Дырявые изогональные колонны

Б. Грюнбаум*
Университет штата Вашингтон,
Сиэттл

Перед вами продолжение заметки [3] о бесконечных многогранниках. Мы заимствуем оттуда терминологию и дадим здесь лишь краткие пояснения основных понятий. Под *бесконечным многогранником* P мы понимаем бесконечное семейство плоских выпуклых многоугольников (его *граней*) с попарно непересекающимися внутренностями; при этом каждая сторона каждой грани является стороной еще одной и только одной грани и называется *ребром*, а ее концы называются *вершинами* многогранника P. Грани, рёбра и вершины должны удовлетворять условиям, обычно выполненным в многогранниках и сформулированных явно в [3]. Однако подчеркнем, что так как от многогранника не требуется выпуклость, то нет оснований предполагать, что его грани лежат в разных плоскостях. И действительно, замощение плоскости многоугольниками подпадает под наше определение бесконечного многогранника.

Нас будут интересовать *изогональные* (или *вершинно-транзитивные*) многогранники, т. е. такие, в которых все вершины взаимно эквивалентны относительно симметрий многогранника. В заметке [3] мы в основном занимались *однородными* многогранниками, т. е. такими изогональными многогранниками, у которых все грани — правильные многоугольники; при этом мы считали многогранник периодичным в трех независимых направлениях.

Изогональным (в том числе однородным) многогранникам, периодичным в двух независимых направлениях, посвящено большое число публикаций. Имеется обширная литература по замощениям плоскости с такими свойствами (см., например, [4, главы 2 и 6] и приведенную там библиографию). В работе [5] рассмотрено большое число однородных многогранников, периодичных в двух направлениях, но не лежащих в плоскости; исчерпывающее исследование изогональных многогранников такого рода содержится в недавно подготовленной диссертации Уильяма Т. Веббера. Некоторые из этих «пластин» имеют «дыры», т. е. их топологический род

*Работа частично поддержана грантом NSF # DMS-9008813.

бесконечен. Простейшие примеры строятся следующим образом: замостим две параллельные плоскости квадратами, удалим некоторое множество квадратов из каждой плоскости и соединим образовавшиеся дыры «трубами», состоящими из четырех квадратов.

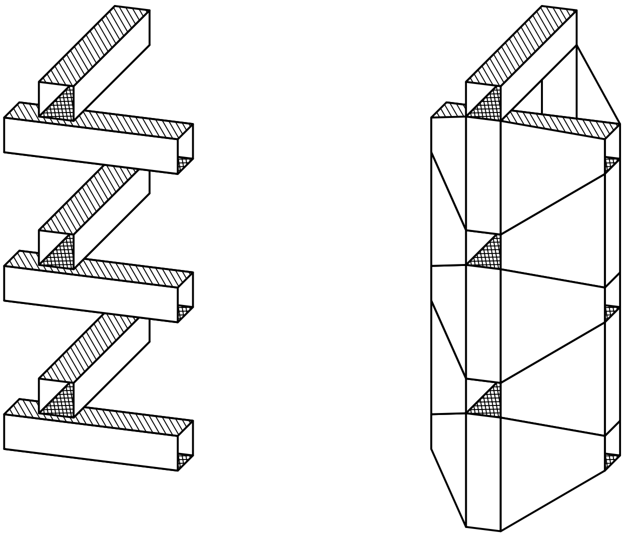
Изучались и изогональные (в том числе однородные) многогранники, периодичные в одном направлении; в соответствии с их очертаниями такие многогранники можно назвать «колоннами (columns)». Однородные колонны легко составить из призм и антипризм (удалив общие основания соседних компонент). Такие и некоторые другие колонны показаны на иллюстрациях в работе [5]. Интересная колонна получается из правильных тетраэдров; Бакминстер Фуллер назвал ее «тетрагеликс» (tetrahelix) (см. [2] и [1]; в последней работе рассмотрены также обобщения на высшие размерности). Существует и много других способов строить изогональные колонны.

Однако в литературе нет упоминаний об однородных или изогональных колоннах более высокого рода. Цель данной заметки — восполнить этот пробел.

Вначале опишем одно бесконечное семейство «дырявых» изогональных колонн; примеры приведены на рис. 1 и 2. Поскольку чертеж готового многогранника не выражает его структуру достаточно ясно, мы опишем и проиллюстрируем само построение. Сделаем «дыры» («внутренние проходы»), показанные в части (а) обоих рисунков. В общем случае каждая «дыра» состоит из призмы, в основании которой лежит $2n$-угольник (n целое, $n \geqslant 2$), все углы которого равны, а длины сторон поочередно принимают два различных значения; при построении бесконечной колонны нужно удалить боковые грани призм, содержащие более короткие стороны оснований. Расположим такие «раскрытые» призмы вертикально одну над другой через равные промежутки и повернем каждую относительно предыдущей на угол $\pi/n(= 180^\circ/n)$. На рис. 1(а) изображен простейший случай ($n = 2$), а на рис. 2(а) — случай $n = 4$, который, вероятно, лучше иллюстрирует общую ситуацию. Чтобы построить колонну, добавим снаружи подходящую «обшивку», соединяющую «дыры», которые при этом сохраняются; в результате получается многогранник.

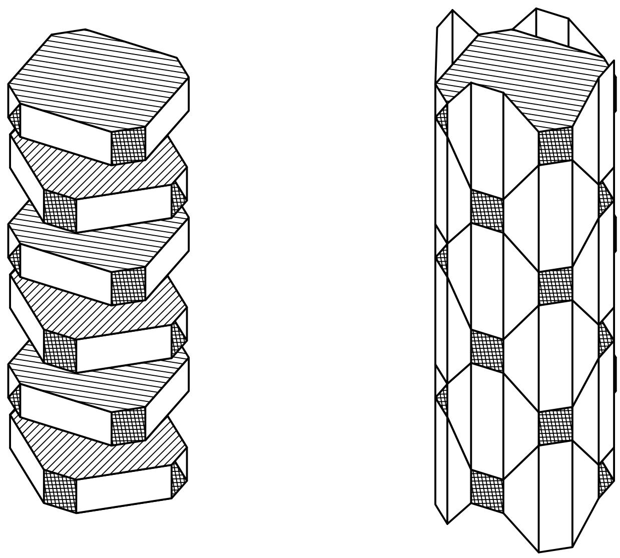
Очевидно, что многогранники, построенные таким образом, изогональны, причем к каждой вершине примыкают пять четырехугольников (два — из стенок «дыры» и три — из «обшивки»). С точностью до подобия и числа n, многогранник зависит от трех параметров, которые могут принимать произвольные положительные значения: это высота призмы, расстояние между соседними призмами и отношение (большее чем 1) длин двух соседних сторон основания.

Интерес к таким многогранникам отчасти определяется следующим предположением:



(a) (b)

Рис. 1.



(a) (b)

Рис. 2.

Гипотеза 1. Не существует изогональных колонн бесконечного рода, кроме описанных выше.

Если это верно, то становится понятным отсутствие упоминаний в литературе об однородных колоннах бесконечного рода. Сформулируем это следующим образом:

Гипотеза 2. Не существует однородных колонн бесконечного рода.

Список литературы

[1] H.S.M. Coxeter, The simplicial helix and the equation $\tan nq = n \tan \Theta$. *Canad. Math. Bull.* 28 (1935), 385-393.

[2] R.B.Fuller, *Synergetics*, Macmillan, New York (1975).

[3] B. Grünbaum, Infinite uniform polyhedra. *Geombinatorics* II(1993), 53-60.

[4] B. Grünbaum and G.C.Shephard, *Tilings and Patterns.* Freeman, New York (1987). Тж. в: *Tilings and Patterns: An Introduction.* Freeman, New York (1989).

[5] A.Wachman, M.Burt, and M.Kleinmann, *Infinite Polyhedra.* Faculty of Architecture and Town Planning, Technion - Israel Institute of Technology, Haifa, Israel (1974).