Хроматическое число плоскости: его прошлое, настоящее и будущее

А. Сойфер
Принстонский университет;
DIMACS (Центр дискретной математики и теоретической информатики), университет Ратгерса;
Университет штата Колорадо в Колорадо-спрингс
asoifer@Princeton.edu asoifer@uccs.edu http://www.uccs.edu/~asoifer/

*Посвящается памяти Пауля Эрдёша
в честь его 90-летия*

1. Постановка задачи

Я не могу предлагать деньги за красивые задачи, придуманные другими людьми, поскольку тогда я, право, разорюсь... Это очень красивая задача. Если бы я ее придумал, я бы предложил за нее 250 долларов.

Пауль Эрдёш
Бока Ратон, февраль 1992 г.

Быть может, высший класс в математике — когда понять задачу может любой, но никто не в силах ее одолеть. Сегодня мы обсудим именно такую задачу. Она сопротивляется всем усилиям уже более 50 лет. Вот она:

> *Какое наименьшее число цветов требуется для раскраски плоскости, при которой не существует отрезка длины* 1 *с концами одного цвета*?

Это число называется *хроматическим числом плоскости* и часто обозначается χ. (В дальнейшем *одноцветной парой* мы будем называть пару точек одинакового цвета.)

Обратите внимание, что рассматриваемые раскраски — не обязательно «правильные», с замкнутыми областями. *Мы раскрашиваем точки плоскости безо всяких ограничений.*

Не знаю, кто первый заметил следующий факт. Может быть, Адам или Ева? Говоря чуть более серьезно, я не думаю, что, например, древнегреческие геометры знали этот красивый факт. Они просто не задавали таких вопросов!

Задача 1. (Адам или Ева?) Если плоскость раскрашена в два цвета, то она содержит одноцветную пару на расстоянии 1, т. е. $\chi \geqslant 3$.

Решение. Бросим на данную плоскость, раскрашенную в два цвета, равносторонний треугольник T со стороной 1 (рис. 1). Цветов два, а вершин у треугольника три (надеюсь, что вы не забыли принцип Дирихле). Две вершины должны иметь одинаковый цвет. Расстояние между ними равно 1. $\square$

Задача 2. Если плоскость раскрашена в три цвета, то она содержит одноцветную пару на расстоянии 1, т. е.

$$\chi \geqslant 4.$$

Решение канадских геометров, братьев Лео и Уильяма Мозер (1961, [35]). На плоскость, раскрашенную в три цвета, бросим *мозеровское веретено*, т. е. фигуру, изображенную на рис. 2. Каждое ребро веретена имеет длину 1.

Предположим, что из семи вершин веретена нельзя выбрать одноцветную пару на расстоянии 1. Будем считать, что плоскость раскрашена в красный, белый и синий цвета. Решение по существу следует детской песенке «A B C D E F G...».

Пусть точка A красная. Тогда среди точек B и C одна белая и одна синяя, поэтому точка D красная. Аналогично среди точек E и F одна белая и одна синяя, поэтому точка G красная. Получаем одноцветную пару на расстоянии 1 вопреки нашему предположению. $\square$

Замечание. Веретено Мозера позволило решить задачу 2 благодаря тому, что среди любых трех его вершин найдутся две на расстоянии 1

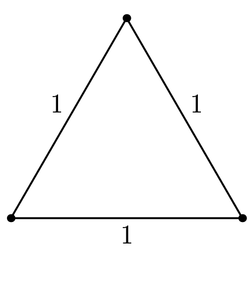

Рис. 1.

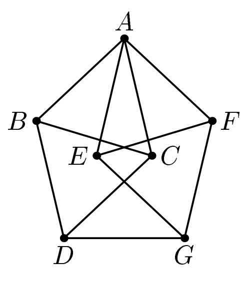

Рис. 2.

друг от друга. Как следствие, если в веретене нет одноцветной пары на расстоянии 1, то не более двух его вершин могут иметь одинаковый цвет. Запомним это наблюдение: оно пригодится нам позже.

Существует ли верхняя граница для χ? Сразу это не очевидно. Можете ли вы указать такую границу? Естественно было бы рассмотреть покрытие плоскости правильными многоугольниками — и это, действительно, помогает!

Задача 3. Существует раскраска плоскости в 7 цветов, не содержащая одноцветной пары на расстоянии 1, т. е.

$$\chi \leqslant 7.$$

Решение ([23]). Замостим плоскость правильными шестиугольниками со стороной 1. Покрасим один из шестиугольников в цвет номер 1, а шесть его соседей — в цвета с номерами $2, 3, \dots, 7$ (рис. 3). Получившийся «цветок» — симметричный 18-угольник P. Его сдвиги (точнее, его образы при параллельных переносах) покрывают плоскость и определяют ее раскраску в 7 цветов.

Легко можно вычислить (советуем проделать это), что не существует одноцветных пар на расстоянии d при

$$2 < d < \sqrt{7}.$$

Если теперь сжать все линейные размеры, скажем, в 2,1 раза, то мы получим раскраску плоскости в 7 цветов, не имеющую одноцветных пар на

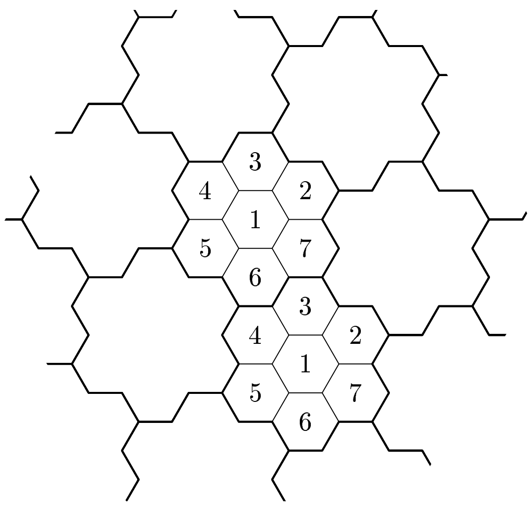

Рис. 3.

расстоянии 1. (Отметим, что в силу полученного неравенства у нас достаточный выбор, так что не имеет значения, в какой из двух прилегающих цветов покрашены границы шестиугольников.) □

В 1982 г. венгерский математик Ласло Секей сумел получить верхнюю границу для χ, не используя покрытие плоскости шестиугольниками.

Второе решение задачи 3 ([54]). (Чертеж из этой статьи требует небольшой поправки, и нужно указать раскраску границ, что я и делаю здесь.)

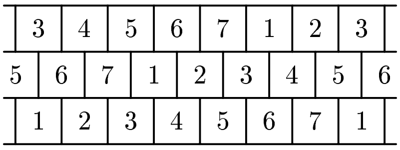

Рис. 4.

На рис. 4 мы строим цепочку квадратов с диагональю длины 1 и красим их в семь последовательно чередующихся цветов. Затем получаем новые цепочки раскрашенных квадратов, сдвигая предыдущую цепочку вправо на 2.5 стороны квадрата. Верхняя и правая границы квадрата имеют его цвет, за исключением верхнего левого и правого нижнего угла. □

В задаче 2 решение с веретеном также не единственное известное. Ниже приведено «фольклорное» решение, историю которого я проследил вплоть до Соломона Голомба, известного изобретателя полимино.

Второе решение задачи 2 (С. Голомб, частное сообщение). На плоскость, раскрашенную в три цвета (красный, белый и синий), бросим граф с ребрами длины 1, представленный на рис. 5; естественно будет назвать его *графом Голомба.* Допустим, что в нем никакие две вершины одного цвета не соединены ребром. Центральную вершину покрасим в красный цвет. Она соединена ребрами со всеми вершинами правильного шестиугольника H, и потому все эти вершины следует покрасить в белый и синий цвет поочередно. Все вершины равностороннего треугольника T соединены ребрами с тремя вершинами шестиугольника, покрашенными в одинаковый цвет — скажем, белый. Но тогда T не может иметь белых вершин; все они — красные или синие, и потому две вершины должны быть одинакового цвета. Это противоречие показывает, что тремя цветами нельзя правильно раскрасить десять вершин графа Голомба, а тем более всю плоскость. □

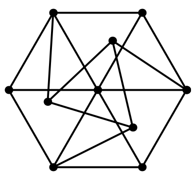

Рис. 5.

Поразительно, что довольно легкие задачи 2 и 3 приводят к наилучшим границам для χ, известным сегодня. Они были *опубликованы* свыше 40 лет назад (на самом деле они еще старше: см. исторический очерк в следующем параграфе). Однако до сих пор мы знаем лишь, что

$$\chi \text{ равно } 4,\ 5,\ 6 \text{ или } 7.$$

Весьма широкий промежуток! Чему же равно χ по вашему мнению? Пауль Эрдёш говорил мне, что наверняка $\chi \geqslant 5$.

В 1992 г. известный американский геометр Виктор Кли поведал мне занятную историю. В 1980–1981 г. он читал лекции в Швейцарии. Их посещал прославленный алгебраист Бартель Л. ван дер Варден, которому было около 80 лет. Когда профессор Кли рассказал о ситуации с нашей задачей, ван дер Варден очень заинтересовался и там же, прямо во время лекции занялся этой задачей. Он попытался доказать, что $\chi = 7$!

Пауль Эрдёш был уверен, что $\chi \geqslant 5$. Он любил говорить, что «*у Бога есть бесконечная Книга, содержащая все теоремы и их лучшие доказательства, и если Он благоволит к кому-либо, то на мгновение показывает ему Книгу*» [11]. Если бы я заслужил такую честь и имел выбор, то попросил бы дать взглянуть на страницу, посвященную хроматическому числу плоскости. А вы бы не попросили?

2. Взгляд в историю

Давно поставленная открытая проблема Эрдёша...

Хэлард Крофт, 1967

Не могу проследить происхождение этой задачи

Пауль Эрдёш, 1961

Часто бывает легче установить что-нибудь из истории древнего Египта, чем происшедшее с нашими современниками

Николаас Говерт де Брёйн,
Эйндховен, 5 июля 1995; электронное письмо А. Сойферу

Это было давно и неправда

Старинная русская шутка

Вполне естественно, что человек пытается выяснить происхождение своей любимой задачи. И я погрузился в тонны статей и книг. Часть найденных мной сведений представлена в таблице 1. Вы ошеломлены? Я тоже был ошеломлен!

Как видно из таблицы, Дуглас Вудолл ссылается на Мартина Гарднера, который в свою очередь упоминает Лео Мозера. Хэлард Крофт называет задачу «давно поставленной открытой проблемой Эрдёша», а сам Пауль Эрдёш «не может проследить происхождение этой задачи»! Позже он ссылается на «Хадвигера и Нельсона», а Вик Кли и Стэн Вэйгон пишут, что эта задача «была поставлена в 1960–61 гг. М. Гарднером и Хадвигером». Вновь появляется Крофт, и на этот раз Кеннет Фальконер и Ричард Гай вместе с ним осторожно предполагают, что постановка задачи, «очевидно, принадлежит Э. Нельсону» [3]. При этом Ричард Гай не смог сказать мне, кто такой «Э. Нельсон» и почему Гай и компания «с очевидностью» приписали ему эту задачу.

Таким образом, в связи с нашей задачей упоминаются не менее как пять математиков: Пауль Эрдёш, Мартин Гарднер, Гуго Хадвигер, Лео Мозер и Эдвард Нельсон. Какое выдающееся общество! Но трудно поверить, что все они придумали эту задачу, даже независимо. Я чувствовал себя как частный детектив, распутывающий хитросплетение противоречивых сведений. Через шесть месяцев я разгадал загадку! Хотел бы поблагодарить многих математиков, внесших свой вклад в это. Особой благодарности заслуживают Пауль Эрдёш, Виктор Кли, Мартин

Публикация	Год	Автор(ы)	Указание на автора или источник задачи
[19]	1960	Гарднер	«*Лео Мозер* ... пишет ...»
[23]	1961	Хадвигер (со ссылкой на Кли)	*Нельсон*
[5]	1961	Эрдёш	«Не могу проследить происхождение этой задачи»
[2]	1967	Крофт	«Давно поставленная открытая проблема *Эрдёша*»
[57]	1973	Вудолл	*Гарднер*
[8] [9] [10]	1980 – 1981	Эрдёш	*Хадвигер* и *Нельсон*
[3]	1991	Крофт, Фальконер и Гай	«Очевидно, принадлежит *Э. Нельсону*»
[34]	1991	Кли и Вэйгон	«Задача поставлена в 1960–61 *М. Гарднером* и *Хадвигером*»

Табл. 1. *Кто придумал задачу о хроматическом числе плоскости?*

Гарднер, Эдвард Нельсон и Джон Избелл. Разгадка стала возможной лишь благодаря их сообщениям, воспоминаниям и сотрудничеству.

Автор задачи родился 4 мая 1932 г. в Декейтуре, Джорджия. Сын секретаря итальянского отделения YMCA[1)], Джозеф Эдвард Нельсон учился в лицее (итальянской приготовительной школе) в Риме. В 1949 г. Эд вернулся в США и поступил в Чикагский университет. Дальновидный президент университета Роберт Хатчинс позволял студентам сокращать время пребывания в университете за счет сдачи обширных экзаменов. Эд Нельсон сдал их настолько хорошо, что был допущен к выполнению магистерской программы без прохождения бакалавриата. Журнал Time сообщил 26 декабря 1949 г. о блестящих успехах юного Нельсона на 14 (!) экзаменах.

Следующей осенью 18-летний Эдвард Нельсон придумал то, что он назвал «второй проблемой четырех красок» (в своем письме ко мне от 5 октября 1991 г. [37]):

> «Дорогой профессор Сойфер,
> осенью 1950 года я был студентом Чикагского университета и среди прочего интересовался проблемой четырех красок, т. е. проблемой раскраски графов, допускающих топологическое вложение в плоскость. Такие графы можно изобразить как узлы, соединенные проволочками. Я задался вопросом, нельзя ли представить достаточно богатый подкласс таких графов как подграфы одного большого графа, который можно раскрасить раз и навсегда — например, графа всех точек плоскости, находящихся на расстоянии 1 друг от друга (тогда «проволочки» становятся жесткими, прямыми, одинаковой длины, но могут пересекаться). Эта идея не осуществилась, однако новая задача представляла самостоятельный интерес, и я сообщил о ней нескольким людям.»

Одним из этих людей был Джон Избелл. Он до сих пор весьма живо вспоминает об этом (письмо ко мне от 26 августа 1991 г. [30]):

> «Эд Нельсон рассказал мне задачу и оценку $\chi \geqslant 4$ в ноябре 1950 г., если не в октябре — мы встретились в октябре. Я спросил, какую он знает верхнюю оценку. Он ответил, что никакой, и тогда я нашел оценку 7. Я был тогда на последнем курсе (и в 1951 г. получил степень бакалавра естественных наук). По-моему, Эд как раз тогда номинально стал второкурсником Чикагского университета и сдал экзамены, которые сразу поставили его впереди меня: его можно было сравнить с аспирантом первого года, имеющим один или два пробела в своей подготовке. Несомненно, в 1950 – 1957 гг. я обсуждал задачу с другими людьми. Один из них — Хью Спенсер Эверетт III, автор

[1)] Ассоциация христианской молодежи.

> интерпретации квантовой механики в терминах множества миров, а другой — Элмер Джулиан Броди, который писал диссертацию под руководством Фокса; он долго находился в Китайском университете Гонконга и, говорят, занялся классической китайской литературой. В 1958±1 г. я говорил об этой задаче с Виком Кли...»

Виктор Кли также вспоминал, что слышал об этой задаче от Джона Избелла в 1957–1958 г. Затем профессор Кли уехал в Европу (1958 г.), где он сообщил эту задачу Гуго Хадвигеру, собиравшему материал для книги «Открытые проблемы интуитивной геометрии», которую предполагали написать совместно Эрдёш, Фейеш Тот, Хадвигер и Кли (этот великий проект так и не осуществился).

Каковы роли Пауля Эрдёша, Мартина Гарднера и Лео Мозера в истории нашей задачи? Предоставляю другим ответить на единственный вопрос: когда и как познакомился с этой задачей Лео Мозер. Несомненно, он не придумывал ее независимо от Эдварда Нельсона (письмо Пауля Эрдёша ко мне от 16 июля 1991 г. [13]):

> «Не помню, говорил ли мне Мозер в 1958 г., каким образом он услышал про задачу о хроматическом числе плоскости. Помню только, что это была не его задача.»

Однако Лео Мозер оказал существенное влияние на дальнейшую судьбу этой задачи. Он дал ее Паулю Эрдёшу и Мартину Гарднеру. Последний благодаря своему безупречному вкусу осознал ее ценность и включил в свою колонку «Математические игры» в журнале «Сайентифик Американ» ([20]) с благодарностью Лео Мозеру из университета Альберты, от которого узнал эту задачу. Таким образом, честь ее первой *публикации* принадлежит Мартину Гарднеру. Не берусь судить, почему столь многие авторы статей и книг с 1973 по 1991 год приписывают Гарднеру честь *создания* задачи, чего он сам никогда не утверждал.

При этом некоторые авторы (например, Виктор Кли и Стэнли Вэйгон), знавшие о роли Нельсона, всё же указывали Гарднера и Хадвигера как авторов, поскольку они признают только письменное слово, преимущественно опубликованное.

Конечно, отдельное изолированное высказывание — слишком слабая основа для установления исторической истины. С другой стороны, такую основу — в не меньшей степени, чем публикация — составляют независимые объективные свидетельства, подтверждающие друг друга. Именно это и стало результатом моих изысканий. Вот лишь один пример объективности Нельсона и Избелла. 23 августа 1991 г. Эдвард Нельсон писал мне [36]:

> «Что касается этой задачи, то я не доказал ничего...»

Джон Избелл поправил Нельсона в письме ко мне от 3 сентября 1991 г. [31]:

> «Процитированное вами утверждение Эда Нельсона: „Что касается этой задачи, то я не доказал ничего... “ вызвано лишь забывчивостью. Он доказал мне, что обсуждаемое число не меньше четырех, используя рассуждение как в работе Хадвигера 1961 года. Когда Хадвигер приписывает это неравенство мне (со ссылкой на Кли), то это ошибка — либо Хадвигера, либо Кли.»

Всё это приводит нас к вопросу об авторстве неравенств

$$4 \leqslant \chi \leqslant 7.$$

И снова все источники дружно приписывают честь первых доказательств Хадвигеру и Мозерам. Да, в 1961 г. известный швейцарский геометр Гуго Хадвигер опубликовал ([23]) задачу о хроматическом числе плоскости вместе с доказательствами обоих неравенств. Но он пишет (и никто не читает!):

> «Мы благодарны мистеру В. Л. Кли (Сиэттл, США) за следующую информацию. Задача поставлена Э. Нельсоном; неравенства принадлежат Дж. Избеллу.»

И Хадвигер продолжает: «Несколько лет назад автор (т. е. Хадвигер) обсуждал с П. Эрдёшем вопросы такого рода.» Означает ли это, что он думал над задачей независимо от Нельсона? Мы никогда этого не выясним точно, но у меня есть сомнения. В 1955 г. Хадвигер вместе с Дебруннером опубликовал великолепную большую проблемную статью [24], которая в 1959 г. выросла в их замечательную книгу [25]; в 1964 г. вышел английский перевод Виктора Кли [27], а в 1965 — русский перевод [26] под редакцией Исаака Яглома. Все эти книги (и другие работы Хадвигера) содержат множество «вопросов такого рода», но только не задачу о хроматическом числе плоскости. Кроме того, мне кажется, что эта задача не подходит Хадвигеру «по характеру»: во всех подобных случаях он предпочитал рассматривать замкнутые, а не произвольные множества.

Своими сомнениями насчет независимого авторства Хадвигера я поделился с Паулем Эрдёшем. Это было особенно важно, поскольку Хадвигер ссылается на свидетельство Эрдёша (см. предыдущий абзац). Пауль ответил так (письмо ко мне от 16 июля 1991 г. [13]):

> «Я встречался с Хадвигером лишь после 1950 г. и потому полагаю, что приоритет принадлежит Нельсону (Хадвигер умер несколько лет назад, так что я не могу его спросить, но я думаю, что ситуация очевидна.)»

В своем выступлении на 25-й Юго-восточной международной конференции по комбинаторике, информатике и теории графов в Бока Ратон, Флорида (10 марта 1994 г.) Пауль подвел итог моим изысканиям в своем неповторимом стиле:

> «Есть математик по фамилии Нельсон, который в 1950 году, будучи в возрасте эпсилон, то есть 18 лет, поставил следующий вопрос. Допустим, вы соединили всевозможные точки плоскости, находящиеся на расстоянии 1 друг от друга. Получился бесконечный граф. Каково хроматическое число этого графа?
>
> [...]
>
> Эту задачу тоже часто приписывают мне. Бесспорно, я не имею к ней отношения. Впервые я узнал про задачу о хроматическом числе плоскости зимой 1958 г., когда посетил [Лео] Мозера. Он не сказал мне, откуда появились эта и другие задачи. Ее приписывали и Хадвигеру, но тщательное исследование Сойфера показало, что на самом деле она принадлежит Нельсону.»

Теперь мы можем, наконец, воздать должное Эдварду Нельсону, который первым доказал в 1950 г. нижнюю оценку $4 \leqslant \chi$. Как вспоминает Джон Избелл в письме ко мне [30], Нельсон, имея в виду эту оценку, «любил называть [свою задачу] второй проблемой четырех красок!»

Два известных канадских специалиста по задачам (problem people), братья Лео и Уильям Мозеры, также опубликовали в 1961 г. [35] доказательство нижней оценки $4 \leqslant \chi$ в связи с решением другой задачи. На мой взгляд, оба доказательства не отличаются, однако применение Мозерами конечного множества, ныне называемого веретеном Мозера, оказалось очень эффективным.

Джон Избелл первым доказал в 1950 г. верхнюю оценку $\chi \leqslant 7$. Он применил ту же шестиугольную раскраску плоскости в 7 цветов, которую опубликовал Хадвигер в 1961 г. [23]. Уместно отметить, что Хадвигер впервые применил такую раскраску в 1945 г. [22], но в другой задаче: он хотел показать, что существует замкнутое множество, которое не реализует все расстояния (см. определение ниже в разд. 3), а семью его сдвигами[2)] можно покрыть всю плоскость (он также доказал, что пятью сдвигами замкнутого множества, не реализующего все расстояния, нельзя покрыть плоскость). Сейчас профессор Джон Избелл работает в государственном университете штата Нью-Йорк в Буффало.

Пауль Эрдёш внес двоякий вклад в историю задачи о хроматическом числе плоскости. Во-первых, Эрдёш «разжег пламя» этой задачи, как это сделал Огастес де Морган в отношении проблемы четырех красок. Эрдёш сделал задачу о хроматическом числе плоскости хорошо известной, упоминая ее в своих бесчисленных докладах и во многих публикациях, например [5], [6], [7], [8], [10], [9] и [15].

Во-вторых, Эрдёш придумал множество популярных родственных задач. Одну из них мы обсудим в следующем разделе.

[2)]Напомним, что сдвиг — это образ множества при параллельном переносе.

Был получен ряд результатов при дополнительных ограничениях на монохроматические множества, т. е. множества точек одного цвета (см. обзоры в [34], [3] и [44]). Например, К. Фальконер показал [18], что

Число χ не меньше пяти, если монохроматические множества измеримы по Лебегу.

Для решения задачи о хроматическом числе плоскости применялись всевозможные средства: комбинаторика, теория графов, топология, абстрактная алгебра, теория меры и т. д. Но задача в общей формулировке, к удивлению, выдержала все атаки, и область значений для χ остается удручающе широкой — от 4 до 7. Почему на протяжении 53 лет задача не поддается никаким усилиям? В разделе 6 высказано предположение на этот счет; он возникло в итоге совместной работы автора с Сахароном Шелахом.

Профессор Эдвард Нельсон с 1959 г. постоянно работает в Принстонском университете; главные области его интересов — анализ и логика. Несколько лет назад он избран в Национальную академию наук. Профессору Нельсону сейчас 71 год; проведя год (2003 г.) в Принстоне, я стал его близким другом. В октябре 2003 г. меня пригласили выступить в Принстоне на тему хроматического числа плоскости. Я посвятил свой доклад «Эдварду Нельсону, который придумал эту знаменитую задачу к нашей общей радости». Это был итог моих 12-летних занятий этой задачей. Выступление было для меня особенно важно, поскольку на нем присутствовал Эдвард Нельсон.

Замечание. К сожалению, неточные ссылки на авторство этой задачи продолжают встречаться в литературе. Примером служит обзор А. М. Райгородского «Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств» (УМН, том 56, вып. 1, 2001, с. 107–146). Хотя автор и упоминает мою работу [43], но тем не менее приписывает постановку задачи о хроматическом числе плоскости «Нельсону и Избеллу и (независимо) Эрдёшу и Хадвигеру».

3. Полихроматическое число плоскости и результаты, близкие к верхней границе

Когда важная проблема сопротивляется всем атакам, математики придумывают множество родственных проблем. Это дает им возможность решить что-нибудь... Иногда этот процесс приносит реальную пользу: размышления над родственной задачей открывают новые способы одолеть исходную. В связи с хроматическим числом плоскости было поставлено много задач. Теми, которые больше всего мне нравятся, я хотел бы поделиться с вами.

Введем удобный термин: раскрашенное множество S *реализует расстояние* d, если S содержит одноцветную пару на расстоянии d.

Первое упоминание о задаче, рассматриваемой ниже, сделано в 1959 г. в знаменитой книге Гуго Хадвигера [25] и, соответственно, в ее переводах [26] и [27]. Хадвигер сообщает в этой книге, ссылаясь на венгерского математика А. Хеппеша, что Пауль Эрдёш поставил следующий вопрос: если плоскость разбита на три непересекающихся подмножества, то всегда ли верно, что одно из подмножеств реализует все расстояния. Вскоре задача приобрела свой нынешний «облик». Вот он:

> *Какое наименьшее число цветов требуется для раскраски плоскости, при которой никакой цвет не реализует все расстояния?*

Этому числу следовало дать имя, и в 1992 г. [44] я назвал его *полихроматическим числом плоскости* и обозначил χ_p. Название и обозначение оказались столь естественными, что сейчас они уже стали стандартными и применены в столь значительных книгах, как [33] и [21].

Так как я считал эту открытую проблему очень важной, то попросил Пауля Эрдёша подтвердить его авторство, вскользь упомянутое Хадвигером. Как всегда, Пауль в своем письме ко мне от 16 июля 1991 г. [13] был искренен и скромен:

> Я даже не вполне уверен, что я — автор этой задачи: найти наименьшее число цветов для раскраски плоскости, при которой никакой цвет не реализует все расстояния. Но если этому ничто явно не противоречит, то можно пока это предположить.

В задаче о хроматическом числе плоскости мы искали раскраски, при которых никакой цвет не реализует расстояние 1. В задаче о полихроматическом числе мы раскрашиваем плоскость так, что каждый цвет i не реализует некоторое расстояние d_i. Для различных цветов i и j соответствующие нереализованные расстояния d_i и d_j могут (но не обязаны) различаться. Разумеется,

$$\chi_p \leqslant \chi.$$

Согласно решению задачи 3

$$\chi_p \leqslant 7.$$

За первые 12 лет существования задачи ничего больше не было найдено. Затем в 1970 г. московский школьник (школа рабочей молодежи №105) Дмитрий Райский, участник кружка Н. Н. Константинова, опубликовал ([39]) нижнюю и верхнюю оценку для χ_p:

Задача 4 ([39]). $4 \leqslant \chi_p \leqslant 6$.

Пример с $\chi_p = 6$ был найден С. Б. Стечкиным и с его разрешения опубликован Д. Е. Райским в [39]. Этот пример приводится ниже, см. с. 201.

Между прочим, на Западе авторство Стечкина осталось неизвестным. Многочисленные статьи и книги, которые я видел, приписывают приоритет Райскому. Почему так случилось? Как любой на моем месте, я обратился к английскому переводу статьи Райского. Там сказано:

> *S. B. Stechkin noted* that the plane can be decomposed into six sets such that all distances are not realized in any one of them. A corresponding example is presented here with the *author's solution.*[3)]

Что за автор имеется в виду? Автор статьи (как решил бы любой)? Я заказал копию исходного русского текста и с удивлением прочел:

> «Соответствующий пример приведен здесь *с разрешения автора.*»

Переводчик перепутал близкие по написанию русские слова «разрешение» и «решение» и нечаянно создал миф.

В 1973 г., через три года после публикации Райского, британский математик Дуглас Р. Вудолл из университета Ноттингема опубликовал одну из лучших доныне статей [57] по вопросам, связанным с хроматическим числом плоскости. Кроме прочего, он дал собственные доказательства неравенств из задачи 4. Восемь лет спустя С. П. Таунсенд обнаружил тонкую ошибку в работе [57] и нашел свое доказательство теоремы Вудолла. Краткое сообщение об этом появилось в печати. Полный текст своей работы, по моему совету, Стивен поместил в интернете (см. [56]).

Доказательство Вудолла я организовал для вас здесь через троекратное применение двух идей Гуго Хадвигера ([27], задачи 54 и 59), которое я назову леммой Хадвигера.

Лемма Хадвигера 5. Пусть круг C диаметра d раскрашен в белый и синий цвет. Если белый цвет не реализует расстояние d_w ($d_w \leqslant d$), а синий цвет не реализует расстояние d_b ($d_b \leqslant d$), то C не содержит хорды длины d_w с концами одного цвета.

Доказательство. Ясно, что круг C не содержит хорды длины d_w с белыми концами, так как это расстояние не реализуется белым цветом. Предположим, что C содержит хорду XY длины d_w с синими концами. Повернем XY вокруг центра круга в новое положение $X'Y'$, такое что $|XX'| = d_b$ (рис. 6).

Точки X' и Y' не могут одновременно быть белыми ($X'Y'$ — хорда длины d_w). Поэтому хотя бы одна из хорд XX', YY' длины d_b имеет синие концы. Но синий цвет не реализует расстояние d_b — противоречие. □

Предложение 6. Пусть плоскость раскрашена в красный, белый и синий цвет, причем эти цвета не реализуют, соответственно, расстояния

3) *С. Б. Стечкин заметил*, что плоскость можно разбить на шесть множеств, ни одно из которых не реализует все расстояния. Соответствующий пример приводится здесь вместе с *авторским решением*.

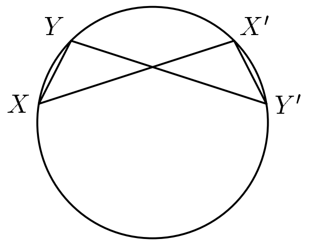

Рис. 6.

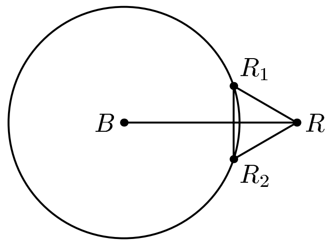

Рис. 7.

d_r, d_w, d_b; $d_r \leqslant d_w \leqslant d_b$. Тогда не существует отрезка длины d_{rb} с красным и синим концами, где

$$d_{rb} = \sqrt{d_b^2 - \left(\frac{1}{2}d_r\right)^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}d_r\,.$$

Доказательство. Пусть RB — отрезок длины d_{rb}, причем точка R красная, а B синяя. Начертим окружность C радиуса d_b с центром B и равносторонний треугольник T со стороной d_r, одной из вершин которого является R, а высота лежит на отрезке RB (рис. 7). Легко проверить (проделайте это), что остальные две вершины R_1 и R_2 треугольника T лежат на окружности C (на самом деле выбор расстояния d_{rb} этим и определялся).

Так как на плоскости нет отрезка длины d_b с синими концами, а центр B окружности C синий, то вся окружность покрашена в красный и белый цвет. Окружность C не имеет хорды длины d_r с концами одного цвета в силу предложения 5. Поэтому один из концов хорды R_1R_2 — красный. Таким образом, равносторонний треугольник RR_1R_2 со стороной d_r имеет две красные вершины, тогда как красный цвет не реализует расстояние d_r. $\square$

Доказав предложения 5 и 6, мы сможем доказать и нижнюю оценку для χ_p.

Задача 7. (Д. Е. Райский [39]). Доказать, что

$$\chi_p \geqslant 4,$$

т. е. при раскраске плоскости в три цвета хотя бы один из них реализует все расстояния.

Решение Д. Р. Вудолла [57]. Пусть плоскость раскрашена в красный, белый и синий цвета, причем каждый из них не реализует, соответственно, расстояние d_r, d_w, d_b; $d_r \leqslant d_w \leqslant d_b$. Без потери общности можно считать, что каждый цвет присутствует на плоскости (в противном случае выберем произвольную точку и покрасим в отсутствующий цвет).

Определим d следующим образом (d_{rb} определено в предложении 6):

$$d = \sqrt{d_{rb}^2 - \left(\frac{1}{2}d_w\right)^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}d_w\,.$$

Покажем, что если один из концов отрезка длины d белый, то и другой также белый. В самом деле, пусть BW — отрезок длины d, причем точка B синяя, а точка W белая. Начертим окружность C радиуса d_{rb} с центром в точке B и равносторонний треугольник T со стороной d_w, одной из вершин которого является W, а высота лежит на отрезке BW (рис. 8). Легко проверить (проделайте это), что остальные две вершины W_1 и W_2 треугольника T лежат на окружности C (на самом деле этим и определялся выбор расстояния d).

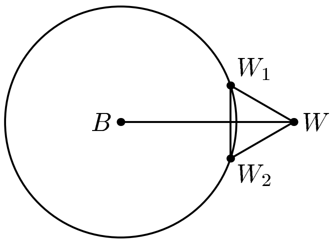

Рис. 8.

В силу предложения 6 на плоскости нет отрезка длины d_{rb}, у которого один конец красный, а другой синий. Поэтому на окружности C нет красных точек (ее центр B синий). Таким образом, окружность покрашена в белый и синий цвет. В силу предложения 5, любая хорда длины d_w в окружности C имеет один белый конец. Следовательно, одна из точек W_1 и W_2 белая, т.е. в равностороннем треугольнике WW_1W_2 со стороной d_w имеются две белые вершины, тогда как белый цвет не реализует расстояние d_w.

Аналогично доказывается, что на плоскости не существует отрезка RW длины d, у которого конец R красный, а конец W белый. (Начертите рис. 8 с тем изменением, что центр окружности находится в красной точке R.)

Итак, мы показали, что окружность радиуса d с центром в белой точке должна быть полностью белой. Но тогда и вся плоскость белая. Это противоречие завершает доказательство. $\square$

В конце 2003 года Алексей Канель-Белов сообщил мне удивительно красивое решение задачи 6, которое было найдено Алексеем Мерковым, десятиклассником московской школы номер 91, и доложено Алексеем Рогинским и Даниилом Дименштейном в 1997 г. в Московском дворце научно-технического творчества молодежи (см. «Материалы конференции „Поиск–97"», М., 1997, с. 143–144).

Второе решение (А. Мерков). Пусть плоскость раскрашена в три цвета: красный, белый и синий, и они не реализуют расстояния r, w и b соответственно. Введем на этой плоскости декартовы координаты с началом O и построим три множества S_r, S_w и S_b, названные выше веретенами Мозера (см. рис. 2). Пусть при этом точка O является одной из 7 вершин каждого веретена, а их рёбра равны r, w и b соответственно. В результате получаем 6 «красных» векторов $v_1, \ldots, v_6$ из точки O в каждую из остальных вершин веретена S_r, а также 6 «белых» векторов $v_7, \ldots, v_{12}$ и 6 «синих» векторов $v_{13}, \ldots, v_{18}$ из точки O в остальные вершины веретен S_w и S_b соответственно.

Рассмотрим теперь 18-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^{18}$ и естественное отображение $M\colon \mathbb{R}^{18} \to \mathbb{R}^2$, которое определяется по формуле $(a_1, \ldots, a_{18}) \to a_1 v_1 + \cdots + a_{18} v_{18}$. Приписав каждой точке из $\mathbb{R}^{18}$ цвет соответствующей точки плоскости, получаем раскраску пространства $\mathbb{R}^{18}$ в три цвета. В соответствии с цветом рассмотренных выше векторов на плоскости, естественно назвать первые шесть координатных осей в $\mathbb{R}^{18}$ «красными», следующие шесть — «белыми», а последние шесть — «синими».

Пусть множество W содержит все те точки из $\mathbb{R}^{18}$, у которых не более чем одна координата каждого цвета равна 1, а остальные координаты (15 или больше) равны 0. Легко проверить (проделайте это), что W состоит из 7^3 точек. Если A — совокупность значений белых и синих координат некоторой точки из W, то найдутся еще 6 точек из W с тем же A. Образ $M(A)$ множества из этих 7 точек при отображении M соответствует некоторому параллельному переносу красного веретена S_r. Зафиксировав другие возможные значения белых и синих координат, получим другие 7 точек в $\mathbb{R}^{18}$ и, соответственно, другой сдвиг веретена S_r. В итоге W разбивается на 7^2 подмножеств, каждое из которых соответствует некоторому сдвигу веретена S_r.

Вспомним теперь замечание после задачи 2. Здесь оно означает, что любой сдвиг веретена Мозера S_r содержит не более двух красных точек из семи. Так как W разбито на сдвиги веретена S_r, то не более $2/7$ всех точек из W имеют красный цвет. Аналогично получаем, что не более $2/7$ всех точек — белые и не более $2/7$ — синие. Но $2/7 + 2/7 + 2/7$ меньше, чем 1! Это противоречие означает, что хотя бы один цвет реализует все расстояния, что и требовалось. $\square$

Задача 8. (С. Б. Стечкин, [39]).

$$\chi_p \leqslant 6,$$

т. е. существует раскраска плоскости в 6 цветов, при которой никакой цвет не реализует все расстояния.

Решение С. Б. Стечкина, приведенное Д. Е. Райским в [39]. Основным элементом конструкции служит параллелограмм, состоящий из четырех правильных шестиугольников и восьми равносторонних треугольников, причем все они имеют стороны длины 1 (рис. 9). Раскрасим шестиугольники в цвета 1, 2, 3 и 4. Треугольники делятся на два

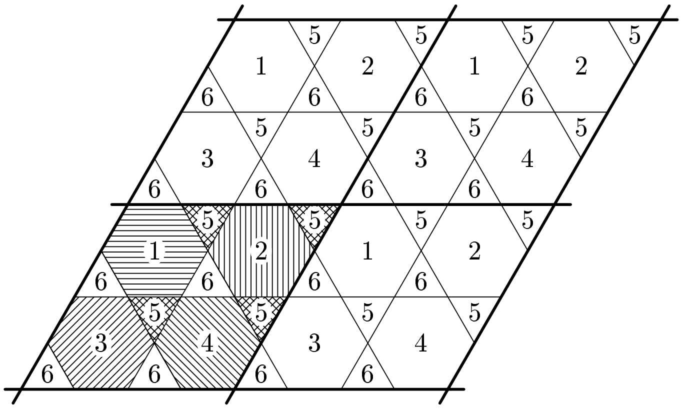

Рис. 9.

класса: если горизонтальное основание находится наверху, то используем цвет 5, а если внизу, то цвет 6. При раскраске считается, что каждый шестиугольник включает всю свою границу, за исключением самой правой и двух нижних вершин, а треугольники не включают никаких граничных точек.

Теперь замостим всю плоскость сдвигами исходного параллелограмма. Задача решена. □

Мы решили задачу 8 с помощью простой конструкции. Простой, после того как она найдена. Суть дела была в том, чтобы ее найти, и первым это сделал С. Б. Стечкин. Христофор Колумб тоже «прямо приплыл» в Америку! Меня захватила эта тема, и я погрузился в размышления о раскраске плоскости в 6 цветов. Я понял, что если наша конечная цель — найти хроматическое число плоскости χ или хотя бы усилить известные оценки ($4 \leqslant \chi \leqslant 7$), то нужно научиться оценивать, насколько близка данная раскраска плоскости к искомой. В 1992 г. я научился это измерять.

Определение 9 (А. Сойфер [45]). Пусть дана раскраска плоскости в n цветов, причем цвет i не реализует расстояние d_i, ($1 \leqslant i \leqslant n$). В этом случае будем говорить, что раскраска имеет *тип* $(d_1,\ d_2, \ldots, d_n)$.

Введенное понятие было столь естественным и полезным, что удостоилось высшей возможной чести, войдя в математический фольклор: оно всюду встречается без указания автора (см., например, с. 14 в фундаментальной 991-страничной монографии [21]).

Большим успехом в решении задачи о хроматическом числе плоскости стало бы отыскание раскраски в 6 цветов типа $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ либо доказательство ее несуществования. Выбрав подходящий исходный параллелограмм в раскраске Стечкина, можно получить тип $(1, 1, 1, 1, 1/2, 1/2)$. Д. Р. Вудолл [57] сумел найти раскраску плоскости в 6 цветов, где каждый цвет является замкнутым множеством, не реализующим все расстояния. Однако в его примере «пропущенных расстояний» три: он имеет тип $\bigl(1, 1, 1, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/(2\sqrt{3})\bigr)$.

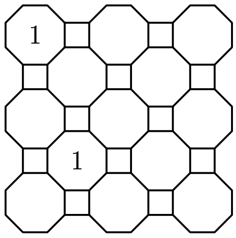

Рис. 10.

В поисках «хорошей» раскраски я обратил внимание на замощение плоскости правильными восьмиугольниками и квадратами (рис. 10). Но и эта раскраска не годится! Убедитесь в этом сами.

Задача 10. Докажите, что множество всех квадратов в замощении на рис. 10 (даже без учета их границ) реализует все расстояния.

Я стал сжимать квадраты, пока их диагональ не стала равной расстоянию между ближайшими квадратами. Одновременно (!) диагональ восьмиугольника (теперь уже неправильного) стала равной расстоянию между двумя восьмиугольниками, помеченными единицей на рис. 10. Я добился успеха!

Задача 11. (А. Сойфер [45]). Докажите, что существует раскраска плоскости в 6 цветов, имеющая тип $(1, 1, 1, 1, 1, 1/\sqrt{5})$.

Решение. Возьмем два квадрата, один со стороной 2, а другой с диагональю 1 (рис. 11). С их помощью замостим плоскость квадратами и (неправильными) восьмиугольниками (рис. 13). Цвета $1, \ldots, 5$ используем для восьмиугольников, а все квадраты покрасим в цвет 6. В каждый восьмиугольник и квадрат включается половина его границы (жирные линии на рис. 12) за вычетом ее концов. Легко проверить (проделайте это!), что расстояние $\sqrt{5}$ не реализуется цветами $1, \ldots, 5$, а расстояние 1

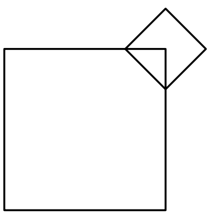

Рис. 11.

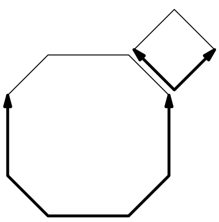

Рис. 12.

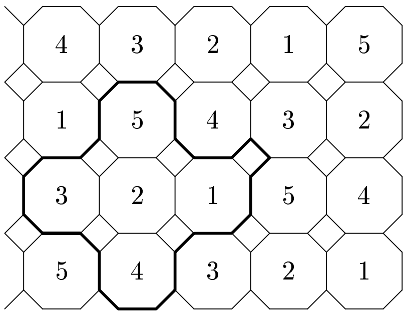

Рис. 13.

не реализуется цветом 6. Сжав все линейные размеры в $\sqrt{5}$ раз, получаем раскраску в 6 цветов, имеющую тип $(1, 1, 1, 1, 1, 1/\sqrt{5})$. □

Решив задачу 11 в августе 1992 г., я испытал смешанные чувства. С одной стороны, «„почти“ не считается»: раскраска в 6 цветов типа $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ так и не была найдена. С другой стороны, я почувствовал, что ее, вероятно, и не существует, и тогда моя раскраска — наилучшая из возможных. Статья о решении задачи 11 составляла полторы страницы плюс страница рисунков. Она была отреферирована за один день [45]. При этом она породила новую открытую проблему.

Определение 12 (А. Сойфер [28]). *Почти хроматическое число плоскости* χ_a — это наименьшее число цветов в такой раскраске, когда почти все (т. е. все кроме одного) цвета не реализуют единичное расстояние, а оставшийся цвет не реализует некоторое (возможно другое) расстояние.

Число χ_a удовлетворяет следующим неравенствам:

$$4 \leqslant \chi_a \leqslant 6.$$

Нижняя оценка вытекает из работы Дмитрия Райского [39]. Верхняя доказана мной в задаче 11 [45]. Остается

Открытая проблема 13 (А. Сойфер [28]). Найти χ_a.

4. Континуум раскрасок в 6 цветов

Другую раскраску в 6 цветов нашли Илья Гофман и автор в 1993 г. ([28], [29]). Она имеет тип $(1, 1, 1, 1, 1, \sqrt{2} - 1)$. Примечательна история этого открытия. Летом 1993 г. я посетил в Москве своего родственника, известного композитора новой венской школы Леонида Гофмана. Его 15-летний сын Илья тогда учился в Музыкальной школе имени Гнесиных. Илья желал узнать, чем я занимаюсь в математике, и не признавал общих ответов. Он хотел конкретности. Я показал ему свою раскраску в 6 цветов (задача 11). Илья заинтересовался. На следующий день он продемонстрировал мне... раскраску Стечкина (см. выше рис. 9), которую он нашел самостоятельно! «Замечательно», — ответил я, — «но ты опоздал на 23 года!» Вскоре он предложил новую идею: применить замощение квадратами двух размеров. Илья обладал интуицией виртуоза, но не имел математической культуры. Однако я вычислил, каковы должны быть размеры этих квадратов, чтобы раскраска обладала необходимыми свойствами. В результате родилась совместная работа необычной пары, состоявшей из математика и музыканта. (Сегодня Илье 25 лет, и он один из самых ярких российских альтистов, аспирант Московской консерватории по классу прославленного Юрия Башмета.)

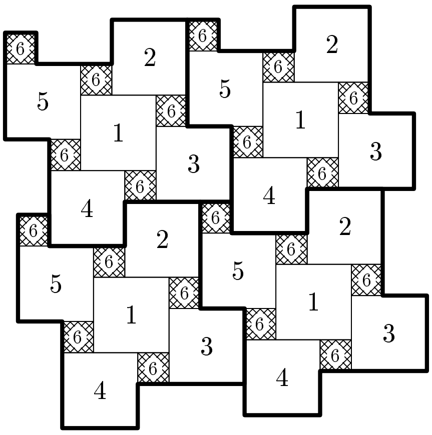

Рис. 14.

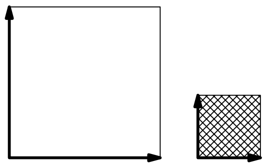

Рис. 15.

Задача 14 (И. Гофман и А. Сойфер [28], [29]). Построить раскраску плоскости в 6 цветов, имеющую тип $(1,1,1,1,1,\sqrt{2}-1)$.

Решение. Замостим плоскость квадратами с диагональю 1 и с диагональю $\sqrt{2}-1$ (рис. 14). Большие квадраты покрасим в цвета $1, \ldots, 5$, а маленькие — в цвет 6. При этом каждый квадрат включает половину своей границы, а именно левую и верхнюю сторону, исключая концы этой половины (рис. 15). □

Примеры, построенные в задачах 11 и 14, приводят к следующей открытой проблеме.

Открытая проблема 15 (А. Сойфер [46], [47]). Найти 6-*реализуемое множество* X_6, т. е. совокупность всех таких положительных чисел α, что существует раскраска в 6 цветов типа $(1,1,1,1,1,\alpha)$.

В этих новых терминах задачи 11 и 14 можно сформулировать следующим образом:

$$1/\sqrt{5}, \sqrt{2}-1 \in X_6 \,.$$

Что общего между раскрасками из задач 11 и 14? Это не очевидно, не так ли? Поразмыслив, я понял, что это два крайних случая общей ситуации, и на самом деле справедливо гораздо более сильное утверждение.

Теорема 16 (А. Сойфер [47]).

$$\left[\sqrt{2}-1, 1/\sqrt{5}\right] \subseteq X_6 \,,$$

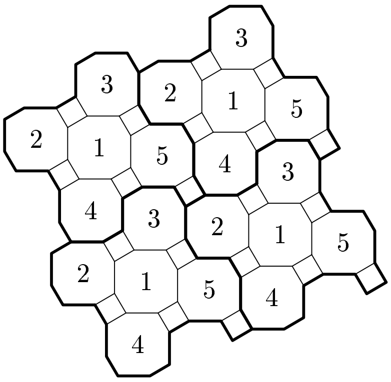

Рис. 16.

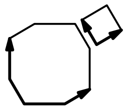

Рис. 17.

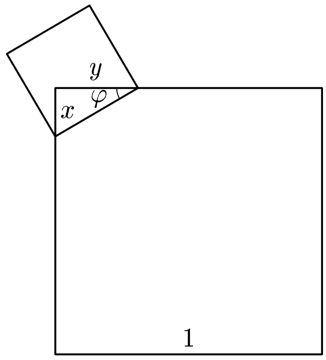

Рис. 18.

т.е. для каждого $\alpha \in \left[\sqrt{2}-1, 1/\sqrt{5}\right]$ существует раскраска в 6 цветов типа α.

Доказательство. Рассмотрим следующее замощение плоскости (рис. 16). Его порождают большой и малый квадрат, образующие угол величины φ (рис. 18). Раскрасим замощение на рис. 16 в шесть цветов. Пусть F обозначает фигуру, ограниченную жирной линией. Восьмиугольники внутри фигуры F раскрасим в цвета от 1 до 5, а все малые квадраты — в цвет 6. Пусть при этом каждый восьмиугольник или квадрат включает часть своей границы, обозначенную жирным на рис. 17. Требуется показать, что каждый цвет не реализует некоторое расстояние.

Пусть длина стороны большого квадрата равна 1. Отрезки его соседних сторон внутри малого квадрата обозначим x и y, $x \leqslant y$ (рис. 18). Легко видеть (рис. 19), что продолжения сторон четырех больших квадратов внутрь одного малого квадрата разрезают последний на четыре конгруэнтных прямоугольных треугольника со сторонами x и y и квадрат со стороной $y - x$.

Наложив условие, что каждый цвет не реализует некоторое расстояние, получаем следующую систему из двух неравенств (рис. 20):

$$\begin{cases} d_1 \geqslant d_2\,, \\ d_3 \geqslant d_4\,. \end{cases}$$

Рисунки 19 и 20 легко позволяют выразить все d_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ через x и y. Приходим к следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} \sqrt{(1+y-x)^2+(2x)^2} \geqslant \sqrt{1+(1-2x)^2}, \\ \qquad\qquad\qquad 1-x-y \geqslant \sqrt{2(x^2+y^2)}. \end{cases}$$

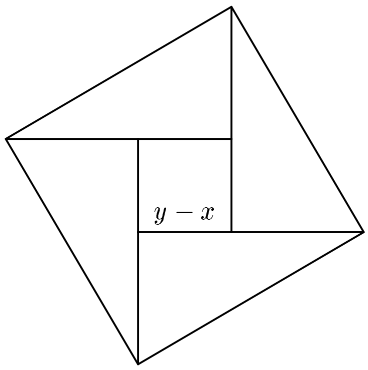

Рис. 19.

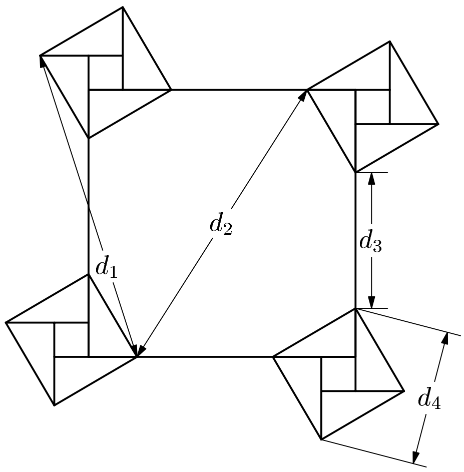

Рис. 20.

Решая отдельно каждое неравенство относительно x, находим *единственную* функцию, выражающую x через y, которая удовлетворяет обоим неравенствам:

$$x = \sqrt{2-4y} + y - 1, \qquad \text{где } 0 \leqslant y \leqslant 0{,}5\,. \tag{$*$}$$

Так как $0 \leqslant x \leqslant y$, то на самом деле границы для y более узки: $0{,}25 \leqslant y \leqslant \sqrt{2}-1$. Если y лежит в этом промежутке, то формула $(*)$ однозначно определяет x, причем выполнены *равенства* $d_1 = d_2$ и $d_3 = d_4$.

Итак, мы показали, что при $y \in [0{,}25, \sqrt{2}-1]$ существует раскраска в 6 цветов типа $(1,1,1,1,1,\alpha)$; но какие значения может принимать α? Нетрудно видеть, что $\alpha = d_4/d_2$.

Сделав подстановку $Y = \sqrt{2-4y}$, где $Y \in [2-\sqrt{2}, 1]$, получаем:

$$\alpha^2 = \frac{Y^4 - 4Y^3 + 8Y^2 - 8Y + 4}{Y^4 - 8Y^3 + 24Y^2 - 32Y + 20}\ .$$

Сделаем подстановку $Z = Y - 2$, где $Z \in [-\sqrt{2}, -1]$:

$$\alpha^2 = 1 + \frac{4Z(Z^2+2Z+2)}{Z^4+4}\,.$$

Чтобы понять поведение функции α^2, вычислим ее производную:

$$(\alpha^2)' = -\frac{4}{(Z^2+4)^2}(Z^6 + 4Z^5 + 6Z^4 - 12Z^2 - 16Z - 8).$$

Нам явно повезло, так как этот многочлен шестой степени приводится к виду

$$(\alpha^2)' = -\frac{4}{(Z^2+4)^2}(Z^2-2)[(Z+1)^4 + 2(Z+1)^2 + 1]\,.$$

Это означает, что на отрезке $\left[-\sqrt{2}, -1\right]$, который нас интересует, экстремум функции α^2 достигается при $Z = -\sqrt{2}$. Возвращаясь от Z к Y и y, мы видим, что на отрезке $\left[0{,}25, \sqrt{2}-1\right]$ функция $\alpha = \alpha(y)$ убывает от $\alpha = 1/\sqrt{5} \approx 0{,}44721360$ (что отвечает раскраске из задачи 11) до $\alpha = \sqrt{2}-1 \approx 0{,}41421356$ (раскраска из задачи 14). Так как при этом функция $\alpha = \alpha(y)$ непрерывна, то она принимает *все* значения из отрезка $\left[\sqrt{2}-1, 1/\sqrt{5}\right]$, и только *по одному разу*.

Для каждого угла φ *между сторонами малого и большого квадрата на рис.* 18 *существуют и единственны длины этих сторон, при которых соответствующая раскраска имеет тип* $(1,1,1,1,1,\alpha)$, *причем* α *определяется однозначно*. Замечательный факт: решения существуют, но редки — они образуют нечто вроде кривой в трехмерном пространстве углов и двух линейных размеров! □

Замечание. Задача отыскания 6-реализуемого множества X_6 тесно связана с отысканием хроматического числа плоскости χ. Решение первой задачи прояснит ситуацию во второй, а может быть и приведет к ее решению:

$$\text{если } 1 \notin X_6, \text{ то } \chi = 7.$$
$$\text{если } 1 \in X_6, \text{ то } \chi \leqslant 6.$$

Открытая проблема 17 (A. Soifer [47]). Найти X_6.

Конечно, вы понимаете, что при всей простоте формулировки эта проблема исключительно трудна.

5. Вблизи нижней границы

Понятие хроматического числа можно ввести не только для плоскости, но и для любого ее подмножества S. *Хроматическое число* $\chi(S)$ множества S — это наименьшее число цветов в его раскраске, не содержащей одноцветной пары на расстоянии 1.

В 1951 г. Н. Г. де Брёйн и Пауль Эрдёш опубликовали очень полезный результат ([16]). В нашей ситуации он означает следующее.

Теорема компактности 18[4)] (Н. Г. де Брёйн, П. Эрдёш). Хроматическое число плоскости равно максимуму из хроматических чисел ее *конечных* подмножеств.

Как следствие, при отыскании хроматического числа плоскости основные усилия были направлены — и с успехом — на ее конечные подмножества[5)].

[4)] Здесь используется аксиома выбора.

[5)] Однако см. в следующем параграфе новейшие результаты.

Предлагаем решить самостоятельно следующие две задачи.

Задача 19. Найдите наименьшее число δ_3 точек в подмножестве плоскости, имеющем хроматическое число 3.

Задача 20 (Л. Мозер и У. Мозер, [35]). Найдите наименьшее число δ_4 точек в подмножестве плоскости, имеющем хроматическое число 4. (Подсказка: $\delta_4 = 7$.)

Виктор Кли и Стэн Вэйгон в книге [34] поставили следующую открытую проблему:

Открытая проблема 21. Пусть k равно 5, 6 или 7. Найдите наименьшее число δ_k точек в подмножестве плоскости, имеющем хроматическое число k.

Разумеется, этот вопрос имеет смысл только при $\chi > 4$. В этом случае он подсказывает путь отыскания хроматического числа плоскости: нужно строить конечные множества типа «веретен». Беда в том, что, несмотря на множество попыток, никому до сих пор не удалось построить пример конечного множества с хроматическим числом 5. Популярен был такой подход: построить 5-хроматический граф и попытаться вложить его в плоскость, превратив при этом каждое ребро в сегмент длины 1. Однако типичные примеры 4-хроматических множеств (см. рис. 2 и 5) строятся из не слишком гибких фигур — равносторонних треугольников. Вероятно, это и побудило Пауля Эрдёша в 1976 г. сформулировать следующую задачу.

Задача 22 (П. Эрдёш, [7]). Существует ли конечное подмножество плоскости S с хроматическим числом 4, не содержащее равносторонних треугольников со стороной 1?

В 1979 г. австралийский математик Николас Уормолд получил положительный ответ. В своей впечатляющей статье [58] Уормолд доказал существование множества S из 6448 точек с хроматическим числом 4. Это множество не содержит треугольников *и четырехугольников*, все стороны которых равны 1. Уормолду потребовалась помощь компьютера! Мне хотелось бы дать вам представление о первоначальной конструкции Уормолда, но эта длинная статья тогда стала бы еще длиннее. Так что лучше обратиться к [58] и [51]. Между прочим, Пауль Эрдёш — в своем характерном стиле — заплатил Нику за его решение 25 долларов.

Ожидая положительного ответа в задаче 22, Пауль Эрдёш прямо в следующей фразе сформулировал следующую проблему.

Задача 23 (П. Эрдёш, [7]). Пусть плоское множество S при $3 \leqslant n \leqslant t$ не содержит n-угольников, все стороны которых равны 1. Существует ли такое t, что хроматическое число множества S не может быть больше трех?

Выступая в 1992 г. на конференции в Бока Ратон, я вспомнил задачу 22, когда-то поставленную Паулем, и придал ей форму конкурсного задания:

Открытая проблема 24. Найдите наименьшее число точек σ_4 в плоском множестве с хроматическим числом 4, не содержащем равносторонних треугольников со стороной 1. Постройте такое множество S из σ_4 точек.

Многие молодые математики, включая аспирантов, вдохновились этим выступлением и приняли мой вызов. Так сложилось, что в том же академическом году при поддержке великого геометра Бранко Грюнбаума, а затем и Пауля Эрдёша, я основал журнал «Геомбинаторика», единственный в своем роде; он посвящен открытым проблемам в дискретной и комбинаторной геометрии и смежных областях. И у нас получилось соревнование мирового уровня. Лишь взгляните на следующие таблицы 2 и 3 (*обхват* графа — это наименьшее число ребер в каком-либо его цикле).

Графы, построенные рекордсменами, столь же содержательны математически, сколь и просто красивы. Все они будут включены в книгу [51]. Но я должен продемонстрировать вам хотя бы один граф — пусть это будет «Рыба Хохберга – О'Доннелла» (рис. 21).

Напомним, что *хроматическое число графа G* — это наименьшее число цветов в его правильной раскраске (когда соседние вершины покрашены в разные цвета). Возможно, вы знаете (если нет, то посмотрите в любой серьезной книге по теории графов), что наименьший граф с хроматическим числом 4, не содержащий треугольников, — это граф Грёцша с 11 вершинами. «Рыба» удовлетворяет всем условиям на граф Грёцша плюс еще одно: это граф единичных расстояний (т. е. каждое ребро имеет длину 1). Замечательно, что Роб и Пауль обошлись всего 23 вершинами. Является ли это число наименьшим? Не уверен. Но оно, несомненно, очень близко к наименьшему. Таким образом, на страницах «Геомбинаторики» мы продвинулись от 6448 до 23 — невероятный прогресс!

Многочисленные попытки усилить нижнюю оценку хроматического числа плоскости не увенчались успехом. Видя безнадежность ситуации (или из любознательности), знаменитый американский математик Роналд Л. Грэхем (ныне президент Американской математической ассоциации и казначей Национальной академии наук) установил высокую премию в 1000 долларов за решение нашей задачи.

6448	Н. Уормолд	1979	Austr. Math. Soc. A 28, 1–8
56	П. О'Доннелл	июль 1994	Geombinatorics IV(1), 23–29
47	К. Чилакамарри	январь 1995	Geombinatorics IV(3), 64–76
46	Р. Хохберг	1995	не опубликовано
40	П. О'Доннелл	июль 1995	Geombinatorics V(1), 31–34
23	Р. Хохберг и П. О'Доннелл	апрель 1996	Geombinatorics V(4),137–141

Табл. 2. *Мировые рекорды: наименьший граф единичных расстояний с хроматическим числом 4 и обхватом 4*

6448	Н. Уормолд	1979	Austr. Math. Soc. A 28, 1-8
45	Р. Хохберг и П. О'Доннелл	апрель 1996	Geombinatorics V(4),137-141

Табл. 3. *Мировые рекорды: наименьший граф единичных расстояний с хроматическим числом 4 и обхватом 5*

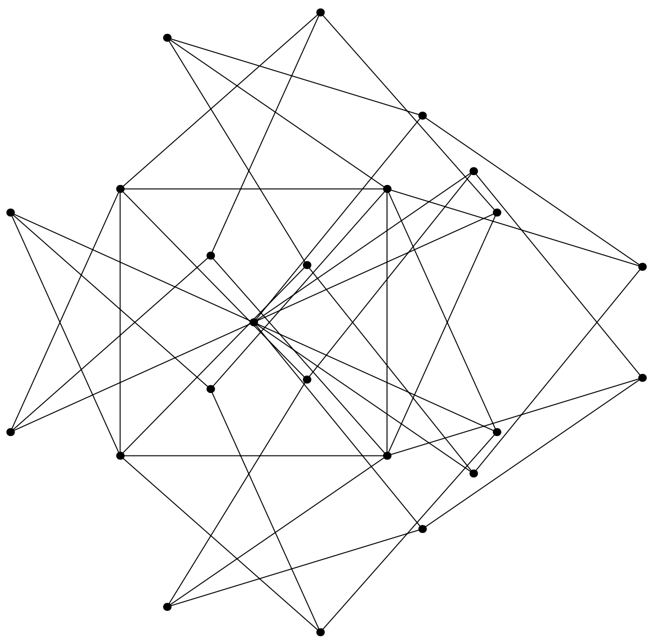

Рис. 21. *Рыба Хохберга – О'Доннелла: рекордный граф единичных расстояний с хроматическим числом 4, не содержащий треугольников*

Тысячедолларовая открытая проблема 25 (Р. Л. Грэхем, МТИ, лекция для участников американской математической олимпиады, май 2001 г.). Равно ли хроматическое число плоскости четырем?

Однако многое удалось узнать о 4-хроматических графах единичных расстояний. На мой взгляд, лучший из этих результатов содержится в упомянутой выше диссертации Пола О'Доннелла. Он полностью решает задачу Пауля Эрдёша 23 (см. выше).

Теорема О'Доннелла 26 ([38]). Существуют 4-хроматические графы единичных расстояний с произвольным конечным обхватом.

6. Взгляд в будущее: аксиома выбора и хроматическое число плоскости

Трудно предсказывать, особенно будущее

Старинная датская пословица

Однажды в начале 1984 г. в небольшом ренессансном городке Удино близ Венеции я познакомился с молодым израильским математиком Сахароном Шелахом, о котором тогда много говорили в математических кругах: он решил долго стоявшую проблему Уайтхеда. Сахарону понравились мои задачи и гипотезы из области абелевых групп, и он предложил совместно работать над ними. Результатом интенсивной работы в течение недели стали две содержательные статьи, которые появились в Journal of Algebra.

В конце 2002 г. Сахарон снова предложил работать совместно. Что было бы лучшей задачей для совместного решения? Ответ пришел немедленно. Шелах — один из крупнейших специалистов всех времен в логике и теории множеств, так что я решил обсудить с ним мои мысли по поводу знаменитого результата Эрдёша – де Брёйна, который насчитывал уже 50 лет. Ниже изложен итог наших рабочих встреч в 2002 г. и 2003 г. Некоторые из этих совместных результатов приведены в [40] (краткое резюме — в [41]), а другие пока не опубликованы [42].

6.1. Постановка вопроса

В своей фундаментальной работе 1951 г. [16] Пауль Эрдёш и Н. Г. де Брёйн показали, что хроматическое число плоскости достигается на некотором конечном подграфе (см. теорему компактности 18). Естественно, этот результат сориентировал большинство исследователей в направлении конечных графов единичных расстояний. На заднем плане, однако, осталось одно ограничение результата Эрдёша – де Брёйна:

в нем весьма существенно использовалась аксиома выбора. Естественно поэтому спросить: а если бы «выбора» не было? Его отсутствие — как в математике, так и в жизни — может существенно влиять на результат (российские читатели знают это особенно хорошо).

Ниже приведен пример графа расстояний на плоскости $\mathbb{R}^2$, хроматическое число которого зависит от системы аксиом теории множеств. Здесь рассмотрена иная ситуация, чем в задаче о хроматическом числе плоскости, но этот пример ярко демонстрирует зависимость хроматического числа от наличия или отсутствия аксиомы выбора.

В заключение мы сформулируем *условную теорему об хроматическом числе*, которая конкретно указывает условия, при которых хроматическое число плоскости принимает одно из двух возможных значений в зависимости от аксиом теории множеств.

6.2. Предварительные сведения

Вспомним основные теоретико-множественные определения и обозначения. В 1904 г. Эрнст Фридрих Фердинанд Цермело [59] формализовал аксиому выбора, которая до этого использовалась на интуитивном уровне.

Аксиома выбора (**AC**). Каждое семейство Φ непустых множеств обладает функцией выбора, т. е. существует такая функция f, что $f(S) \in$ $\in S$ для каждого S из Φ.

Во многих математических результатах в действительности требуется счетный вариант аксиомы выбора:

Счетная аксиома выбора ($\mathbf{AC}_{\aleph_0}$). Каждое счетное семейство непустых множеств обладает функцией выбора.

В 1942 г. Пауль Исаак Бернайс [1] ввел следующую аксиому:

Принцип зависимого выбора (**DC**). Пусть E — бинарное отношение на непустом множестве A, причем для каждого $a \in A$ существует такое $b \in A$, что aEb. Тогда существует такая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$, что $a_n E a_{n+1}$ при всех $n < \omega$.

Из **AC** вытекает **DC** (см., например, теорему 8.2 из [32]), но не обратно. В свою очередь из **DC** вытекает $\mathbf{AC}_{\aleph_0}$, но не обратно. Аксиома **DC** — слабая форма аксиомы **AC**; она достаточна для построения классической теории лебеговой меры. В частности, Роберт М. Соловэй сделал следующее замечание [53] в ответ на вопрос Сойфера: «Нужна ли аксиома **DC** для стандартного построения теории лебеговой меры (при отсутствии аксиомы выбора), или достаточно счетной аксиомы выбора?»

«Я думал об этом в начале 60-х. Аксиома **DC** потребовалась только в теореме Радона – Никодима. Но я допускаю, что существует более тонкое доказательство этой теоремы, позволяющее обойтись счетной аксиомой выбора. Я лишь заметил, что обычное доказательство [см. Халмоша] использует **DC**.»

Нам понадобится следующая аксиома:

(**LM**) Любое множество вещественных чисел измеримо по Лебегу.

Как всегда, **ZF** означает систему аксиом теории множеств Цермело – Френкеля, а **ZFC** — ту же систему с добавлением аксиомы выбора.

Предположив существование недостижимого кардинала, Роберт М. Соловэй в 1964 г. построил (а в 1970 г. опубликовал) модель, доказывающую следующее утверждение [52]:

Теорема Соловэя 27. Система аксиом **ZF+DC+LM** непротиворечива.

Как отмечает Томас Йек [32], в модели Соловэя любое множество вещественных чисел отличается от борелевского на множество меры нуль.

6.3. Первый пример

Определим следующий граф U^2: его вершинами являются все точки плоскости $\mathbb{R}^2$, причем вершины соединены ребром, если и только если расстояние между ними равно 1. Такой граф можно назвать *плоскостью единичных расстояний*, и его хроматическое число совпадает с *хроматическим числом плоскости*, определенным выше. Конечные подграфы из U^2 называются *конечными плоскими графами единичных расстояний*.

В качестве множества «запрещенных» расстояний в данной ситуации можно использовать не только $\{1\}$, но и любое множество положительных чисел S. Мы будем получать различные графы на плоскости $\mathbb{R}^2$ — или на другом метрическом пространстве или его подмножестве. Будет естественно называть их *графами расстояний*.

Определим граф G_2 следующим образом: множеством его вершин служит множество $\mathbb{R}^2$ всех точек плоскости, а множество ребер состоит из объединения четырех множеств $\{(s,t) : s,t \in \mathbb{R}^2,\ s-t-\varepsilon \in Q^2\}$, где ε имеет вид $(\sqrt{2},0)$, $(0,\sqrt{2})$, $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ и $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ соответственно.

Утверждение 1. В теории **ZFC** хроматическое число графа G_2 равно 4.

Доказательство. Пусть $S = \{(q_1 + n_1\sqrt{2}, q_2 + n_2\sqrt{2}) : q_i \in Q, n_i \in Z\}$. Определим следующее отношение эквивалентности E на множестве $\mathbb{R}^2$: $sEt \Leftrightarrow s-t \in S$. Пусть Y — множество представителей классов этой эквивалентности. Для каждого $t \in \mathbb{R}^2$ существует единственное

$y(t) \in Y$, такое что $t - y(t) = (q_1 + n_1\sqrt{2}, q_2 + n_2\sqrt{2}) \in S$. Искомая раскраска в 4 цвета $c(t)$ определяется следующим образом: $c(t) = (l_1, l_2)$, где $l_i = 0, 1$, $l_i \equiv n_i \pmod 2$. □

В отсутствие аксиомы выбора ситуация резко меняется:

Утверждение 2. В теории $\mathbf{ZF} + \mathbf{AC}_{\aleph_0} + \mathbf{LM}$ хроматическое число графа G_2 не равно никакому натуральному n и даже не равно $\aleph_0$.

Утверждение 2 непосредственно вытекает из следующих предложений 1 и 2:

Предложение 1. Пусть $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ — измеримые подмножества в $\mathbb{R}^2$, причем $\bigcup_{n<\omega} A_n = [0,1)^2$. Тогда хотя бы одно из множеств A_n содержит две соседние вершины графа G_2.

Предложение 2. Пусть $A \subseteq [0,1)^2$, причем A не содержит никаких двух соседних (т. е. соединенных ребром) вершин графа G_2. Тогда A имеет лебегову меру 0.

Доказательство. Сначала докажем предложение 2. Пусть, напротив, множество $A \subseteq [0,1)^2$ не содержит никаких двух соседних вершин, но имеет положительную меру. Тогда существует прямоугольник I, одна из сторон которого параллельна оси абсцисс и имеет, скажем, длину a, причем

$$\frac{\mu(A \cap I)}{\mu(I)} > \frac{9}{10}\,. \tag{0.1}$$

Возьмем такое $q \in Q$, что $\sqrt{2} < q < \sqrt{2} + a/10$. Рассмотрим следующий сдвиг множества A:

$$B = A - \left(q - \sqrt{2}, 0\right) = \left\{\left(x - q + \sqrt{2}, y\right) : (x, y) \in A\right\}.$$

Тогда

$$\frac{\mu(B \cap I)}{\mu(I)} > \frac{8}{10}\,. \tag{0.2}$$

В силу неравенств (0.1) и (0.2) найдется $v = (x, y) \in I \cap A \cap B$. Так как $(x, y) \in B$, то $w = \left[x + \left(q - \sqrt{2}\right), y\right] \in A$. Таким образом, $v, w \in A$ и $v - w - \left(\sqrt{2}, 0\right) = (-q, 0) \in Q^2$. Это означает, что $\{v, w\}$ — ребро графа G_2, оба конца которого лежат в A. Получено искомое противоречие.

Предложение 1 становится теперь очевидным. Поскольку $\bigcup_{n<\omega} A_n = [0,1)^2$, а мера Лебега счетно аддитивна в $\mathbf{AC}_{\aleph_0}$, то при некотором натуральном n множество A_n имеет ненулевую меру. Согласно утверждению 2, A_n содержит пару соседних вершин графа G_2, что и требовалось. □

6.4. Второй пример

Построим теперь граф G_3, несколько отличный от G_2: множеством его вершин служит множество $\mathbb{R}^2$ точек плоскости, а множество ребер состоит из объединения *двух* множеств $\{(s,t) : s,t \in \mathbb{R}^2,\ s - t - \varepsilon \in Q^2\}$, где $\varepsilon = (\sqrt{2}, 0)$ и $\varepsilon = (0, \sqrt{2})$ соответственно.

Утверждение 1. В теории **ZFC** хроматическое число графа G_3 равно 2.

Доказательство. Пусть $S = \{(q_1 + n_1\sqrt{2}, q_2 + n_2\sqrt{2}) : q_i \in Q, n_i \in Z\}$. Определим следующее отношение эквивалентности E на множестве $\mathbb{R}^2$: $sEt \Leftrightarrow s - t \in S$. Пусть Y — множество представителей классов этой эквивалентности. Для каждого $t \in \mathbb{R}^2$ существует единственное $y(t) \in Y$, такое что $t - y(t) = (q_1 + n_1\sqrt{2}, q_2 + n_2\sqrt{2}) \in S$. Искомая раскраска в 2 цвета $c(t)$ определяется четностью суммы $n_1 + n_2$.

Утверждение 2. В теории $\mathbf{ZF} + \mathbf{AC}_{\aleph_0} + \mathbf{LM}$ хроматическое число графа G_3 не равно никакому натуральному n и даже не равно $\aleph_0$.

Доказывается аналогично утверждению 2 из раздела 6.3.

Замечание. Может возникнуть вопрос, почему $\sqrt{2}$ играет такую роль в наших построениях. Конечно, $\sqrt{2}$ — древнейшее известное иррациональное число: по-видимому, его иррациональность была доказана пифагорейцами. Наши рассуждения и результаты не изменятся, если заменить $\sqrt{2}$ другим иррациональным числом.

6.5. Условная теорема о хроматическом числе плоскости

Существенна ли аксиома выбора в задаче о хроматическом числе плоскости χ? Ответ зависит от значения χ, которое, разумеется, нам пока неизвестно. Однако приведенные примеры показывают ситуации, в которых аксиома выбора становится весьма существенной. Мы можем сформулировать следующую теорему.

Условная теорема 28 (Шелах и Сойфер [40])[6]. Предположим, что хроматическое число любого плоского конечного графа единичных расстояний не превосходит 4. Тогда:

*) в теории **ZFC** хроматическое число плоскости равно 4;

**) в теории $\mathbf{ZF} + \mathbf{DC} + \mathbf{LM}$ хроматическое число плоскости равно 5, 6 или 7.

[6]Предполагается существование недостижимого кардинала. Кардинал $\varkappa$ называется *недостижимым*, если он регулярен, является сильным пределом и при этом $\varkappa > \aleph_0$. Бесконечный кардинал $\aleph_a$ *регулярен*, если его начальный ординал не конфинален никакому меньшему ординалу. Кардинал $\varkappa$ является *сильным пределом*, если из $\lambda < \varkappa$ следует $2^\lambda < \varkappa$.

Доказательство. Утверждение *) следует из [16].

В теории $\mathbf{ZF} + \mathbf{DC} + \mathbf{LM}$ любое подмножество S плоскости $\mathbb{R}^2$ измеримо по Лебегу. Действительно, измеримость подмножества S равносильна существованию такого борелевского множества B, что симметрическая разность $S\Delta B$ имеет меру нуль. Значит, любое подмножество плоскости отличается от борелевского на множество меры нуль. Единичный отрезок $I = [0, 1]$ можно представить как множество бесконечных двоичных дробей. Заметим, что биекция $I \to I^2\colon 0{,}a_1a_2 \dots a_n \dots \mapsto (0.a_1a_3 \dots ; 0{,}a_2a_4 \dots)$ сохраняет нулевую меру. Из результата Фальконера [18], сформулированного в разделе 2, вытекает теперь, что хроматическое число плоскости не меньше пяти. $\square$

Может быть, задача отыскания хроматического числа плоскости потому и выдержала все атаки, оставив возможными все значения от 4 до 7, что на самом деле ответ зависит от выбранной системы аксиом теории множеств?

7. Эпилог

«*Если буду жив через год, надеюсь проповедовать здесь снова. Если же нет, то надеюсь, что кто-нибудь прочтет лекцию в память обо мне.*» Такими словами Пауль Эрдёш закончил свое выступление 10 марта 1994 г. в Бока Ратон [15].

13 марта 2003 г. мы отпраздновали 90-летие со дня рождения Пауля Эрдёша. Пауль поставил столько крупных открытых проблем, что их хватит на века. Задача о хроматическом числе плоскости принадлежит не ему, но она очень ему нравилась. И только благодаря ему эта задача живет — подобно тому как Огастес де Морган спас гипотезу четырех красок (подробнее об этом см. [51]).

Изложенные результаты войдут в числе других в *Mathematical Coloring Book* [51]. Открытые проблемы Пауля Эрдёша войдут в *Problems of pgom Erdös* [17] (pgom — это аббревиатура poor great old man, так Пауль Эрдёш в шутку называл самого себя); над этой книгой мы вместе работали с конца 80-х до ухода Пауля в 1996 г. Полезные обзоры по затронутым вопросам содержатся в [34] и [3].

Здесь я попытался не только обрисовать содержательную математическую задачу, но и показать, что не обязательно излагать математику в непреклонно-формализованном стиле или подавлять читателя муштрой. По моему мнению, математику нужно излагать как волнующую драму человеческих устремлений и ярких характеров ее творцов.

Благодарю Бориса Френкина (переводчика этой статьи), Владимира Михайловича Тихомирова и Михаила Вялого за полезные замечания и предложения. Я признателен Алексею Канель-Белову, который предложил — и чей энтузиазм вдохновил меня — написать эту статью, адресованную прежде всего молодым читателям «Математического просвещения». Когда-то и я родился в Москве, и я ценю эту возможность контактировать с вами, мои молодые коллеги. Буду благодарен вам за комментарии и дополнения к статье; направляйте их по адресу: до августа 2004 г. — Alexander Soifer, Department of Mathematics, Princeton University, Washington Rd, Princeton, NJ 08544, USA; с сентября 2004 г. — Alexander Soifer, University of Colorado, 1420 Austin Bluffs, Colorado Springs, CO 80918, USA.

Список литературы

[1] Bernays, P., A system of axiomatic set theory III, J. Symbolic Logic 7(1942), 65–89.

[2] Croft, H. T., Incidence incidents, Eureka (Cambridge) 30 (1967), 22–26.

[3] Croft, H. T., K. J. Falconer, and R. K. Guy, Unsolved Problems in Geometry, Springer, New York, 1991.

[4] de Bruijn, N. G., and P. Erdos, A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations, Indagationes Math., 13 (1951), 369–373.

[5] Erdös, P., Some unsolved problems, MTA MKI Kozl., 6 (1961), 221–254.

[6] Erdös, P., On some problems of elementary and combinatorial geometry, Ann. Math. Pure Appl., (4) 103 (1975), 99-108.

[7] Erdös, P., Задача из "Unsolved Problems", Proceedings of the Fifth British Combinatorial Conference 1975, p. 681, Utilitas Mathematica Pub., Winnipeg, 1976.

[8] Erdös, P., Some combinatorial problems in geometry, Geom. & Diff. Geom. Proc., Haifa, Israel, (1979); Lecture Notes in Math., 792, Springer (1980), 46–53.

[9] Erdös, P., Some applications of graph theory and combinatorial methods to number theory and geometry, Algebraic Methods in Graph Theory (Colloq. held in Szeged, Hungary 1978), Vol. I, Coll. Math Soc. J. Bolyai, 25 (1981), 137–148.

[10] Erdös, P., Some new problems and results in graph theory and other branches of combinatorial mathematics, Combinatorics and graph theory, Proc. Symp. Calcutta 1980, Lecture Notes Math., 885, Springer (1981), 9–17.

[11] Erdös, P., Интервью в документальном фильме Colorado mathematical Olympiad, 1989.

[12] Erdös, Paul, Письмо А. Сойферу от 12 июля 1991.

[13] Erdös, Paul, Письмо А. Сойферу от 16 июля 1991.

[14] Erdös, Paul, Письмо А. Сойферу от 14 августа 1991.

[15] Erdös, Paul, доклад "Twenty Five Years of Questions and Answers", 25th South-Eastern International Conference On Combinatorics, Graph Theory and Computing, Florida Atlantic University, Boca Raton, March 10, 1994.

[16] Erdös, P., and de Bruijn, N. G., A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations, Indag. Math. 13 (1951), 371–373.

[17] Erdös, P., and Soifer, A., Problems of pgom Erdös (будет опубликовано в CEME, Colorado Springs, или в Princeton University Press).

[18] Falconer, K. J., The realization of distances in measurable subsets covering Rn, Com. Theory (A), 31 (1981), 187–189.

[19] Gardner, M., The celebrated four-color map problem of topology, Scientific American, 206 (Sept. 1960), 218–226.

[20] Gardner, M., A new collection of brain teasers, Scientific American, 206 (Oct. 1960), 172–180.

[21] Goldman, J. E., and O'Rourke, J., Handbook of Discrete and Computational Geometry, CRC Press, Boca Raton, 1997.

[22] Hadwiger, H., Überdeckung des euklidischen Raum durch kongruente Mengen, Portugaliae Math., 4 (1945), 238–242.

[23] Hadwiger, H., Ungeloste Probleme, Nr. 11, Elemente der Mathematik, 16 (1961), 103–104.

[24] Hadwiger, H., and Debrunner, H., Ausgewahlte einzelprobleme der kombinatorishen geometrie in der ebene, L'Enseignement Mathematique, 1 (1955), 56–89.

[25] Hadwiger, H., and Debrunner, H., Kombinatorischen Geometrie in der Ebene, L'Enseignement Mathematique, Geneva, 1959.

[26] Хадвигер Г. и Дебруннер Г. Комбинаторная геометрия плоскости. Перевод под ред. с доп. и прил. И.М.Яглома. М.: Наука, 1965.

[27] Hadwiger, H., Debrunner, H., and Klee, V., Combinatorial Geometry in the Plane, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964.

[28] Hoffman, I., and Soifer, A., Almost chromatic number of the plane, Geombinatorics III(2), 1993, 38–40.

[29] Hoffman, I., and Soifer, A., Another six-coloring of the plane, Discrete Mathematics 150 (1996), 427–429.

[30] Isbell, J., Письмо А.Сойферу от 26 августа 1991.

[31] Isbell, J., Письмо А.Сойферу от 3 сентября 1991.

[32] Jech, T. J., The Axiom of Choice, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[33] Jensen, T. R., and Toft, B., Graph Coloring Problems, Wiley, New York, 1995.

[34] Klee, V., and S. Wagon, Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory, The Mathematical Association of America, 1991.

[35] Moser, L., and Moser, W., Solution to Problem 10, Can. Math. Bull., 4, (1961), 187–189.

[36] Nelson, E., Письмо А.Сойферу от 23 августа 1991.

[37] Nelson, E., Письмо А.Сойферу от 5 октября 1991.

[38] O'Donnell, P., High Girth Unit-Distance Graphs, Ph. D. Dissertation, Rutgers University, May 25,1999.

[39] Райский Д.Е., Реализация всех расстояний при разбиении пространства R^n на $n+1$ часть, Матем. заметки 7:3(1970), 319–323. Англ. перевод: Math. Notes 7 (1970), 194–196.

[40] Shelah, S., and Soifer, A., Axiom of Choice and Chromatic Number of the Plane, J. Combin. Theory Ser. A 103(2003) 387–391.

[41] Shelah, S., and Soifer, A., Chromatic Number of the Plane & Its Relatives Part III: Its Future, Geombinatorics XIII(1), 2003, 41–46.

[42] Shelah, S., and Soifer, A., Axiom of Choice and Chromatic Number: An Example on the Plane, принято к печати в J. Combin. Theory Ser. A.

[43] Soifer, A., Chromatic number of the plane: A Historical Essay, Geombinatorics I(3), 1991, 13–15.

[44] Soifer, A., Relatives of Chromatic Number of the Plane, Geombinatorics I(4), 1992, 13–15.

[45] Soifer, A., A six-coloring of the plane, J. Combin. Theory Ser. A 61 (1992), 292–294.

[46] Soifer, A., Six-realizable set X_6, Geombinatorics III(4), 1994.

[47] Soifer, A., An infinite class of 6-colorings of the plane, Congressus Numrerantium 101 (1994), 83–86.

[48] Soifer, A., Competitions, Mathematics, Life, Mathematics Competitions 11(2), 1998, 20–41.

[49] Soifer, A., Chromatic Number of the Plane & Its Relatives. Part I: The Problem & Its History, Geombinatorics XII(3), 2003, 131–148.

[50] Soifer, A., Chromatic Number of the Plane & Its Relatives, Part II: Polychromatic Number & 6-Coloring, Geombinatorics XII(4), 2003, 191–216.

[51] Soifer, A., Mathematical Coloring Book (будет опубликовано в CEME, Colorado Springs или в Princeton University Press).

[52] Solovay, R. M., A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, Ann. Math. 92 Ser. 2 (1970), 1–56.

[53] Solovay, R. M., e-mail to A. Soifer of April 11, 2003.

[54] Szekely, L. A., Remarks on the chromatic number of geometric graphs, in Graphs and other Combinatorial Topics, Proceedings of the Third Czechoslovak Symposium on Graph Theory, M., Teubner Verlaggesellschaft, Leipzig, 1983, 312–315.

[55] Szekely, L. A., Erdös on unit distances and the Szemeredi – Trotter theorems, in Paul Erdös and his Mathematics II, G. Halasz, G. et al, eds, Janos Bolyai Mathematical Society, Budapest and Springer-Verlag, Berlin, 2002, 649-666.

[56] Townsend, S. P., Every 5-Colouring Map in the Plane Contains a Monochrome Unit, J. Combin. Theory, Ser. A, 30 (1981), 114–115. (Файл с полным текстом этой работы можно взять на `http://www.csd.abdn.ac.uk/~spt/document/mapcolour/`)

[57] Woodall, D. R., Distances realized by sets covering the plane, J. Combin. Theory, 14 (1973), 187–200.

[58] Wormald, N.C., A 4-chromatic graph with a special plane drawing, J. Austral. Math. Soc. Series A, 28(1979),1–8.

[59] Zermelo, E., Beweis dass jede Menge wohlgeordnet warden kann, Math. Ann. 59 (1904), 514–516.