Об остроугольных многогранниках

В. О. Бугаенко

Остроугольными называются выпуклые многогранники, все двугранные углы которых острые или прямые.

Остроугольные многогранники в евклидовых и сферических пространствах любой размерности классифицировал Г. С. М. Кокстер [4]. Оказалось, что все они являются симплексами на сферах или произведениями симплексов в евклидовых пространствах. Например, остроугольные многоугольники на евклидовой плоскости могут быть только треугольниками (двумерными симплексами) или прямоугольниками (произведениями двух отрезков — одномерных симплексов). Остроугольные многогранники в трехмерном евклидовом пространстве могут быть только тетраэдрами (трехмерными симплексами), треугольными призмами (произведениями треугольника и отрезка) или прямоугольными параллелепипедами (произведениями трех отрезков).

Классификация многогранников Кокстера в трехмерном пространстве Лобачевского была проведена Е. М. Андреевым [1]; он же доказал, что в пространстве Лобачевского любой размерности гиперплоскости несмежных граней остроугольного многогранника не пересекаются [2]. Последнее утверждение верно также в евклидовых и сферических пространствах: это является очевидным следствием кокстеровской классификации. В настоящей статье мы приведем простое доказательство этого утверждения, не опирающееся на результаты Кокстера и применимое во всех трех типах пространств.

В статье [3] в прошлом выпуске «Математического просвещения» была приведена классификация остроугольных многогранников в евклидовых и сферических пространствах, полученная отличным от использованного Кокстером методом. Этот метод основывался на рассмотрении системы нормалей к граням многогранника. Однако при этом использовалось более сильное определение остроугольного многогранника, а именно, требовалось, чтобы углы между пересекающимися гиперплоскостями его любых, а не только смежных, граней были нетупыми. (Углом между гиперплоскостями граней называется тот из четырех образуемых ими двугранных углов, который содержит внутри себя многогранник.) И хотя это определение равносильно основному (действительно, как уже было упомянуто выше, гиперплоскости несмежных граней остроугольных многогранников не пересекаются), но доказательства равносильности определений, не опирающегося на кокстеровскую классификацию, автору известно не было. Однако вскорости после выхода статьи подтвердилась небезосновательность старой шутки, бытующей в среде московских математиков: чтобы узнать решение математической задачи, нужно предложить ее участникам Московской математической олимпиады. На LXVI ММО в марте 2003 г. школьникам была предложена задача: «У выпуклого многогранника внутренний двугранный угол при каждом ребре острый. Сколько может быть граней у многогранника?». Фактически предлагалось описать трехмерные евклидовы остроугольные (правда, остроугольные в строгом смысле, т. е. не допускающие не только тупых, но и прямых двугранных углов) многогранники. Из упомянутой классификации следует, что такими многогранниками могут быть только тетраэдры, но доказательство этого факта, не использующее общего классификационного результата, отнюдь не просто. Неудивительно, что на олимпиаде задачу решили всего двое участников. Один из них — ученик 11 класса Михаил Раскин — заметил следующее свойство остроугольных многогранников: их проекция на плоскость любой своей грани совпадает с этой гранью. Это свойство может служить еще одним определением остроугольного многогранника, и его использование дает простое доказательство равносильности двух других определений. Это доказательство мы изложим ниже. Для наглядности проведем его для случая трехмерного пространства, заметив лишь, что обобщение доказательства на случай любой размерности получается путем очевидной замены всех трехмерных объектов на их n-мерные аналоги, двумерных — на $(n-1)$-мерные, а одномерных — на $(n-2)$-мерные. Читатель, знакомый с геометрией Лобачевского, заметит, что представленное доказательство применимо не только к случаю евклидовых многогранников, но также и к случаю многогранников в пространстве Лобачевского.

Теорема 1. *Следующие свойства выпуклых многогранников равносильны*:

1. *все двугранные углы нетупые*;
2. *все углы между пересекающимися плоскостями граней нетупые*;
3. *проекция на плоскость любой грани совпадает с этой гранью.*

Доказательство. 2) ⇒ 1). Очевидно.

1) ⇒ 3). Рассмотрим грань F многогранника и двугранные углы при ее сторонах (которые являются нетупыми по условию). Спроектируем каждый из этих углов на плоскость грани F. Эта плоскость является также

плоскостью грани каждого из рассматриваемых двугранных углов. Проекцией нетупого двугранного угла на плоскость своей грани является полуплоскость (сама грань). Поэтому полученные проекции будут являться полуплоскостями, содержащими F; при этом каждая из ограничивающих их прямых содержит по одной стороне грани F. Пересечением этих полуплоскостей будет грань F.

В силу условия выпуклости многогранник содержится в каждом из рассматриваемых двугранных углов, а значит, и в их пересечении. Поэтому его проекция содержится в пересечении проекций этих углов, т. е. в F. Обратное (грань F содержится в рассматриваемой проекции) очевидно.

3) $\Rightarrow$ 2). Предположим противное: угол между плоскостями граней F и F_1 тупой. Тогда проекция любой внутренней точки грани F_1 на плоскость Π грани F лежит по другую сторону от линии пересечения плоскостей этих граней, чем сама грань F. Это противоречит тому, что проекция любой точки многогранника на плоскость Π содержится в F.

Как указал автору Э. Б. Винберг, похожие рассуждения позволяют доказать и более сильный результат — упоминавшуюся выше теорему Андреева. Приведем это доказательство. Опять же ограничимся случаем трехмерного пространства (евклидова или Лобачевского), хотя, как и в предыдущей теореме, доказательство в случае любой размерности принципиально от него не отличается.

Теорема 2. *Плоскости несмежных граней остроугольного многогранника не пересекаются.*

Доказательство. Пусть ℓ — линия пересечения плоскостей граней F и F_1 остроугольного многогранника P. Докажем, что прямая ℓ содержит ребро многогранника P (или, что то же самое, сторону грани F).

Заметим прежде всего, что если прямая ℓ пересекается с отличной от нее прямой m, содержащей некоторую сторону многоугольника F, то образует с ней нетупой угол (среди четырех углов, образуемых парой прямых, мы рассматриваем тот, который содержит F). Действительно, пара прямых ℓ и m образуется при пересечении плоскости грани F многогранника P с парой плоскостей двух других его граней. Поскольку многогранник P остроугольный, попарные двугранные углы, образуемые этими тремя плоскостями, нетупые. Осталось воспользоваться следующей теоремой элементарной стереометрии: если все двугранные углы трехгранного угла нетупые, то и плоские его углы тоже нетупые. Доказательство этой теоремы оставляем в виде упражнения.

Все дальнейшие рассуждения будут планиметрическими: нам не придется выходить за рамки плоскости грани F. Очевидно, что многоугольник F лежит целиком по одну сторону от прямой ℓ, пересекаясь с ней разве что по своим граничным точкам. Спроектируем F на ℓ. Для этого представим F как пересечение всевозможных фигур, имеющих следующий вид: пересечение двух полуплоскостей, одна из которых ограничена прямой ℓ (она одна и та же для всех фигур), а вторая ограничена отличной от ℓ прямой m, содержащей некоторую (каждый раз свою) сторону многоугольника F (во всех случаях из двух возможных полуплоскостей, ограниченных заданной прямой, выбираем ту, которая содержит F). Такая фигура является либо нетупым углом (если прямые ℓ и m пересекаются), либо полосой между двумя непересекающимися прямыми (в противном случае). В обоих случаях фигура обладает следующим свойством: ее проекция на прямую ℓ совпадает с ее пересечением с прямой ℓ (действительно, в первом случае проекция будет лучом — стороной угла, а во втором — прямой ℓ целиком). Легко видеть, что указанное свойство сохраняется при взятии пересечения фигур, поэтому пересечение всех фигур — многоугольник F — также им обладает. Проекция многоугольника на прямую есть отрезок, значит, пересечение F с ℓ — отрезок. Поскольку прямая ℓ не содержит внутренних точек многоугольника F, этот отрезок является его стороной.

Замечание. Для случая сферического пространства приведенные доказательства теорем 1 и 2 напрямую не применимы, поскольку они используют понятие проекции на прямую, которое не всегда определено однозначно (например, невозможно определить проекцию полюса на экватор). Однако сферический случай можно свести к евклидову, так как любой сферический многогранник задает многогранный конус в евклидовом пространстве размерности на единицу больше. Этот конус является евклидовым многогранником. Из справедливости теорем для него следует их справедливость и для исходного сферического многогранника.

Список литературы

[1] Андреев Е. М. *О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского* // Матем. сборник, 1970. Т. 81. №3. С. 445–471.

[2] Андреев Е. М. *О пересечении плоскостей граней многогранников с острыми углами* // Матем. заметки, 1970. Т. 8. №4. С. 521–527.

[3] Бугаенко В. О. *Классификация многогранников Кокстера* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 7. 2002. С. 82–106.

[4] Coxeter H. S. M. *Discrete groups generated by reflections* // Ann. Math., 1934. V. 35. No. 3. P. 588–621.