Задачный раздел

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Некоторые из этих задач (не обязательно самые сложные!) требуют знания «неэлементарной» математики — анализа, линейной алгебры и т. п.

Составителям этой подборки кажется, что предлагаемые ниже задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим свои собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются). Если автор задачи нам неизвестен, то в скобках указывается «фольклор».

1. Известно, что $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_n$ и $|x_i - y_i| \leqslant \varepsilon$ при всех i; $z_1 \leqslant z_2 \leqslant \dots \leqslant z_n$ — результат переупорядочивания набора $\{y_i\}_{i=1}^n$ в порядке возрастания. Докажите, что $|x_i - z_i| \leqslant \varepsilon$ при всех i.
   (*И. Н. Сергеев*)

2. Допустим, что любую конечную карту на плоскости можно правильно раскрасить в 4 цвета. Докажите, что тогда произвольную карту на плоскости также можно правильно раскрасить в 4 цвета. (Страны можно считать многоугольниками. Раскраска называется *правильной*, если любые две страны с общим участком границы раскрашены в разные цвета.)
   (*А. Я. Белов*)

3. Покажите, что матрицы AA^T и A^TA имеют один и тот же набор ненулевых собственных чисел, где A — прямоугольная матрица, A^T — транспонированная матрица.
   (*А. К. Ковальджи*)

4. $x, y > 0$. Доказать неравенство: $x^y + y^x > 1$.
   (*Фольклор*)

5. а) При каких k через любые k точек плоскости проходит кривая n-го порядка?

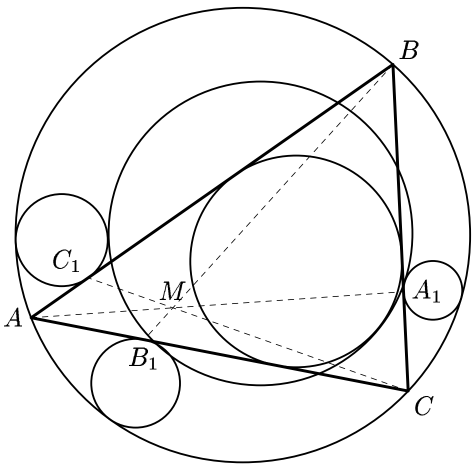
   б) На плоскости отмечено несколько точек. Если окружность проходит через три отмеченные, то она проходит и через четвертую. Докажите, что все отмеченные точки лежат на одной окружности.

в) На плоскости отмечено несколько точек. Если кривая второго порядка проходит через пять отмеченных, то она проходит и через шестую. Докажите, что все отмеченные точки лежат на одной кривой второго порядка. Обобщите это утверждение для кривых n-го порядка. (*А. Я. Белов*)

6. Ломаная L проходит по поверхности куба $n \times n \times n$, разбитой на квадратные клетки со стороной 1, и делит эту поверхность на две части — черную и белую. Вершины L находятся в центрах клеток, а звенья параллельны ребрам куба. При каких n площадь белой части может быть не равна площади черной? (*В. В. Произволов*)

7. W — бесконечное слово (сверхслово), $u \neq v$ — два его различных подслова. Докажите, что имеет место одна из трех возможностей:
   - ▷ Существуют такие s и t, что sut подслово W, а svt — нет.
   - ▷ Сверхслово W содержит сколь угодно большие участки, свободные от вхождения слова u.
   - ▷ Некоторая комбинация букв в сверхслове W повторяется более 1000 раз подряд. (*А. Я. Канель*)

8. Пусть ABC — произвольный треугольник, а M — точка внутри треугольника. Проведем через точку M три чевианы, основания которых — A_1, B_1, C_1. Построим вне треугольника три окружности, касающиеся сторон треугольника в основаниях чевиан и описанной



окружности, и четвертую, касающуюся этих трех внешним образом. Тогда эта окружность касается вписанной окружности треугольника внутренним образом. (*Л. А. Емельянов*)

9. Три человека имеют соответственно по n_1, n_2, n_3 долларов. Каждый бросает монетку и получает результат — «орел» или «решку». Если у одного не тот же результат, что у двух других, то те двое платят ему по доллару. Если же все результаты одинаковы, то деньги не делят, но «такт» игры происходит. Игра кончается, когда у одного из игроков нет больше денег. Подсчитать среднюю продолжительность игры. (*М. Кельберт*)

10. а) В пространстве даны две гладкие поверхности S_1 и S_2, заданные уравнениями $f = 0$ и $f = 1$. Известно, что любую точку поверхности S_1 можно соединить с некоторой точкой поверхности S_2 такой ломаной длины не более 1, которая находится в области $0 < f < 1$ (за исключением начальной и конечной точек). Можно ли установить взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между точками S_1 и S_2 так, чтобы соответствующие точки находились бы на расстоянии меньше 10^6?

    б) Аналогичный вопрос для плоскости. (*А.Я.Белов, Г.В.Кондаков*)

11. Все комплексные корни уравнения $A_0X^n + A_1X^{n-1} + \cdots + A_n = 0$ по модулю строго меньше 1. Последовательность $\{v_k = A_0u_{k+n} + A_1u_{k+n-1} + \cdots + A_nu_k\}$ — сходится. Докажите, что последовательность $\{u_k\}$ тоже сходится. (*Фольклор*)

12. Могут ли 4 квадрата натуральных чисел образовывать арифметическую прогрессию? (*Фольклор*)