
Тема номера: группы отражений

Калейдоскопы и группы отражений

Э. Б. Винберг

Всем известна детская игрушка калейдоскоп (что по-гречески означает «смотрю красивый вид»), в которой разноцветные кусочки стекла, многократно отражаясь в трех зеркалах, создают красивый узор. Зеркала эти расположены как боковые грани правильной треугольной призмы, образуя между собой углы, равные $\pi/3$. Если бы эти углы были другими, то, как правило, отражения накладывались бы друг на друга и не создавали симметричного узора. Однако имеются исключительные случаи, когда этого не происходит. Все они могут быть легко найдены, что и будет сделано в п. 2.1 настоящей статьи.

Описанный выше обычный калейдоскоп по существу двумерен, так как мы видим в нем плоский узор. Можно представить себе трехмерный калейдоскоп как многогранную камеру с зеркальными стенками. Наблюдатель, помещенный в нее, увидит многократные отражения всех находящихся в ней предметов. Как правило, эти отражения будут перекрываться, но имеется несколько случаев (мы их опишем в п. 2.3), когда они не перекрываются и создают симметричный трехмерный узор.

Отбросив в сторону возможность практической реализации, можно говорить и о многомерных калейдоскопах, а также о неевклидовых калейдоскопах, а именно, о калейдоскопах на сфере и в пространстве Лобачевского. Калейдоскопы в евклидовом пространстве и на сфере любой размерности были исчерпывающим образом описаны английским математиком Х. С. М. Кокстером в 1934 г. (см. статью [4] в этом номере журнала). На обложке его переведенной на русский язык популярной книги [1] изображен один из калейдоскопов на обычной (двумерной) сфере (см. рис. 9). Сферические калейдоскопы тесно связаны с правильными многогранниками (см. [5]).

Калейдоскопы на плоскости Лобачевского использовались еще в конце XIX века Ф. Клейном и А. Пуанкаре в их исследованиях по теории автоморфных функций комплексного переменного. В 1958–60 гг. голландский художник М. Эшер создал несколько своих оригинальных картин-узоров на базе этих калейдоскопов (см. рис. 106).

Калейдоскопы в пространстве Лобачевского стали объектом интенсивных исследований начиная с 1965 г. в связи с некоторыми проблемами теории групп. Их полное описание в любой размерности еще далеко от завершения. Имеется удивительный результат (принадлежащий автору статьи) о том, что при $n \geq 30$ в n -мерном пространстве Лобачевского вообще не существует калейдоскопов. Скорее всего, эта оценка не является точной, так как примеры известны лишь при $n \leq 8$.

Помимо уже упоминавшихся приложений калейдоскопов в геометрии (правильные многогранники), теории функций комплексного переменного и теории групп, имеются не менее важные их приложения в теории чисел, теории алгебр Ли, алгебраической геометрии, топологии и других разделах математики.

Следует, впрочем, сказать, что в серьезной математической литературе термин «калейдоскоп» не употребляется. Вместо этого говорят «(дискретная) группа, порожденная отражениями», или просто «группа отражений» (хотя группа состоит не только из отражений). Смысл этого термина будет объяснен ниже.

Более полные сведения о группах отражений можно найти в обзорной статье [2] и в статье [3] из настоящего сборника.

1. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

1.1. Одно зеркало

Что мы видим, глядя в зеркало? Зеркальным изображением точки A является точка A' , симметричная ей относительно плоскости зеркала. Это означает, что независимо от точки зрения, источник света, помещенный в точку A , виден в зеркале так, как если бы он находился в точке A' (см. рис. 1, где изображено сечение плоскостью, перпендикулярной плоскости зеркала и проходящей через точку A и точку зрения O).

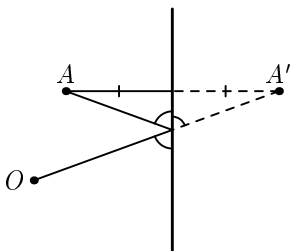


Рис. 1.

Преобразование s , которое каждой точке ставит в соответствие точку, симметричную ей относительно плоскости Π , называется *отражением* относительно Π . Оно является движением (изометрией) пространства, т. е. сохраняет

расстояния между точками. Если считать плоскость Π зеркалом, то мир «зазеркалья» получается из реального мира, находящегося перед зеркалом, применением отражения s и наоборот.

1.2. ДВА ЗЕРКАЛА

Рассмотрим теперь, что можно увидеть в системе из двух зеркал Π_1 и Π_2 , ограничивающих двугранный угол P . Пусть s_1 и s_2 — отражения относительно Π_1 и Π_2 соответственно¹⁾. Изображением зеркала Π_2 в зеркале Π_1 является полуплоскость $s_1\Pi_2$, а изображениями точек, симметричных относительно Π_2 — точки, симметричные относительно $s_1\Pi_2$. Это означает, что в зазеркальном мире (относительно Π_1) полуплоскость $s_1\Pi_2$ является зеркалом изображения отражения s_2 .

Более подробно, в результате двойного отражения луча света сначала в Π_2 , а затем в Π_1 , источник света, помещённый в точку $A \in P$, видится нам в точке s_1s_2A , симметричной точке s_1A относительно $s_1\Pi_2$ (см. рис. 2). Весь угол P в результате двойного отражения видится нам как

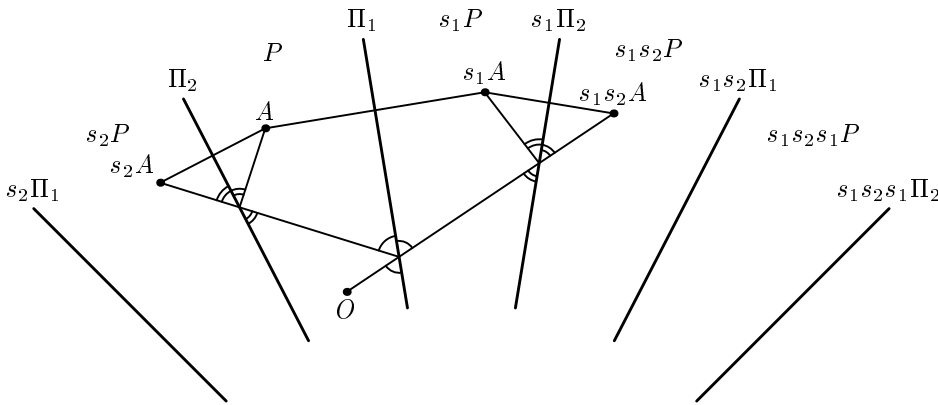


Рис. 2.

угол между полуплоскостью $s_1\Pi_2$ и полуплоскостью $s_1s_2\Pi_1$, симметричной Π_1 относительно $s_1\Pi_2$. В результате тройного отражения угол P видится как угол между полуплоскостью $s_1s_2\Pi_1$ и полуплоскостью $s_1s_2s_1\Pi_2$, симметричной $s_1\Pi_2$ относительно $s_1s_2\Pi_1$, и т. д. (Все полуплоскости Π_1 , Π_2 , $s_1\Pi_2$, $s_1s_2\Pi_1$, ... имеют общий край; на рис. 2 изображено сечение плоскостью, перпендикулярной этому краю.)

Аналогичным образом, глядя в зеркало Π_2 , мы видим изображения s_2P , s_1s_2P , $s_2s_1s_2P$, ... угла P , примыкающие к нему с другой стороны.

¹⁾ Допуская вольность речи, мы говорим об отражениях относительно полуплоскостей, имея в виду отражения относительно содержащих их плоскостей.

Каждая точка угла P' , противоположного P (ограниченного продолжениями полуплоскостей Π_1 и Π_2), «видна» как в зеркале Π_1 , так и в зеркале Π_2 . При этом имеются следующие две принципиально разные возможности.

Если мера α угла P не является целой частью²⁾ π , то, как показано на рис. 3а, изображения угла P , видимые в зеркалах Π_1 и Π_2 , будут перекрываться, так что в одной точке угла P' мы сможем (перемещая точку зрения) увидеть изображения разных точек угла P . Если же α является

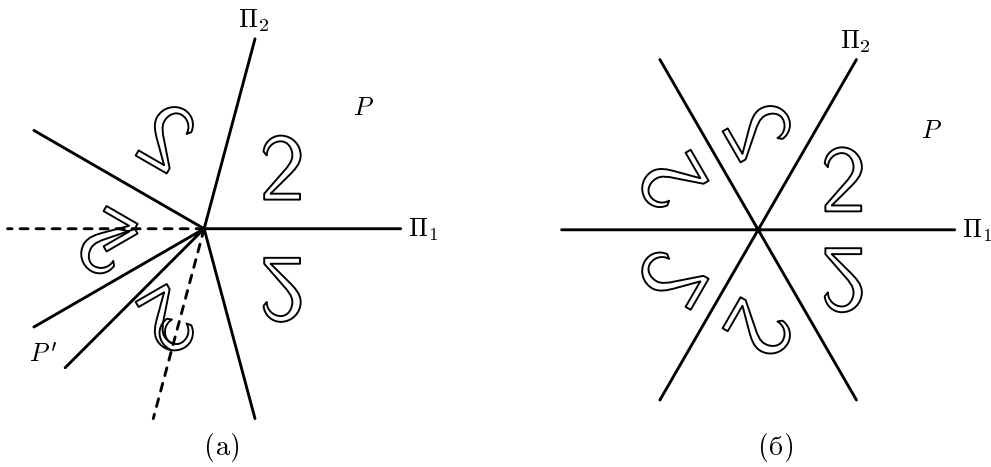


Рис. 3.

целой частью π , как, например, на рис. 3б, то этого не происходит, т. е. картина, которую мы видим, не зависит от точки зрения, как если бы она была реальной, а не созданной многократным отражением относительно зеркал. Это и есть эффект калейдоскопа.

Последнее обстоятельство может быть выражено в терминах умножения преобразований. А именно, пусть $\alpha = \pi/k$, где $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$. Тогда одним из изображений точки $A \in P$ в зеркале Π_1 будет точка

$$\underbrace{s_1 s_2 s_1 \dots}_{k \text{ множителей}} A \in P',$$

а одним из её изображений в зеркале Π_2 — точка

$$\underbrace{s_2 s_1 s_2 \dots}_{k \text{ множителей}} A \in P'.$$

²⁾Под целой частью числа a здесь понимаем число вида $\frac{a}{k}$, где k — натуральное число.

Независимость наблюдаемой картины от точки зрения означает, что

$$\underbrace{s_1 s_2 s_1 \dots}_{k \text{ множителей}} = \underbrace{s_2 s_1 s_2 \dots}_{k \text{ множителей}} \quad (1)$$

С учётом того, что $s_1^2 = s_2^2 = e$ (тождественное преобразование), равенство (1) равносильно равенству

$$(s_1 s_2)^k = e, \quad (2)$$

которое, конечно, верно, так как $s_1 s_2$ есть поворот на $2\pi/k$ вокруг ребра угла P .

Так как изображения каждой точки не выходят за пределы плоскости, перпендикулярной общему краю всех зеркал, то обнаруженное нами явление по существу двумерно. Можно говорить об отражении относительно прямой на плоскости, и рис. 3 демонстрирует, что изображения, полученные многократными отражениями относительно сторон угла, не перекрываются тогда и только тогда, когда величина α этого угла является целой частью π . Более точно, если $\alpha = \pi/k$, где $k \geq 2$ — натуральное число, то вся плоскость оказывается разбитой на $2k$ равных углов с общей вершиной, в каждом из которых получается одно изображение внутренней исходного угла. В половине из этих углов изображения являются зеркально обращёнными, в другой половине, включающей сам исходный угол, — необращёнными.

1.3. МНОГО ЗЕРКАЛ

Представим себе теперь выпуклый многоугольник (многогранник) P с зеркальными стенками. Назовём его *калейдоскопом*, если изображения его внутренности, получаемые многократными отражениями относительно его стенок, не перекрываются или, иначе говоря, если картина, которую видит наблюдатель, находящийся внутри P , не зависит от его положения. Из предыдущего следует, что для этого необходимо, чтобы все (двугранные) углы многоугольника (многогранника) P были целыми частями π . Многоугольники (многогранники), обладающие последним свойством, называются *многоугольниками (многогранниками) Кокстера*. Таким образом, всякий двумерный (трёхмерный) калейдоскоп является многоугольником (многогранником) Кокстера.

Примером многоугольника Кокстера является равносторонний треугольник (все углы которого равны $\pi/3$). Его зеркальные изображения образуют картину, показанную на рис. 4. Именно такую картину мы видим, глядя в обычный калейдоскоп.

Легко перечислить все многоугольники Кокстера (мы это сделаем в п. 2.1) и убедиться, что каждый из них является калейдоскопом в нашем

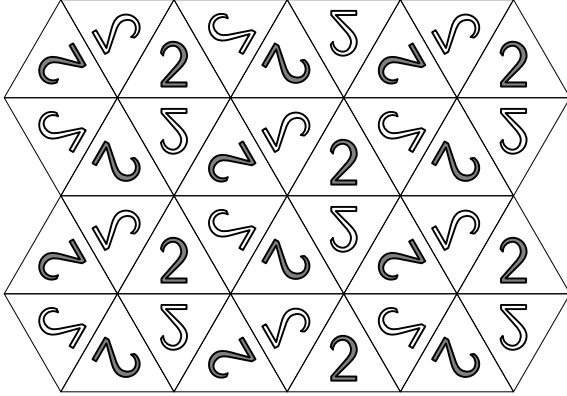


Рис. 4.

смысле. Однако более интересно дать априорное доказательство этого факта, пригодное и для многогранников.

Пусть P — многоугольник Кокстера, $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ — его стороны, s_1, s_2, \dots, s_n — соответствующие отражения. Многоугольники вида $s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_l}P$ (в том числе и сам многоугольник P) будем называть *камерами*.

Выясним, изображение какой точки $A \in P$ мы увидим в заданной точке C плоскости, если будем смотреть из точки $O \in P$. Двигаясь по отрезку OC , мы сначала пересекаем какую-то сторону Π_{i_1} камеры P и попадаем в камеру $P_1 = s_{i_1}P$, симметричную P относительно Π_{i_1} , затем пересекаем какую-то сторону $s_{i_1}\Pi_{i_2}$ этой камеры и попадаем в камеру $P_2 = s_{i_1}s_{i_2}P$, симметричную P_1 относительно $s_{i_1}\Pi_{i_2}$, и т. д.; в конце концов мы попадаем в какую-то камеру $Q = P_l = s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_l}P$, содержащую точку C (см. рис. 5). Пусть $A \in P$ — такая точка, что

$$C = s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_l}A;$$

тогда отрезок OC (проходимый в обратном направлении) является развёрткой траектории луча света, идущего из A и попадающего в O после отражений в сторонах $\Pi_{i_1}, \dots, \Pi_{i_2}, \Pi_{i_1}$ (в указанном порядке). Таким образом, в точке C мы видим изображение точки A .

Что будет происходить при перемещении точки зрения O ? До тех пор, пока отрезок OC не наткнётся на вершину одной из камер P, P_1, \dots, P_{l-1} , последовательность камер P_1, P_2, \dots, P_l и, тем самым, точка A будут оставаться неизменными. При прохождении отрезка OC через вершину D одной из указанных камер мы на некотором участке нашего пути из O в C будем фактически иметь дело с системой из двух зеркал (см. рис. 6). Более точно, пусть угол при вершине D равен π/k ; тогда

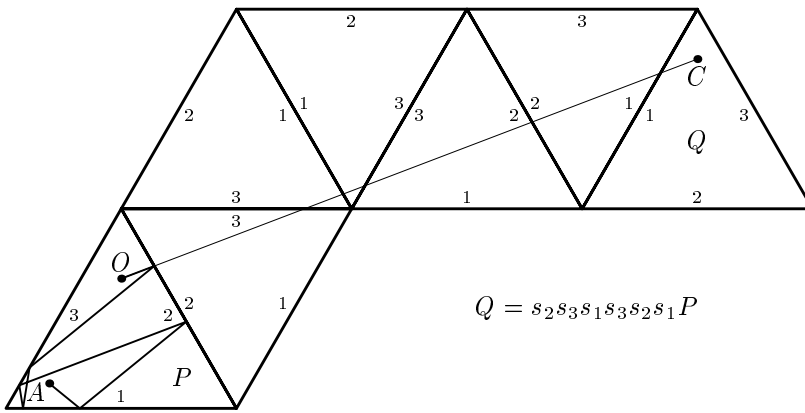


Рис. 5.

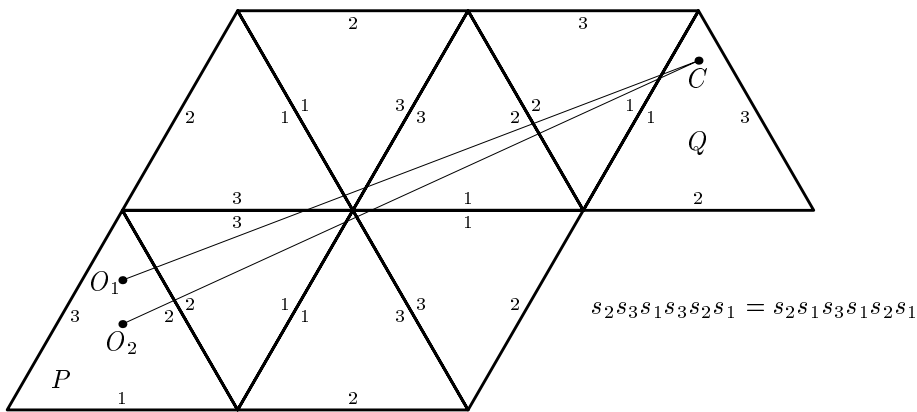


Рис. 6.

в последовательности (i_1, i_2, \dots, i_l) будет присутствовать отрезок вида (i, j, i, \dots) длины k , который после прохождения вершины D заменится на отрезок (j, i, j, \dots) такой же длины; но так как

$$\underbrace{s_i s_j s_i \dots}_{k \text{ множителей}} = \underbrace{s_j s_i s_j \dots}_{k \text{ множителей}},$$

то произведение $s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_l}$, а значит, и точка A не изменятся. Таким образом, P — калейдоскоп.

Точно так же можно доказать, что произведение $s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_l}$ не изменится при перемещении точки C внутри камеры Q . Это означает, что изображение, видимое внутри камеры Q , получается из внутренности камеры P применением движения $s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_l}$. Таким образом, вся плоскость

оказывается разбитой на камеры, внутри каждой из которых мы видим изображение внутренности камеры P .

Аналогично доказывается, что всякий многогранник Кокстера является калейдоскопом. (При этом критическими моментами являются те, когда отрезок OC натывается на ребро одной из камер P, P_1, \dots, P_{l-1} .)

1.4. ГРУППА, ПОРОЖДЁННАЯ ОТРАЖЕНИЯМИ

Совокупность G движений плоскости (пространства) называется *группой*, если

- 1) произведение любых двух движений из G также принадлежит G ;
- 2) движение, обратное любому движению из G , также принадлежит G ;
- 3) тождественное движение принадлежит G .

Пусть P — многоугольник (многогранник) Кокстера и s_1, s_2, \dots, s_m — отражения относительно его сторон (граней) $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$. Очевидно, что совокупность G всевозможных произведений $s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_l}$ (не только полученных описанным в п. 3 способом) является группой; в частности, обратные элементы в силу соотношений $s_i^2 = e$ задаются формулой

$$(s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_l})^{-1} = s_{i_l} \dots s_{i_2} s_{i_1}.$$

Группа G называется *группой, порождённой отражениями* относительно стенок многоугольника (многогранника) P .

Произведения $s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_l}$, получаемые описанным в п. 3 способом (т. е. соответствующие реальным траекториям лучей света в камере P), будем называть *приведёнными*.

Докажем, что приведёнными произведениями на самом деле исчерпывается вся группа G , т. е. любое произведение отражений s_1, s_2, \dots, s_m равно какому-то приведённому.

Рассуждая по индукции, достаточно проверить, что если $s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_l}$ — приведённое произведение, то для любого j произведение $s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_l} s_j$ равно какому-то приведённому произведению.

Будем для определённости говорить о двумерных калейдоскопах; трёхмерный случай ничем принципиально не отличается.

Зафиксируем точку $O \in P$ и рассмотрим камеру $Q = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_l} P$. Пусть H — прямая, проходящая через сторону $s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_l} \Pi_j$ камеры Q . Возможны два случая.

- 1) Камеры P и Q лежат по разные стороны от прямой H (рис. 7а). Тогда точка $C \in Q$ может быть выбрана так, чтобы продолжение отрезка OC пересекало сторону $s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_l} \Pi_j$. Приведённое произведение

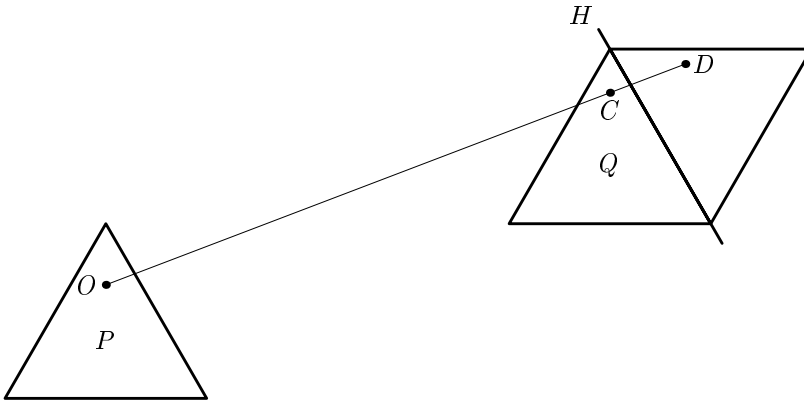


Рис. 7а.

$s_{j_1}s_{j_2} \dots s_{j_l}$, построенное по отрезку OC описанным в п. 3 способом, равно $s_{i_1}s_{i_2} \dots s_{i_l}$, так что

$$(s_{i_1}s_{i_2} \dots s_{i_l})s_j = s_{j_1}s_{j_2} \dots s_{j_l}s_j.$$

Но очевидно, что $s_{j_1}s_{j_2} \dots s_{j_l}s_j$ — это приведённое произведение, соответствующее отрезку OD , где D — любая точка на продолжении отрезка OC , лежащая внутри камеры, симметричной Q относительно H .

2) Камеры P и Q лежат по одну сторону от прямой H (рис. 7б). Тогда точка $C \in Q$ может быть выбрана так, чтобы отрезок OC пересекал сторону $s_{i_1}s_{i_2} \dots s_{i_l}\Pi_j$. Приведённое произведение $s_{j_1}s_{j_2} \dots s_{j_l}$, соответствующее отрезку OC , равно $s_{i_1}s_{i_2} \dots s_{i_l}$; при этом $j_l = j$, так что

$$(s_{i_1}s_{i_2} \dots s_{i_l})s_j = s_{j_1}s_{j_2} \dots s_{j_{l-1}}.$$

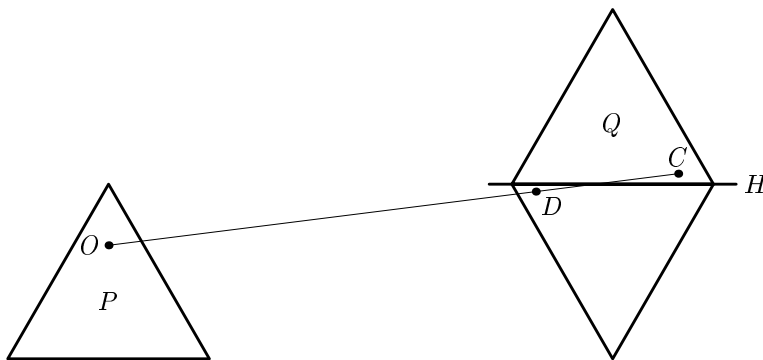


Рис. 7б.

Но $s_{j_1} s_{j_2} \dots s_{j_{l-1}}$ — это приведённое произведение, соответствующее отрезку OD , где D — любая точка отрезка OC , лежащая внутри камеры, симметричной Q относительно H .

Из доказанного следует, в частности, что совокупность всех изображений точки $A \in P$ совпадает с её *орбитой*

$$GA \stackrel{\text{def}}{=} \{gA : g \in G\},$$

так что вся картина, которую мы наблюдаем в нашем калейдоскопе, инвариантна относительно группы G .

1.5. НЕЕВКЛИДОВЫ И МНОГОМЕРНЫЕ КАЛЕЙДОСКОПЫ

Изложенная выше теория в действительности носит более общий характер, так как она не использует всех геометрических свойств евклидовой плоскости или (трёхмерного) пространства. Важно лишь то, что прямая (плоскость) разбивает плоскость (пространство) на две связные компоненты и существует отражение относительно прямой (плоскости) — движение, оставляющее на месте все точки данной прямой (плоскости) и переставляющее связные компоненты дополнения. Всё это имеет место и в двух двойственных друг другу неевклидовых геометриях: сферической геометрии и геометрии Лобачевского. Примеры неевклидовых калейдоскопов будут приведены в следующем параграфе.

Изложенная теория практически без изменений переносится и на евклидовы (и неевклидовы) пространства любой размерности, если под отражением понимать отражение относительно гиперплоскости. Однако в настоящей статье мы ради наглядности ограничиваемся тремя измерениями.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ И ПРИМЕРЫ

2.1. ДВУМЕРНЫЕ КАЛЕЙДОСКОПЫ

Найдем все многоугольники Кокстера на евклидовой плоскости. Как известно, сумма углов евклидова n -угольника равна $\pi(n-2)$, так что среднее арифметическое его углов равно $\pi(1 - \frac{2}{n})$, что при $n = 4$ составляет $\pi/2$. Но все углы многоугольника Кокстера, как явствует из определения, не больше, чем $\pi/2$. Поэтому единственным четырехугольником Кокстера является прямоугольник, а многоугольников Кокстера с большим числом сторон вообще не существует. Далее, так как сумма углов треугольника равна π , то для треугольника Кокстера с углами π/k , π/l , π/m мы получаем диофантово уравнение

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} = 1. \quad (3)$$

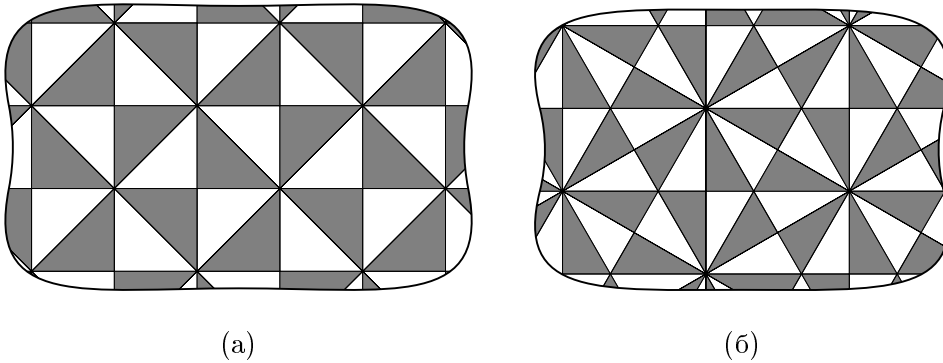


Рис. 8.

С точностью до перестановки чисел k, l, m оно имеет следующие три решения: $(3, 3, 3)$, $(2, 4, 4)$, $(2, 3, 6)$. Таким образом, имеется ровно три треугольника Кокстера: равносторонний, равнобедренный прямоугольный и прямоугольный с острыми углами $\pi/3$ и $\pi/6$. Разбиения плоскости, соответствующие последним двум треугольникам, изображены на рис. 8. Вместе с прямоугольником мы получаем 4 типа двумерных евклидовых калейдоскопов.

Аналогичным образом можно найти все сферические многоугольники Кокстера. Сумма углов сферического треугольника больше, чем π (простое доказательство этого см., например, в [1]) и, следовательно, сумма углов сферического n -угольника больше, чем $\pi(n - 2)$. Поэтому в отношении сферических многоугольников Кокстера наши выводы о числе сторон только усугубляются, а именно, не существует сферических многоугольников Кокстера, отличных от треугольника. Для сферического треугольника Кокстера уравнение (3) заменяется неравенством

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} > 1, \quad (4)$$

имеющим следующие решения: $(2, 2, m)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$. Первому из этих решений отвечает разбиение сферы на $4m$ «бипрямоугольных» треугольников, осуществляемое экватором и $2m$ равноотстоящими друг от друга меридианами. Остальные 3 решения связаны с правильными многогранниками (см. [5]). Разбиение, отвечающее решению $(2, 3, 5)$, изображено на рис. 9.

Что касается многоугольников Кокстера на плоскости Лобачевского, то их гораздо больше. Все, что не может быть реализовано на евклидовой плоскости или на сфере, реализуется на плоскости Лобачевского. А именно, сумма углов n -угольника на плоскости Лобачевского меньше,

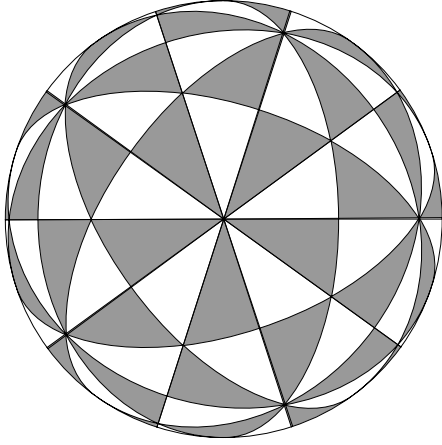


Рис. 9.

чем $\pi(n - 2)$, и для любых натуральных чисел $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 2$, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} < n - 2,$$

на плоскости Лобачевского имеется многоугольник Кокстера с углами $\pi/k_1, \pi/k_2, \dots, \pi/k_n$,

Предыдущее неравенство автоматически выполняется при $n > 4$, а также при $n = 4$, если только $(k_1, k_2, k_3, k_4) \neq (2, 2, 2, 2)$. При $n = 3$ мы получаем следующее неравенство для треугольника Кокстера с углами $\pi/k, \pi/l, \pi/m$:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} < 1. \quad (5)$$

Его решениями являются все тройки (k, l, m) , кроме перечисленных выше решений уравнения (3) и неравенства (4).

Например, на плоскости Лобачевского имеется треугольный калейдоскоп с углами $\pi/2, \pi/4, \pi/6$. Соответствующее разбиение изображено на рис. 10а. При этом использована модель Пуанкаре, в которой плоскость Лобачевского изображается в виде открытого круга, ее прямые — в виде диаметров круга и дуг окружностей, перпендикулярных границе круга, а углы совпадают с евклидовыми. При приближении к границе круга евклидовы размеры треугольников разбиения стремятся к нулю, но их размеры в смысле геометрии Лобачевского, естественно, остаются постоянными. Рис. 10б представляет картину-узор М. Эшера «Небеса и ад», основанную на этом разбиении.

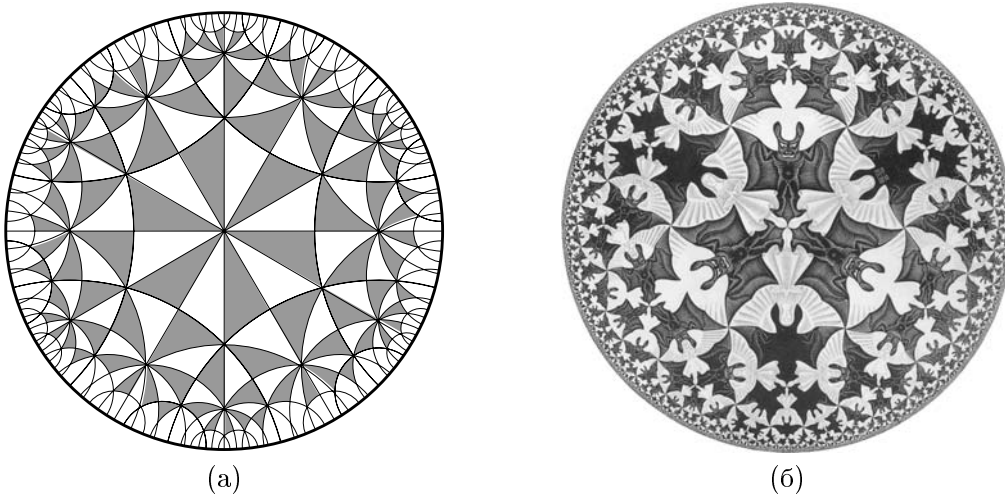


Рис. 10.

2.2. Модулярная группа Клейна

Можно рассматривать так называемые *асимптотические многоугольники* на плоскости Лобачевского, у которых одна или несколько вершин являются бесконечно удалёнными (т. е. в модели Пуанкаре лежат на границе круга). Углы при таких вершинах следует считать равными нулю. Асимптотический многоугольник является калейдоскопом тогда и только тогда, когда все его углы при обычных вершинах суть целые части π . Условие существования выглядит так же, как и для обычных многоугольников.

В частности, на плоскости Лобачевского существует треугольный калейдоскоп с углами $\pi/2$, $\pi/3$ и π/∞ . Соответствующее разбиение изображено на рис. 11а. На рис. 11б то же разбиение показано в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости, которая получается из модели в круге конформным преобразованием. Как в круге, так и в верхней полуплоскости прямые геометрии Лобачевского изображаются интервалами евклидовых прямых и дугами окружностей, перпендикулярных границе. (В случае верхней полуплоскости это вертикальные полупрямые и полуокружности с центром на оси абсцисс.) Отражения относительно прямых, изображаемых интервалами евклидовых прямых, совпадают с евклидовыми отражениями, а отражения относительно прямых, изображаемых дугами окружностей, — это инверсии относительно этих окружностей.

Модель в верхней полуплоскости удобна тем, что в ней очень просто записываются движения плоскости Лобачевского. А именно, если ввести

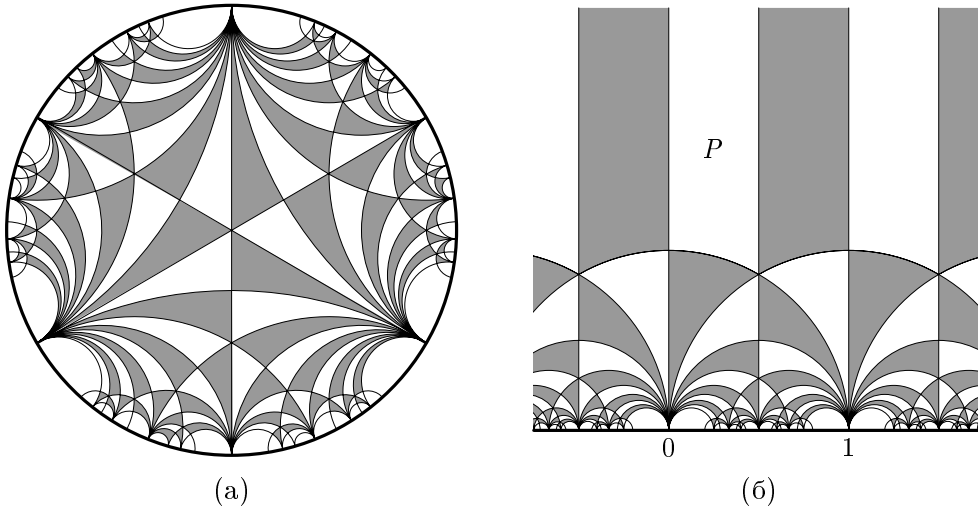


Рис. 11.

комплексную координату $z = x + iy$ (так, что верхняя полуплоскость будет задаваться неравенством $\text{Im } z > 0$), то движения, сохраняющие ориентацию, — это преобразования вида

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1),$$

а движения, меняющие ориентацию, — это преобразования вида

$$z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = -1).$$

Числа a, b, c, d определены с точностью до одновременного умножения на -1 .

Легко проверить, что умножение движений соответствует умножению матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. (Заметим, что $ad - bc$ — это не что иное, как определитель матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.)

Один из треугольников разбиения, показанного на рис. 11б, задаётся неравенствами

$$0 \leq \text{Re } z \leq \frac{1}{2}, \quad |z| \geq 1.$$

Обозначим его через P . Отражения относительно его сторон имеют вид

$$z \mapsto -\bar{z}, \quad z \mapsto 1 - \bar{z}, \quad z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}.$$

Им соответствуют матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Так как эти матрицы целочисленны (т. е. имеют целые элементы), то и все их произведения целочисленны. Опираясь на алгоритм Евклида, можно проверить (попробуйте это сделать!), что всякая целочисленная матрица с определителем ± 1 представляется в виде произведения матриц (6).

Таким образом, группа, порождённая отражениями относительно сторон треугольника P , — это группа всех преобразований вида

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1) \quad (7)$$

и вида

$$z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = -1). \quad (8)$$

Преобразования вида (7) (т. е. сохраняющие ориентацию) образуют в ней подгруппу индекса 2, называемую *модулярной группой Клейна*. Она лежит в основе большой теории, находящейся на стыке теории функций комплексного переменного, теории чисел и теории представлений.

2.3. ТРЕХМЕРНЫЕ КАЛЕЙДОСКОПЫ

Нахождение многогранников Кокстера затрудняется тем, что соотношения между двугранными углами многогранника не столь просты, как соотношение между углами многоугольника. Тем не менее, некоторые простые необходимые условия можно указать сразу. При пересечении выпуклого многогранника P с маленькой сферой с центром в какой-либо его вершине образуется выпуклый сферический многоугольник, углы которого равны двугранным углам многогранника P при соответствующих ребрах. Поэтому, если из вершины выходит q ребер, то сумма двугранных углов при этих ребрах больше, чем $\pi(q - 2)$. Отсюда следует, что если все двугранные углы многогранника P не превосходят $\pi/2$ (например, если он является многогранником Кокстера), то из каждой его вершины выходит только 3 ребра, причем сумма двугранных углов при них больше π . Многогранники, каждая вершина которых принадлежит только 3 ребрам (и, значит, только 3 граням), называются простыми. Так, тетраэдр и куб являются простыми многогранниками, а октаэдр — нет.

Указанными простыми неравенствами, однако, не исчерпываются соотношения между двугранными углами выпуклого многогранника. Рассмотрим простейший случай, когда P — тетраэдр (не обязательно правильный). Занумеруем как-либо его грани и обозначим через $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$

угол между i -ой и j -ой гранями. Средствами линейной алгебры легко доказывается, что эти углы связаны следующим соотношением:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos \alpha_{12} & -\cos \alpha_{13} & -\cos \alpha_{14} \\ -\cos \alpha_{12} & 1 & -\cos \alpha_{23} & -\cos \alpha_{24} \\ -\cos \alpha_{13} & -\cos \alpha_{23} & 1 & -\cos \alpha_{34} \\ -\cos \alpha_{14} & -\cos \alpha_{24} & -\cos \alpha_{34} & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

(Определитель, стоящий в левой части равенства, есть определитель Грама единичных нормальных векторов граней тетраэдра. Его равенство нулю вытекает из линейной зависимости этих векторов.)

Заметим, что точно так же доказывается, что углы α , β , γ треугольника связаны соотношением

$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos \gamma & -\cos \beta \\ -\cos \gamma & 1 & -\cos \alpha \\ -\cos \beta & -\cos \alpha & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Однако это соотношение при условии, что сумма любых двух из углов α , β , γ меньше π , оказывается равносильным тому, что $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. (Попробуйте это доказать!). Что касается соотношения (9), то оно, к сожалению, не приводится к такому простому виду.

Соотношение (9) вместе с неравенствами

$$\begin{cases} \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{14} > \pi \\ \alpha_{21} + \alpha_{23} + \alpha_{24} > \pi \\ \alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{34} > \pi \\ \alpha_{41} + \alpha_{42} + \alpha_{43} > \pi \end{cases}$$

является необходимым и достаточным условием для того, чтобы в евклидовом пространстве существовал тетраэдр с двугранными углами α_{ij} . Пользуясь этим, можно найти все тетраэдры Кокстера в евклидовом пространстве. Их оказывается три. Они изображены на рис. 12, где принято следующее соглашение: двугранные углы при непомеченных ребрах равны $\pi/2$, а при ребрах, перечеркнутых одной или двумя чертами, — $\pi/3$ и $\pi/4$ соответственно. Нетрудно заметить, что первый из тетраэдров плоскостью симметрии разрезается на два тетраэдра, подобные второму, и так же третий тетраэдр получается из второго.

Кроме этих трех калейдоскопов, в евклидовом пространстве имеется еще только четыре калейдоскопа, которые в определенном смысле сводятся к двумерным. Это прямые призмы, в основании которых лежит двумерный калейдоскоп.

Группы отражений в евклидовом пространстве — это 7 из 219 так называемых *кристаллографических групп*, описывающих возможные типы симметрии кристаллических структур. Например, группа симметрии

кристаллической структуры поваренной соли есть группа, порожденная отражениями относительно граней второго из тетраэдров, изображенных на рис. 12. Поместив атомы натрия и хлора в указанных вершинах этого тетраэдра, мы увидим в нашем калейдоскопе кристаллическую структуру поваренной соли. Аналогично, поместив в указанных двух вершинах первого тетраэдра атомы углерода, мы увидим кристаллическую структуру алмаза (но ее группа симметрии несколько больше, чем группа, порожденная отражениями относительно граней этого тетраэдра).

Нетрудно найти также все многогранники Кокстера на трехмерной сфере. Все они являются тетраэдрами (см. доказательство этого в [5]). Равенство (9) заменяется в этом случае неравенством «больше» подобно тому, как при переходе от евклидовой плоскости к сфере сумма углов треугольника становится больше π .

В пространстве Лобачевского равенство (9) заменяется неравенством «меньше». Нетрудно найти все тетраэдры Кокстера в пространстве Лобачевского. Однако в этом случае они составляют лишь ничтожную часть всех многогранников Кокстера. Подобно тому, как на плоскости Лобачевского существуют многоугольники Кокстера со сколь угодно большим числом сторон, в пространстве Лобачевского существуют многогранники Кокстера со сколь угодно большим числом граней. Но, в отличие от многоугольников, они могут иметь весьма сложное комбинаторное строение. Поэтому получить их полное описание непросто.

В той степени, в какой это вообще представляется возможным, это было сделано Е. М. Андреевым в 1970 г. Он доказал общую теорему, относящуюся не только к многогранникам Кокстера, но и ко всем выпуклым многогранникам, двугранные углы которых не превосходят $\pi/2$. Такие многогранники называются *остроугольными* (хотя они могут иметь и прямые двугранные углы). Как мы доказали выше (доказательство не изменяется в случае пространства Лобачевского), всякий остроугольный многогранник является простым.

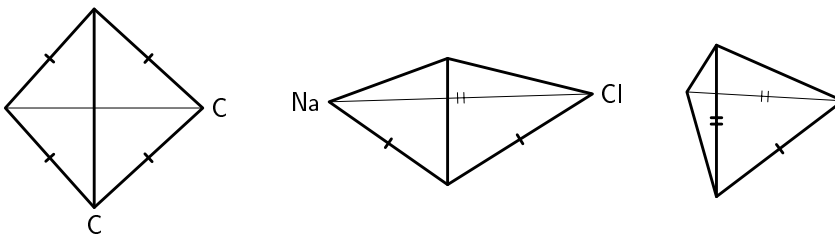


Рис. 12.

Теорема Андреева дает необходимые и достаточные условия существования в пространстве Лобачевского остроугольного простого многогранника заданного комбинаторного строения, отличного от тетраэдра, с заданными двугранными углами. Эти условия суть следующие:

- 1) если какие-либо три грани сходятся в одной вершине, то сумма углов между ними больше π (необходимость этого условия была доказана выше);
- 2) если какие-либо три грани попарно смежны, но не сходятся в одной вершине, то сумма углов между ними меньше π ;
- 3) если какие-либо четыре грани смежны «по кругу» (как боковые грани четырехугольной призмы), то не все углы между ними равны $\pi/2$;
- 4) если многогранник является треугольной призмой, то не все углы, образуемые основаниями с боковыми гранями, равны $\pi/2$.

Теорема Андреева в некотором смысле аналогична знаменитой теореме А. Д. Александрова о существовании евклидова многогранника с данной разверткой. Однако ее точного аналога в евклидовой геометрии нет (и не может быть). Это одна из специфических теорем геометрии Лобачевского, подобно признаку равенства треугольников по трем углам.

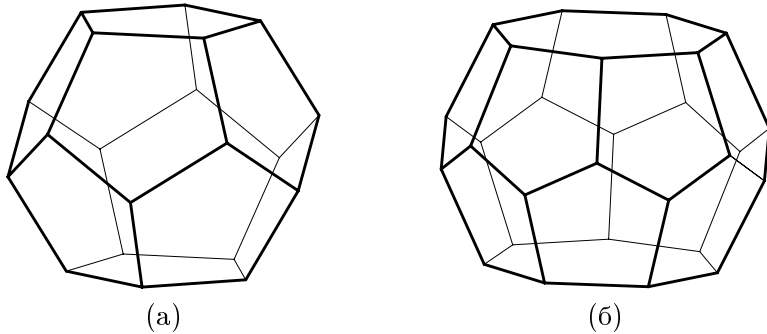


Рис. 13.

С помощью теоремы Андреева нетрудно, например, доказать существование в пространстве Лобачевского «прямоугольных» многогранников (т. е. многогранников, все двугранные углы которых прямые) со сколь угодно большим числом граней. Например, из этой теоремы следует существование прямоугольного додекаэдра (см. рис. 13а). Заменяя две противоположные грани додекаэдра n -угольниками и соответственно изменив число примыкающих к ним пятиугольных граней, мы получим $(2n + 2)$ -гранник (см. рис 13б, где изображен случай $n = 7$). По теореме Андреева

в пространстве Лобачевского существует прямоугольный многогранник такого комбинаторного строения при любом $n \geq 5$.

Начиная с конца XIX века, группы отражений в пространстве Лобачевского применялись к арифметике квадратичных форм, а в последние 20 лет они получили применение в трехмерной топологии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кокстер Г. С. М. *Введение в геометрию*. М.: Наука, 1966. 648 с.
- [2] Винберг Э. Б., Шварцман О. В. *Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1988. Т. 29. С. 147–259.
- [3] Шварцман О. В. *Группы отражений и группы Кокстера* // Математическое просвещение, 2003. Сер. 3. Вып. 7. С. 64–81.
- [4] Бугаенко В. О. *Классификация многогранников Кокстера* // Математическое просвещение, 2003. Сер. 3. Вып. 7. С. 82–106.
- [5] Бугаенко В. О. *Правильные многогранники* // Математическое просвещение, 2003. Сер. 3. Вып. 7. С. 107–116.