

## Задачи о метрических компактах

В. В. Доценко

Формулировки приведенных здесь задач весьма похожи, да и в решениях много общего: идея состоит в том, чтобы изучать орбиту точки при итерациях данного отображения. В каждой из задач  $(K, \rho)$  — компактное метрическое пространство.

**ЗАДАЧА 1.** Если отображение  $f: K \rightarrow K$  не уменьшает расстояния<sup>1)</sup>, то оно является изометрией.

**ЗАДАЧА 2** (задача 4.9 из задачника «Математического просвещения», №4, с. 217). Если сюръекция  $f: K \rightarrow K$  не увеличивает расстояния, то она является изометрией.

**ЗАДАЧА 3.** Изометричное отображение  $f: K \rightarrow K$  является биекцией.

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ 1.** Фиксируем точки  $x, y \in K$  и рассмотрим последовательность  $\{(f^k x, f^k y)\}$  точек компакта  $K \times K$ . Выберем сходящуюся подпоследовательность  $S = \{(f^{k_i} x, f^{k_i} y)\}$ . У такой последовательности последовательность первых координат является сходящейся, поэтому  $\lim_{j > i \rightarrow \infty} \rho(f^{k_i} x, f^{k_j} x) = 0$ , и тем более  $\lim_{j > i \rightarrow \infty} \rho(x, f^{k_j - k_i} x) = 0$  (раз отображение  $f$  не уменьшает расстояния). То же самое верно и для вторых координат. Поэтому точка  $(x, y)$  является предельной для последовательности  $S$ . Если бы оказалось, что верно неравенство  $\rho(fx, fy) - \rho(x, y) > \varepsilon$ , то при любом натуральном  $k$  было бы верно неравенство  $\rho(f^k x, f^k y) - \rho(x, y) > \varepsilon$ . Поскольку расстояние — непрерывная функция, то это противоречит тому, что  $(x, y)$  — предельная точка. Значит, все расстояния сохраняются, что и требовалось.

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ 2.** Фиксируем положительное число  $\varepsilon$  и рассмотрим какую-либо конечную  $\varepsilon$ -сеть<sup>2)</sup>  $S$ . (Конечная  $\varepsilon$ -сеть существует в силу компактности.) Заметим, что для любого натурального числа  $k$  множество  $f^k S$  будет  $\varepsilon$ -сетью (раз отображение  $f$  не увеличивает расстояния). Рассмотрим величины  $A_k = \sum_{x, y \in S} \rho(f^k x, f^k y)$ . Последовательность  $\{A_k\}$

<sup>1)</sup>Т. е.  $\forall x, y \in K \quad \rho(fx, fy) \geq \rho(x, y)$ .

<sup>2)</sup>Подмножество  $S$  в метрическом пространстве  $(M, \rho)$  называется  $\varepsilon$ -сетью, если для любой точки  $t \in M$  найдется точка  $s \in S$ , такая что  $\rho(t, s) \leq \varepsilon$ .

монотонна, рассмотрим ее точную нижнюю грань  $A$ . Пусть натуральное число  $k$  таково, что  $A_k - A < \varepsilon$ . Докажем, что расстояние между любыми двумя точками  $a, b \in K$  не могло измениться (уменьшиться) более, чем на  $5\varepsilon$ . В самом деле, найдем точки  $\bar{a}, \bar{b} \in f^k S$ :  $\rho(a, \bar{a}) \leq \varepsilon$ ,  $\rho(b, \bar{b}) \leq \varepsilon$ . Тогда (используем неравенства типа  $\rho(f\bar{a}, f\bar{b}) \leq \rho(f\bar{a}, fa) + \rho(fa, fb) + \rho(fb, f\bar{b})$ , означающие, что сумма трех сторон четырехугольника не меньше четвертой)  $\rho(a, b) - \rho(fa, fb) \leq \rho(a, \bar{a}) + \rho(b, \bar{b}) + (\rho(\bar{a}, \bar{b}) - \rho(f\bar{a}, f\bar{b})) + \rho(f\bar{a}, fa) + \rho(f\bar{b}, fb) \leq 5\varepsilon$ . Поскольку действительное число  $\varepsilon > 0$  произвольно, то все расстояния сохраняются, что и требовалось.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ 3. Докажем, что отображение  $f$  сюръективно (инъективность очевидна). Фиксируем точку  $x \in K$ . Выделим сходящуюся подпоследовательность из последовательности  $\{f^k x\}$ , пусть это последовательность  $\{f^{k_i} x\}$ . Для такой последовательности  $\lim_{j > i \rightarrow \infty} \rho(f^{k_i} x, f^{k_j} x) = 0$ , поэтому из изометричности  $f$  следует, что и  $\lim_{j > i \rightarrow \infty} \rho(x, f^{k_j - k_i} x) = 0$ , т. е.  $x$  — предельная точка множества  $fK$ . Но изометрия — непрерывное отображение, а непрерывный образ компакта — компакт, значит,  $x \in fK$ , что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЕ. Компактность в каждом из случаев играет ключевую роль. Если пространство некомпактно (пусть даже полно), то легко придумать контрпримеры: гомотетии на прямой опровергают первые два утверждения, параллельный перенос на луче  $[0, \infty)$  — третье. (Впрочем, третье утверждение верно, если, к примеру,  $K$  — арифметическое евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$ , поскольку все изометрии в этом случае можно перечислить: это суть композиции не более чем  $n + 1$  симметрий относительно гиперплоскостей.)