эквивалентна первой с точностью до перенумерации (если мы третье звено назовем первым, четвертое — вторым и т. д., то получим первую таблицу).

В третьем случае (плюсы стоят через один) есть два варианта таблицы, один из которых эквивалентен первому случаю, а другому варианту не может соответствовать ломаная (для доказательства подходит рисунок к первому случаю).

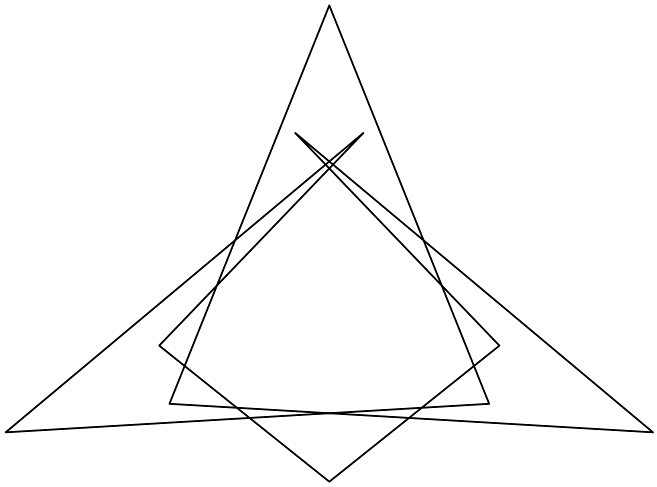
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | − | − | − | + | + | − |
| 2 | − | − | − | + | − | + |
| 3 | − | − | − | − | + | + |
| 4 | + | + | − | − | − | − |
| 5 | + | − | + | − | − | − |
| 6 | − | + | + | − | − | − |

Второй случай

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | − | − | + | − | + | − |
| 2 | − | − | − | + | − | + |
| 3 | + | − | − | − | + | − |
| 4 | − | + | − | − | − | + |
| 5 | + | − | + | − | − | − |
| 6 | − | + | − | + | − | − |

Третий случай

Покажем уникальную ломаную, о существовании которой ничего не было известно (находка автора). Это ломаная типа (10,3).



В заключение приведем две не решенные задачи: существуют ли ломаные типа (8,3) и (9,4)? (*А. К. Ковальджи*)

4.2. Условие. Между пунктами $A$ и $B$ расстояние 60 км. Поезд делает остановку в пункте $A$ и через час — в пункте $B$. Докажите, что в некоторый момент времени его ускорение не меньше чем 240 км/ч$^2$.

Решение. Выберем 60 км в качестве единицы длины, час — в качестве единицы времени и не будем далее указывать размерности величин.

Докажем от противного. Пусть ускорение всегда меньше 4. Поскольку в начале и в конце пути скорость нулевая, то в момент времени $t \in (0, 1/2)$ скорость меньше $4t$, а в момент времени $t \in (1/2, 1)$ скорость меньше $4(1-t)$. Это означает, что график зависимости скорости от времени лежит под графиком кусочно-линейной функции $2 - |4t - 2|$. Значит, пройденный путь (интеграл от скорости) меньше площади треугольника с высотой 2 и основанием 1. С другой стороны, пройденный путь по условию равен 1. Противоречие. (*М. Н. Вялый*)

4.3. Условие. Имеется граф $G$ и его автоморфизм $f\colon G \to G$ порядка 2: если $x \in G$, то $f(f(x)) = x$ (напомним, что автоморфизм графа сохраняет смежность вершин). Примерами могут служить графы правильных центрально-симметричных многогранников или правильные решетки на евклидовой и гиперболической плоскостях; есть и много других примеров.

В каждой вершине графа написано вещественное число. Любые два соседних числа (т. е. стоящих в концах одного ребра графа) отличаются меньше чем на 1. Докажите, что найдется пара вершин $(x, f(x))$, числа в которых также отличаются меньше чем на 1.

Решение. В такой формулировке задача неверна: если граф состоит из двух изолированных вершин, то написанные в этих вершинах числа могут быть любыми.

Докажем, что утверждение задачи выполняется для связных графов. Пусть $f(x_0) - x_0 \geqslant 1$ (иначе все доказано). Соединим вершины $x_0$ и $y_0 = f(x_0)$ путем $x_0 x_1 \ldots x_m = y_0$ в графе $G$. Симметричные вершины $y_i = f(x_i)$ образуют путь из $y_0$ в $x_0$.

В последовательности чисел $d_i = y_i - x_i$ первое число положительно, а последнее отрицательно. Пусть $d_k$ — первый отрицательный член последовательности $\{d_i\}$. Если $d_{k-1} < 1$, то все доказано. Если же $d_{k-1} \geqslant 1$, то $x_k$ и $y_k$ принадлежат любому интервалу длины 1, содержащемуся в $(x_{k-1}, y_{k-1})$, а значит $x_k - y_k < 1$. (*М. Н. Вялый*)

4.4. Условие. Несколько школьников играют в пинг-понг «на вылет». Они установили очередь, вначале играют первые двое, а затем победитель каждой сыгравшей пары играет со следующим из очереди. На другой день ребята играют по той же системе, но порядок в очереди изменен на противоположный (т. е. очередь идет от последнего к первому). Докажите, что найдется пара игроков, которые встречались и в первый день, и во второй.

Решение. В первый день соперник последнего игрока в очереди играл со всеми, кто стоял в очереди позже него. С одним из них он играет свою первую партию во второй день.

Примечание. Если это решение кажется слишком лаконичным, то его можно развернуть так:

В последней паре первого дня один из участников — последний в очереди. Другой (назовем его $X$) — либо предпоследний, либо выиграл у всех, стоявших в очереди между ним и последним. Во второй день $X$ играет свою первую партию с кем-то, стоящим раньше него — и, значит, стоявшим позже в первый день. Но со всеми такими игроками $X$ уже играл. (*Б. Р. Френкин*)

4.10. Условие. Известно, что ранг коммутатора $[AB] = AB - BA$ двух матриц равен единице. Докажите, что матрицы $A$ и $B$ имеют общий собственный вектор.

Решение. Можно считать, что $\operatorname{Ker} A \neq 0$ (иначе вместо оператора $A$ можно взять оператор $A - \lambda I$).

Доказательство проведем индукцией по $n$ — размерности пространства, в котором действуют операторы. Если $n = 1$, то утверждение очевидно. Пусть $C = [A, B]$. При доказательстве индукционного шага рассмотрим два случая.

**1.** $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} C$. В этом случае $B(\operatorname{Ker} A) \subset \operatorname{Ker} A$, так как если $Ax = 0$, то $Cx = 0$ и $ABx = BAx + Cx = 0$. Следовательно, можно рассмотреть ограничение оператора $B$ на $\operatorname{Ker} A \neq 0$ и выбрать в $\operatorname{Ker} A$ собственный вектор $v$ оператора $B$; вектор $v$ при этом будет также и собственным вектором оператора $A$.

**2.** $\operatorname{Ker} A \not\subset \operatorname{Ker} C$, т.е. $Ax = 0$ и $Cx \neq 0$ для некоторого вектора $x$. Так как $\operatorname{rk} C = 1$, то $\operatorname{Im} C = \langle y \rangle$, где $y = Cx$. Кроме того, $y = Cx = ABx - BAx = ABx \in \operatorname{Im} A$. Следовательно, $B(\operatorname{Im} A) \subset \operatorname{Im} A$. В самом деле, $BAz = ABz - Cz$, где $ABz \in \operatorname{Im} A$ и $Cz \in \operatorname{Im} C \subset \operatorname{Im} A$. По предположению $\operatorname{Ker} A \neq 0$, поэтому $\dim \operatorname{Im} A < n$. Пусть $A'$ и $B'$ — ограничения операторов $A$ и $B$ на $\operatorname{Im} A$. Тогда $\operatorname{rk}[A', B'] \leqslant 1$, а значит, согласно предположению индукции у операторов $A'$ и $B'$ есть общий собственный вектор.

(*В. В. Прасолов*)

5.2. Условие. Али-Баба делит с разбойником 10 куч золотого песку. Али-Баба может в любой момент взять три кучи и уйти, либо он может выбрать 4 любые кучи и разделить каждую из куч на правую и левую часть. Далее разбойник правые части нетождественно переставляет, и затем части объединяются — каждая левая с новой правой.

Сможет ли Али-Баба унести с собой свыше 49 кг золотого песку, если всего было 50 кг?

Решение. Прежде всего, сведем задачу к дискретной. Разделим каждую кучу (с остатком) на мелкие части, размер каждой — $10^{-6}$ от общего количества песка. Остатком пренебрежем, ибо суммарный размер остатков не больше $10 \cdot 10^{-6} = 10^{-5}$ от общего числа песка. Будем рассматривать каждую часть как «монетку» и укажем алгоритм, позволяющий Али-Бабе получить более 99% от общего числа монет.

Алгоритм действий Али-Бабы заключается в следующем:

1. Всякий раз выбираются 4 самых больших кучи.
2. От самой большой откладывается вправо одна монетка, от второй по величине — две, от третьей — три, от четвертой — четыре.
3. Эти правые части разбойник переставляет, после чего происходит слияние.
4. Если указанную процедуру нельзя провести (т. е. в каждой куче, кроме трех максимальных, не больше чем 4 монеты), то Али-Баба спокойно уходит, забирая три максимальных кучи. Разбойнику достаются копейки.

Остается убедиться, что данная процедура заканчивается. В самом деле. За каждый шаг происходит следующее:

а) либо увеличивается максимальная куча,

б) либо не меняется максимальная, но увеличивается вторая по величине,

в) либо не меняются первые две, но увеличивается третья.

Ясно, что шагов первого типа конечное число, а когда они кончатся, будет конечное число шагов второго типа, а когда кончатся эти шаги — то третьего. Поэтому процесс остановится. (*А. Я. Канель*)

5.4. Условие. Отрезок $SP$ соединяет точку $P$ на границе и фокус $S$ эллипса. Точка $R$ лежит на касательной к эллипсу в точке $P$ (достаточно близко к $P$ в направлении приближения к фокусу $S$). Параллельная $SP$ прямая, проходящая через $R$, пересекает эллипс первый раз в точке $Q$. Точка $T$ — основание перпендикуляра, опущенного из $R$ на отрезок $SP$. Найдите

$$\lim_{Q\to P}\frac{QT^2}{RQ}\,.$$

Длины полуосей $a, b$ эллипса считать известными.

Решение. В первом приближении дугу эллипса $QP$ можно заменить соответствующей дугой окружности радиусом кривизны $PC = r$ с центром в точке $C$ (см. рис. 1).

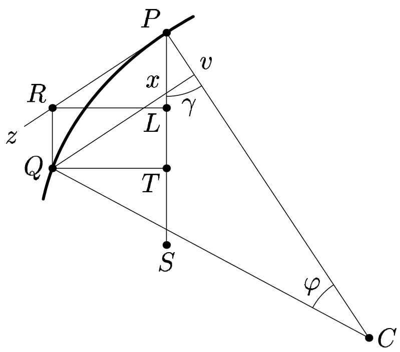



**Рис. 1.**

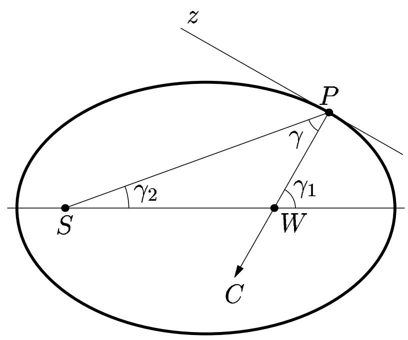



**Рис. 2.**

Проведем $Qv \parallel RP$, $RL \parallel QT$; $PS$ — направление к фокусу, $PC$ — направление к центру кривизны. Угол $\measuredangle SPC = \gamma$ — «направляющий» угол, угол $\measuredangle QCP = \varphi$ — центральный угол.

Из геометрических соображений, принимая в расчет, что $xv \ll Qv$ при $Q \to P$, получим:

$$\lim_{Q\to P}\frac{QT^2}{QR} = r\cos^3\gamma\lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = 2r\cos^3\gamma. \qquad (1)$$

Осталось доказать такую теорему: *произведение радиуса кривизны на третью степень косинуса «направляющего» угла $\gamma$ есть постоянная величина*, т. е.

$$r\cos^3\gamma = \mathrm{const}\,.$$

1. Кривизна $K = 1/r$ определяется как производная наклона касательной к длине дуги $d\alpha/d\ell$, где

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{dy}{dx}; \qquad d\ell = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

После соответствующих преобразований получим:

$$r = \frac{a^2}{b}\left(1-e^2\frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2}, \tag{2}$$

где $e = c/a = \sqrt{a^2-b^2}/a$ — эксцентриситет эллипса.

2. «Направляющий» угол $\gamma$ и его косинус могут быть получены из теоремы о внешнем угле треугольника $SPW$ (см. рис. 2). Точка $W$ находится на большой полуоси эллипса, $\gamma_1$ — угол между нормалью в точке $P$ и большой полуосью эллипса, $\gamma_2$ — угол между отрезком $SP$ и большой полуосью эллипса. Получаем

$$\gamma = \gamma_1 - \gamma_2, \qquad \operatorname{tg}\gamma_1 = -\frac{1}{y'_x}, \qquad \operatorname{tg}\gamma_2 = \frac{y}{x+c}\,.$$

Используя теорему о тангенсе суммы, после преобразований получим:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{c}{b}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,.$$

Отсюда вытекает

$$\cos^3\gamma = \frac{b^3}{a^3}\left(1-e^2\frac{x^2}{a^2}\right)^{-3/2}. \tag{3}$$

Перемножая (2) и (3), получим

$$r\cos^3\gamma = \frac{b^2}{a} = \mathrm{const}\,.$$

После подстановки в (1) получаем искомый предел:

$$\lim_{Q\to P}\frac{QT^2}{QR} = 2\frac{b^2}{a}\,.$$

Эта величина (так называемая latus rectum) не зависит от положения $P$ на эллипсе.

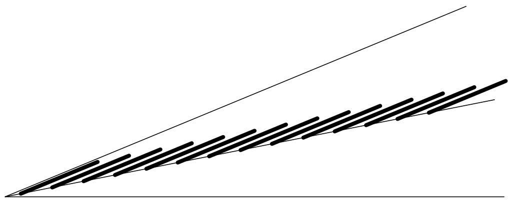
Замечание. Данная задача возникает из вывода Ньютоном силы гравитации, основываясь на первых двух законах Кеплера. Доказательство Ньютона основывается на геометрии Аполлония и чрезвычайно сложно (по свидетельству многих физиков, например, R. Weinstock, Am.J.Phys., vol.40, p.357). (*А. Сендеричин*)

5.8. Условие. Разбейте плоскость на непересекающиеся отрезки равной длины.

Решение. Введем на плоскости комплексную координату. Опишем разбиение индуктивно.

На 0-м шаге возьмем отрезки $[t - i/2, t + i/2)]$, $t \in \mathbb{R}$, образующие горизонтальную полосу, и отрезки $[(-1/2 + iu), (1/2 + iu)]$, $u \in \mathbb{R}$, $|u| > 1/2$, образующие две вертикальные полосы. Дополнение плоскости к объединению этих отрезков — дизъюнктное объединение 4 открытых прямых углов.

Дополнение к объединению отрезков, добавленных на первых $k-1$ шагах, будет дизъюнктным объединением $2^{k+1}$ открытых углов, величина которых $\varphi_{k-1} = \pi/2^k$. Для каждого из таких углов определим отображение на *стандартный угол* $A_k = \{z \mid 0 < \arg z < \pi/2^k\}$, задаваемое сдвигом и поворотом комплексной плоскости: $z \mapsto (z-a)e^{i\alpha}$. На $k$-м шаге в каждый из углов добавляются отрезки, образами которых при отображении на стандартный угол являются отрезки $[te^{i\varphi_k}, te^{i\varphi_k} + e^{i\varphi_{k-1}}]$, $t > 0$. После добавления таких отрезков каждый из углов разбивается на два равных угла. (См. рис., на котором показано разбиение одного из углов на третьем шаге.)



Из построения очевидно, что все использованные отрезки не пересекаются. Осталось показать, что их объединение — вся плоскость.

Каждой точке плоскости сопоставим последовательность $z_k$ положений ее образов в углах $A_k$. Эта последовательность может быть описана индуктивно. Если $\arg z_{k-1} < \varphi_k$, то $z_k = z_{k-1}$. Если $\arg z_{k-1} \geqslant \varphi_k$, то $z_k = (z_{k-1} - e^{i\varphi_{k-1}})e^{-i\varphi_k}$ при условии, что $\operatorname{Re} z_k > 0$; в противном случае $z_{k-1}$ — последний член последовательности (тем самым, точка принадлежит объединению построенных отрезков).

Последовательность $z_k$ не может стабилизироваться, так как $\varphi_k \to 0$ при $k \to \infty$. Но при $z_k \neq z_{k-1}$ выполнено $|z_k| < |z_{k-1}| - 1/2$. Поэтому последовательность $z_k$ не может быть бесконечной.

(*М. Н. Вялый*)