

... об объеме тетраэдра

Р. Травкин

В предыдущем номере («Математическое просвещение», третья серия, вып. 6, с. 132) была приведена¹⁾ следующая формула для объема тетраэдра, которую можно рассматривать как трехмерный аналог формулы Герона. Пусть u, v, w, U, V, W — длины сторон тетраэдра $ABCD$ (см. рис. 1),

$$\begin{aligned} X &= (w - U + v)(U + v + w); & x &= (U - v + w)(v - w + U); \\ Y &= (u - V + w)(V + w + u); & y &= (V - w + u)(w - u + V); \\ Z &= (v - W + u)(W + u + v); & z &= (W - u + v)(u - v + W); \\ a &= \sqrt{xYZ}; & b &= \sqrt{yZX}; & c &= \sqrt{zXY}; & d &= \sqrt{xyz}. \end{aligned}$$

Тогда объем тетраэдра равен

$$\frac{\sqrt{(-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)}}{192uvw}.$$

Ниже приводится предложенное Р. Травкиным доказательство этой формулы. Аналогичное доказательство сообщил также А. Ахметели (akhmeteli@home.demonet.ru).

Обозначим вершины и плоские углы тетраэдра так, как показано на рисунке 1 на с. 186. Используя теорему косинусов, имеем:

$$\begin{aligned} X &= (w - U + v)(U + v + w) = \\ &= (v + w)^2 - U^2 = v^2 + 2vw + w^2 - v^2 - w^2 + 2vw \cos \alpha = \\ &= 2vw(1 + \cos \alpha) = 4vw \cos^2 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Аналогично $Y = 4wu \cos^2 \beta/2$ и $Z = 4uv \cos^2 \gamma/2$. Для x, y, z похожие вычисления дают $x = 4vw \sin^2 \alpha/2$; $y = 4wu \sin^2 \beta/2$; $z = 4uv \sin^2 \gamma/2$.

Подставляя найденные значения для x, y, z, X, Y, Z в формулы для a, b, c, d , получим:

$$\begin{aligned} a &= 8uvw \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}; & b &= 8uvw \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}; \\ c &= 8uvw \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}; & d &= 8uvw \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

¹⁾С. Маркелов узнал эту формулу от знакомых. Приведем ссылку, которая возможно является первоисточником:

Kahan W. What has the volume of a tetrahedron to do with computer programming languages? E-version (draft): <http://www.cs.berkeley.edu/~wkahan/VtetLang.pdf>

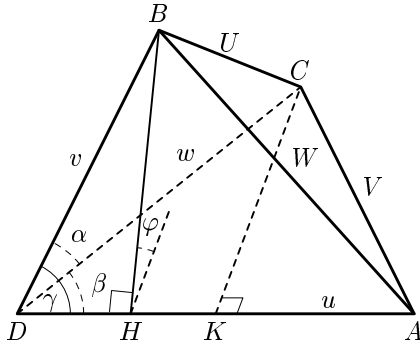


Рис. 1.

Вычислим теперь составляющие формулы объема тетраэдра. Непосредственная проверка показывает, что:

$$\begin{aligned}
 -a + b + c + d &= 8uvw \sin \frac{-\alpha + \beta + \gamma}{2}; & a - b + c + d &= 8uvw \sin \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2}; \\
 a + b - c + d &= 8uvw \sin \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2}; & a + b + c - d &= 8uvw \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, выражение для объема тетраэдра запишется в виде:

$$\begin{aligned}
 \text{Объём} &= \frac{64u^2 v^2 w^2 \sqrt{\sin \frac{-\alpha + \beta + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}}{192uvw} = \\
 &= \frac{uvw}{3} \sqrt{\left(\sin \frac{-\alpha + \beta + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \right) \left(\sin \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \right)} = \\
 &= \frac{uvw}{6} \sqrt{(\cos \alpha - \cos(\beta + \gamma))(\cos(\beta - \gamma) - \cos \alpha)} = \\
 &= \frac{uvw}{6} \sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma)(\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma - \cos \alpha)} = \\
 &= \frac{uvw}{6} \sqrt{\sin^2 \beta \sin^2 \gamma - (\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma)^2}. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Пусть φ — двугранный угол при ребре DA . Из второй теоремы косинусов для трехгранного угла с вершиной D имеем: $\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma = \sin \beta \sin \gamma \cos \varphi$. Поэтому формулу (1) можно переписать в виде:

$$\text{Объём} = \frac{uvw}{6} \sqrt{\sin^2 \beta \sin^2 \gamma - \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi} = \frac{uvw}{6} \sin \beta \sin \gamma \sin \varphi. \quad (2)$$

Обозначив высоту тетраэдра, проведенную из вершины C , через h_C , получаем: $h_C = CK \sin \varphi = w \sin \beta \sin \varphi$; $S_{ABD} = \frac{1}{2} uv \sin \gamma$. По известной формуле, объем тетраэдра равен $\frac{1}{3} S_{ABD} h_C = \frac{1}{6} uvw \sin \gamma \sin \beta \sin \varphi$, что совпадает с доказываемой формулой (2).