Проективные преобразования, оставляющие на месте окружность

Р. Н. Карасёв
141700, г. Долгопрудный Московской обл., Институтский пер. 9,
Московский физико-технический институт,
кафедра высшей математики

1. Введение

В этой статье мы рассмотрим некоторые свойства проективных преобразований, которые переводят заданную окружность на проективной плоскости в ту же окружность. Кроме того, мы найдем способы явного построения таких преобразований. Мы отметим аналогию между такими преобразованиями и ортогональными преобразованиями трехмерного пространства, или, в школьной формулировке, движениями трехмерного пространства, оставляющими на месте начало координат. Эта аналогия позволяет рассмотреть важный класс проективных преобразований, переводящих окружность в себя, которые аналогичны отражениям относительно плоскости в случае ортогональных преобразований пространства.

От читателя предполагается некоторое знакомство с понятиями проективной плоскости и проективного преобразования, например, по книгам [1] или [2].

2. Некоторые определения

Напомним некоторые определения из проективной геометрии (см. [1]):

Определение. *Проективной плоскостью* называется множество прямых, проходящих через начало координат трехмерного пространства. Прямые этого множества называются *точками проективной плоскости*, плоскости, проходящие через начало координат, называются *прямыми проективной плоскости*.

Определение. На любой плоскости, расположенной в трехмерном пространстве и не содержащей начала координат, проективные точки и прямые высекают настоящие точки и прямые. Такая плоскость называется *аффинной картой*. Она содержит все точки проективной плоскости, кроме одной прямой, которая называется *бесконечно удаленной прямой* в данной карте.

Определение. *Проективными преобразованиями* называются преобразования проективной плоскости, возникающие из любых линейных преобразований трехмерного пространства.

Для школьного курса можно считать, что линейные преобразования — это преобразования, заданные формулами

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{aligned}$$

с ненулевым детерминантом матрицы (a_{ij}). Для каждого такого преобразования есть обратное и из любых двух преобразований можно сделать композицию — то есть они образуют *группу*.

Координаты (x, y, z) в трехмерном пространстве будем называть *однородными координатами*, а само это пространство — *однородным пространством*. Для точек проективной плоскости однородные координаты определены с точностью до умножения на любое ненулевое число. Также мы часто будем использовать аффинную карту, задаваемую условием $z = 1$, для нее связь между однородными координатами и координатами (u, v) в аффинной плоскости задается так:

$$\begin{gathered} (u, v) \to (u, v, 1), \\ (x, y, z) \to (\frac{x}{z}, \frac{y}{z}). \end{gathered}$$

3. Окружность на проективной плоскости

Пусть на плоскости дана окружность S. Выберем систему координат, в которой ее уравнение имеет вид

$$u^2 + v^2 = 1.$$

Преобразуем к однородному виду, тогда получим уравнение в однородных координатах

$$Q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Проективные преобразования оставляют на месте окружность тогда и только тогда, когда при подстановке преобразованных координат (x', y', z') в Q получим $Q(x', y', z') = \lambda Q(x, y, z)$, где λ — некоторое число.

Заметим, что в данном случае $\lambda > 0$. Это можно доказать, если заметить, что существует плоскость в однородном пространстве, на которой

$Q > 0$ для любого ненулевого вектора, и не существует плоскости, на которой $Q < 0$ для любого ненулевого вектора. Для преобразованного выражения $Q(x', y', z')$ это свойство тоже должно выполняться, а значит $\lambda > 0$.

Умножение линейного преобразования однородного пространства на некоторое число не влияет на получающееся преобразование проективной плоскости, поэтому можно считать, что $\lambda = 1$.

Итак, мы будем изучать линейные преобразования, для которых выражение Q — *инвариант*. Множество таких преобразований обозначим L и будем называть трехмерной группой Лоренца, по аналогии с четырехмерной группой Лоренца (из физики) — группой преобразований между инерциальными системами отсчета, которая имеет инвариант $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$.

Заметим, что если бы мы имели дело с квадратичной формой $Q' = x^2 + y^2 + z^2$ (это скалярный квадрат вектора), то тогда у нас получилась бы не группа Лоренца, а обычная группа движений трехмерного пространства, оставляющих на месте начало координат. В дальнейшем мы увидим, что аналогия между Q' (будем называть пространство с формой Q' *евклидовым пространством*) и Q (будем называть пространство с формой Q *пространством Минковского*) позволяет использовать при изучении Q известные факты из стереометрии, относящиеся к евклидовому пространству.

Квадратичная форма Q' позволяет определить евклидово скалярное произведение

$$\begin{aligned}((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2))' = \\ = \frac{1}{2}(Q'(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) - Q'(x_1, y_1, z_1) - Q'(x_2, y_2, z_2)) = \\ = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,\end{aligned}$$

которое приводит к понятию перпендикулярности векторов в евклидовом пространстве. По аналогии можно определить

$$\begin{aligned}((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \\ = \frac{1}{2}(Q(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) - Q(x_1, y_1, z_1) - Q(x_2, y_2, z_2)) = \\ = x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2.\end{aligned}$$

Назовем это выражение *скалярным произведением Минковского.* Оно будет основным инструментом в последующих рассуждениях.

Если для двух векторов однородного пространства имеет место $(\overline{a}, \overline{b}) = 0$ будем говорить, что векторы перпендикулярны. Это определение не зависит от домножения каждого из векторов на ненулевые числа, а значит у нас появляется следующее понятие:

Определение. Точки a и b проективной плоскости называются *двойственными* относительно окружности S, если соответствующие им векторы однородного пространства $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны в скалярном произведении Минковского, соответствующем окружности S.

Заметим, что уравнение окружности S в однородных координатах можно записать как $(\overline{s}, \overline{s}) = 0$. Как и в случае евклидова скалярного произведения, множество векторов, перпендикулярных данному, образует плоскость. Соответственно, множество точек, двойственных данной точке, образует прямую, она называется *полярой* точки. Докажем лемму:

Лемма 1. *Пусть l — касательная к окружности S в точке p. Тогда прямая l — поляра точки p.*

Доказательство. Пусть точке p соответствует вектор $\overline{p}$ в однородном пространстве. Пусть q — любая другая точка l с соответствующим вектором $\overline{q}$. Предположим противное, то есть

$$(\overline{p}, \overline{q}) = m \neq 0.$$

Вспомним, что $(\overline{p}, \overline{p}) = 0$, тогда положим $n = \dfrac{(\overline{q}, \overline{q})}{2m}$ и получим

$$(\overline{q} - n\overline{p}, \overline{q} - n\overline{p}) = (\overline{q}, \overline{q}) - 2n(\overline{p}, \overline{q}) = (\overline{q}, \overline{q}) - 2nm = 0.$$

Итак, мы имеем вектор $\overline{q}' = \overline{q} - n\overline{p}$, неколлинеарный p. Соответствующая ему точка $q' \neq p$ лежит на l и на S — противоречие.

Из этой леммы можно вывести и следующую лемму, позволяющую явно строить поляру точки:

Лемма 2. *Пусть точка p лежит вне окружности S, l_1 и l_2 — касательные к S, касающиеся ее в точках q_1 и q_2 и проходящие через p. Тогда поляра точки p — это прямая, проходящая через q_1 и q_2.*

Доказательство этой леммы оставляем в качестве упражнения для читателя.

4. Симметрии относительно плоскости

Известно, что существует много евклидовых движений, оставляющих на месте начало координат, поэтому можно ожидать, что в группе Лоренца будет много преобразований. Начнем строить такие преобразования явно, используя аналогию с евклидовыми движениями. Рассмотрим одно из самых простых движений — симметрию относительно плоскости.

Пусть в пространстве дана плоскость α, перпендикулярная некоторому вектору $\overline{v}$. Тогда симметрия относительно плоскости α задается формулой (проверьте!)

$$\overline{x}' = \overline{x} - 2\frac{(\overline{x},\overline{v})'}{(\overline{v},\overline{v})'}\overline{v}.$$

Заменив в этой формуле евклидово скалярное произведение на скалярное произведение Минковского, мы получим преобразование, определенное для любого $\overline{v}$ с $(\overline{v},\overline{v}) \neq 0$

$$\sigma_{\overline{v}} : \overline{x} \to \overline{x} - 2\frac{(\overline{x},\overline{v})}{(\overline{v},\overline{v})}\overline{v}.$$

Следующие свойства $\sigma_{\overline{v}}$ проверяются прямым вычислением:

1. $\sigma_{\overline{v}}(\overline{x}) = \overline{x}$ тогда и только тогда, когда $(\overline{x},\overline{v}) = 0$;
2. $\sigma_{\overline{v}}(\overline{x}) = -\overline{x}$ тогда и только тогда, когда $\overline{x} = \lambda\overline{v}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$;
3. скалярное произведение Минковского сохраняется при этом преобразовании.

Соответствующее проективное преобразование можно охарактеризовать так:

1. $\sigma_v(x) = x$ тогда и только тогда, когда либо x и v двойственны относительно S, либо $x = v$;
2. окружность S при этом преобразовании переходит в себя и отношение двойственности точек относительно окружности при этом не меняется.

Рассмотрим вопрос о том, как найти образ заданной точки x при этом преобразовании.

Сначала разберем случай, когда точка x лежит на окружности. Проведем через v и x прямую l. Если она является касательной к окружности S, то по лемме 1 $\sigma_v(x) = x$. Иначе, l пересекает S в двух точках: x и некоторой x'. Точка $\sigma_v(x)$ обязана лежать и на l, и на S, кроме того, она не равна x, поэтому получается, что $x' = \sigma_v(x)$.

Теперь рассмотрим случай, когда x не лежит на окружности. Проведем через x две прямые: l, пересекающую S в точках a и b; m, пересекающую S в точках c и d. Мы можем найти образы точек a, b, c, d, провести через пары точек прямые $\sigma_v(l)$ и $\sigma_v(m)$, а точка их пересечения и будет искомой $x' = \sigma_v(x)$ (см. рис. 1).

Теперь читатель уже в состоянии доказать следующую лемму, которая бывает весьма полезна при решении задач, в формулировке которых присутствуют одна окружность и некоторое количество прямых:

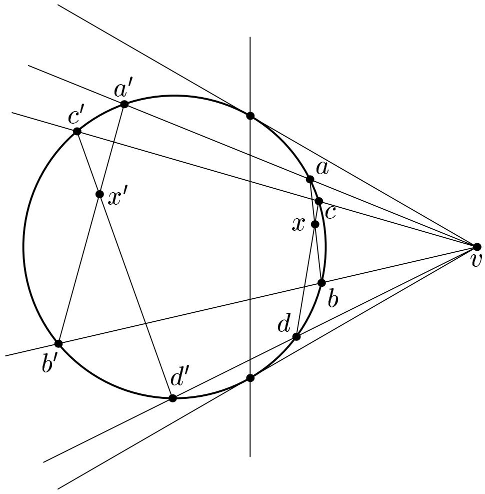

Рис. 1.

Лемма 3. *Любую точку внутри окружности S можно перевести некоторым преобразованием σ_v в центр окружности S. Любую прямую, не пересекающую окружность S, можно перевести в бесконечно удаленную прямую.*

5. Решение задач

Изложенные выше сведения о симметриях относительно плоскости из группы Лоренца позволяют практически мгновенно решить следующую стандартную задачу:

Задача 1. *Пусть на окружности S даны 4 различных точки a, b, c и d. Определим точки пересечения прямых $x = ac \cap bd$, $y = ab \cap cd$, $z = ad \cap bc$. Тогда все три точки x, y, z двойственны друг другу относительно окружности* (*см. рис.* 2).

Эта задача легко решается, если заметить, что преобразование σ_x оставляет на месте точки y и z; аналогично для σ_y и σ_z. Заметим, что соответствующие векторы $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ задают ортогональный базис для скалярного произведения Минковского в однородном пространстве.

Теперь проанализируем смысл теоремы Паскаля о вписанном шестиугольнике в терминах симметрий скалярного произведения Минковского. Для этого нам надо выяснить некоторые свойства композиции симметрий.

Начнем с симметрий в обычном евклидовом пространстве. Композиция двух симметрий — это вращение вокруг прямой пересечения плоскостей симметрии на некоторый угол. То же верно для симметрий скалярного произведения Минковского, за исключением того, что под «вращением» нужно понимать несколько иное понятие.

Если мы рассмотрим композицию трех симметрий, то в общем случае это еще более сложное преобразование, однако есть один случай, когда ситуация упрощается: это случай, когда все векторы симметрий лежат на одной прямой. В этом случае прямая, перпендикулярная всем трем векторам, остается на месте при всех преобразованиях, и нам остается выяснить, как устроена композиция трех симметрий относительно прямых, содержащих начало координат, на плоскости. Легко доказать, что эта композиция на самом деле тоже симметрия относительно некоторой прямой.

Для случая скалярного произведения Минковского верно аналогичное утверждение:

Лемма 4. *Если три вектора $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ компланарны, то композиция преобразований $\sigma_{\overline{z}} \circ \sigma_{\overline{y}} \circ \sigma_{\overline{x}}$ — это преобразование $\sigma_{\overline{t}}$ для некоторого вектора $\overline{t}$, компланарного $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда векторы $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ не лежат на одной прямой, иначе все три симметрии совпадают и утверждение очевидно.

Пусть все три вектора лежат в плоскости α. Можно заметить, что плоскость α переходит сама в себя. Далее будем работать в плоскости α. Каждая симметрия задает некоторое линейное преобразование в этой плоскости, которое меняет ее ориентацию, или, более строго, имеет отрицательный детерминант. Композиция трех таких преобразований тоже будет иметь отрицательный детерминант.

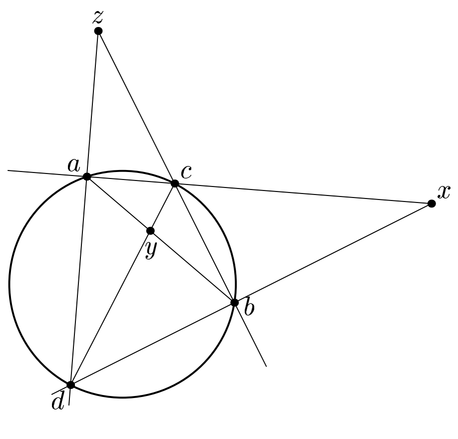

Рис. 2.

Теперь воспользуемся утверждением, что линейное преобразование плоскости с отрицательным детерминантом обязательно переводит некоторый вектор $\overline{t}'$ в сонаправленный себе и один вектор $\overline{t}$ в противонаправленный самому себе. Это можно доказать прямым вычислением; для читателей, знакомых с линейной алгеброй, заметим, что это следует из того, что у характеристического многочлена преобразования в этом случае обязательно есть два вещественных корня разных знаков.

Рассмотрим два случая:

1. $Q(\overline{t}) = 0$: плоскость α может содержать не более двух неколлинеарных векторов с нулевым скалярным квадратом. Если их два, то каждая симметрия переставляет их между собой и композиция трех симметрий тоже переставит их, в этом случае $\overline{t}$ не может быть одним из них. Если такой вектор в плоскости один, то по лемме 1 он ортогонален любому вектору из α, значит, при каждой симметрии он переводится в себя и не может поменять направление, то есть это не $\overline{t}$.

2. $Q(\overline{t}) \neq 0$: в этом случае $Q(\overline{t})$ и $Q(\overline{t}')$ не меняются при композиции симметрий, значит остается только вариант $\sigma_{\overline{z}} \circ \sigma_{\overline{y}} \circ \sigma_{\overline{x}}(\overline{t}) = -\overline{t}$ и $\sigma_{\overline{z}} \circ \sigma_{\overline{y}} \circ \sigma_{\overline{x}}(\overline{t}') = \overline{t}'$, в этом случае
$$(\overline{t}, \overline{t}') = (\sigma_{\overline{z}} \circ \sigma_{\overline{y}} \circ \sigma_{\overline{x}}(\overline{t}), \sigma_{\overline{z}} \circ \sigma_{\overline{y}} \circ \sigma_{\overline{x}}(\overline{t}')) = (\overline{t}, -\overline{t}') = -(\overline{t}, \overline{t}'),$$
значит $(\overline{t}, \overline{t}') = 0$ и $\overline{t}$ — искомый вектор.

Так как для любой симметрии $\sigma_{\overline{t}} \circ \sigma_{\overline{t}}$ является тождественным преобразованием, то как следствие из этой леммы мы получаем, что $\sigma_{\overline{z}} \circ \sigma_{\overline{y}} \circ \sigma_{\overline{x}} \circ \sigma_{\overline{z}} \circ \sigma_{\overline{y}} \circ \sigma_{\overline{x}}$ — тождественное преобразование. Это помогает нам доказать лемму:

Лемма 5. *Пусть точки x, y, z лежат на одной прямой и не лежат на окружности S. Пусть разные точки a, b, c, d, e, f лежат на окружности S и при этом следующие тройки точек коллинеарны: (x, a, b), (y, b, c), (z, c, d), (x, d, e) и (y, e, f) (см. рис. 3). Тогда точки z, f, a тоже коллинеарны.*

Доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения. Достаточно рассмотреть действие преобразования $\sigma_z \circ \sigma_y \circ \sigma_x \circ \sigma_z \circ \sigma_y \circ \sigma_x$ на точку a.

Из леммы 5 читатель легко выведет теорему Паскаля:

Теорема (Паскаля). *Пусть разные точки a, b, c, d, e, f лежат на одной окружности. Тогда точки пересечения прямых $x = ab \cap de$, $y = bc \cap ef$ и $z = cd \cap fa$ коллинеарны.*

Рассмотрим теперь еще одну задачу:

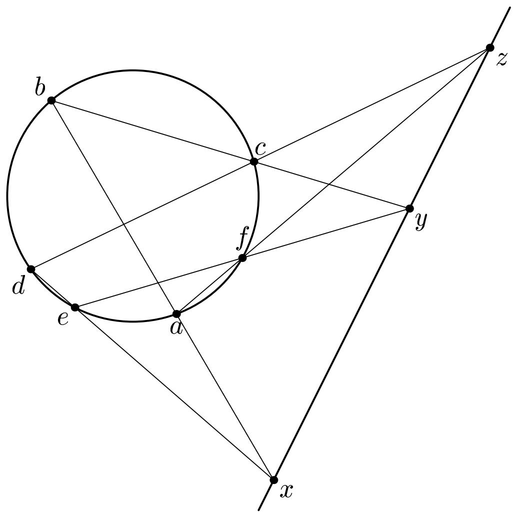

Рис. 3.

Задача 2. *Пусть вне окружности S даны разные точки x, y, z, x', y', z', при этом точка x двойственна y' и z', y двойственна x' и z', z двойственна y' и x' относительно окружности S. Докажите, что прямые $x'x$, $y'y$, $z'z$ пересекаются в одной точке.*

Чтобы решить эту задачу, перейдем в однородное пространство и для начала потренируемся на случае евклидового скалярного произведения. Рассмотрим случай, когда все скалярные произведения $(\overline{x},\overline{y})'$, $(\overline{y},\overline{z})'$, $(\overline{z},\overline{x})'$ не равны нулю. Тогда мы имеем трехгранный угол с ребрами вдоль $\overline{x}$, $\overline{y}$ и $\overline{z}$. Плоскость $\overline{x}'\overline{x}$ перпендикулярна плоскости $\overline{yz}$, $\overline{y}'\overline{y}$ перпендикулярна $\overline{xz}$, $\overline{z}'\overline{z}$ перпендикулярна $\overline{xy}$. Иначе говоря, плоскости $\overline{x}'\overline{x}$, $\overline{y}'\overline{y}$ и $\overline{z}'\overline{z}$ — это «высоты» трехгранного угла. Поэтому они будут пересекаться по некоторой прямой — это утверждение можно свести к теореме о высотах треугольника на плоскости с помощью рассмотрения некоторого сечения плоскостью и активного применения теоремы о трех перпендикулярах.

Эти рассуждения в принципе можно перенести и на случай скалярного произведения Минковского, но мы найдем более аналитическое решение, которое уже явно будет проходить в случае любого скалярного произведения. Обозначим за $\overline{x}''$ вектор, перпендикулярный $\overline{x}$ и $\overline{x}'$, аналогично обозначим $\overline{y}''$ и $\overline{z}''$. Утверждение задачи равносильно тому, что векторы $\overline{x}''$, $\overline{y}''$, $\overline{z}''$ компланарны. Найдем координаты этих векторов в базисе $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$.

Заметим, что из скалярных произведений $(\overline{x},\overline{y})$, $(\overline{y},\overline{z})$, $(\overline{z},\overline{x})$ не более одного равно нулю, иначе бы мы получили одно из равенств $\overline{x} = \overline{x}'$,

$\overline{y} = \overline{y}'$, $\overline{z} = \overline{z}'$ с точностью до умножения векторов на константы. Найдем координаты $\overline{x}''$. Так как $(\overline{x}'', \overline{x}') = 0$, то $\overline{x}''$ лежит в плоскости векторов $\overline{y}$ и $\overline{z}$, то есть $\overline{x}'' = a\overline{y} + b\overline{z}$. Запишем уравнение

$$0 = (\overline{x}, \overline{x}'') = a(\overline{x}, \overline{y}) + b(\overline{x}, \overline{z}).$$

Одно из его решений дает нам $\overline{x}'' = (\overline{x}, \overline{z})\overline{y} - (\overline{x}, \overline{y})\overline{z}$. Аналогично можно найти $\overline{y}'' = (\overline{x}, \overline{y})\overline{z} - (\overline{y}, \overline{z})\overline{x}$, $\overline{z}'' = (\overline{y}, \overline{z})\overline{x} - (\overline{x}, \overline{z})\overline{y}$.

Компланарность векторов теперь следует просто из того, что их сумма равна нулю.

В заключение предложим читателю пару задач для самостоятельного решения, первую из них можно легко решить с помощью изложенной выше техники, над второй же придется немного подумать:

Задача 3. *Дана окружность S и точки a и b вне ее. Возьмем на окружности точку x, пусть прямые ax и bx пересекают окружность также в точках a_x и b_x, не считая точки x. Построить циркулем и линейкой точку x так, чтобы прямая $a_x b_x$ была параллельна ab.*

Задача 4. *Дана окружность S, точки a и b вне ее и прямая l. Возьмем на окружности точку x, пусть прямые ax и bx пересекают окружность также в точках a_x и b_x, не считая точки x. Построить циркулем и линейкой точку x так, чтобы прямая $a_x b_x$ была параллельна l.*

Список литературы

[1] Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю. *Геометрия.* М.: Наука, 1990.

[2] Прасолов В. В. *Сборник задач по планиметрии.* Изд. 4-е. М.: МЦНМО, 2001.