Теоремы о покрывающих и непересекающихся треугольниках и их обобщения

Ф. В. Петров С. Е. Рукшин

На I Всесоюзной конференции по комбинаторной геометрии в 1985 году В. В. Произволовым была поставлена следующая задача (см. [1], [2]):

> *дан выпуклый n-угольник и n точек внутри него. Каждой точке сопоставляется сторона n-угольника (разным точкам — разные стороны). Рассматриваются треугольники, построенные на этих точках и соответствующих сторонах. Верно ли, что всегда можно установить соответствие между точками и сторонами так, чтобы получившиеся треугольники*
> (a) *не имели общих внутренних точек*;
> (b) *покрывали многоугольник.*

Задача сразу привлекла внимание многих специалистов по выпуклой и комбинаторной геометрии. Несмотря на элементарную формулировку, не был ясен даже ответ: появилось несколько неверных доказательств и контрпримеров к обеим задачам.

Ответ на оба вопроса оказался положительным. Доказательство появилось в 1987 году и опубликовано в статье [3]; там же были рассмотрены и возможности многомерных обобщений обеих задач.

Казалось бы, содержательная сторона вопроса исчерпана, однако в 1999 году на международной конференции по дискретной и вычислительной геометрии (Аскона, Швейцария) американский математик Andras Bezdek заметил, что прямой перенос методов статьи [3] на ситуацию, когда все точки лежат вне многоугольника (а тем более — когда часть точек лежит вне, а часть — внутри многоугольника) невозможен. Поэтому ситуация, в которой точки *не обязательно* лежат внутри многоугольника, требует отдельного изучения.

Вопрос Бездека оказался тем более интересным, что в *общей* ситуации ответы на вопросы (a) и (b) различны.

Полный ответ на поставленные вопросы получен в статье авторов [4] комбинаторно-геометрическими методами, в несколько упрощенном виде излагаемыми ниже. Там же рассмотрены и многомерные обобщения.

Независимо от них Р. Н. Карасёв [5] решил ту же задачу, применив неэлементарную топологическую технику.

Формулировка результатов

Теорема A. Для любого выпуклого n−угольника M на плоскости и любых k точек точек $X_1, X_2, \ldots, X_k$ плоскости при $k \leqslant [\frac{n+1}{2}]$ существует инъекция φ из множества $X = \{X_1, \ldots, X_k\}$ в множество Γ сторон многоугольника M такая, что треугольники T_i (возможно, вырожденные), образованные точками X_i и соответствующими им сторонами $G_i = \varphi(X_i)$, не имеют общих внутренних точек.

Теорема B. Для любого n-угольника M на плоскости и любых точек $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ плоскости существует биекция φ из множества $Y = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$ на множество Γ сторон многоугольника M такая, что треугольники T_i, образованные точками Y_i и соответствующими им сторонами $F_i = \varphi(Y_i)$, покрывают M.

Для доказательства этих теорем нам понадобятся две комбинаторные леммы, представляющие и самостоятельный интерес (так, лемма А была использована на отборе команды РФ на международную олимпиаду 2000 г.)

Комбинаторные леммы

Лемма A. Даны k юношей и $K \geqslant 2k-1$ девушек, некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Тогда можно поженить *всех* юношей так, чтобы каждый юноша, незнакомый со своей женой, был знаком только с незамужними девушками.

Доказательство. Возьмем наибольшее натуральное $s \leqslant k$ такое, что найдутся s юношей, знакомых в совокупности не более чем с $(s-1)$ девушками (если такого s не существует, то можно по лемме Холла поженить всех юношей на знакомых девушках). Рассмотрим этих s юношей и назовем их *скромными*, а знакомых с ними девушек — *общительными*. В силу максимальности числа s, любые t нескромных юношей знают (в совокупности) хотя бы $t+1$ необщительную девушку. Пользуясь леммой Холла, поженим каждого нескромного юношу на знакомой необщительной девушке. Останется еще хотя бы $K-(k-s)-(s-1) = K+1-k \geqslant k \geqslant s$ необщительных девушек, не выданных замуж. Поженим скромных юношей на s из них произвольным образом. Нетрудно увидеть, что приведенная матримониальная процедура дает набор бракосочетаний, удовлетворяющий условиям леммы.

Замечание. Если $K = (2k-2)$, то утверждение леммы уже не выполняется. Действительно, если $k-1$ девушка знакома со всеми юношами, а остальные девушки не знакомы ни с одним юношей, поженить юношей требуемым образом невозможно.

Лемма B. Даны k юношей и k девушек. Каждый юноша знает хотя бы одну девушку. Тогда можно некоторых юношей поженить на знакомых девушках так, чтобы ни один женатый юноша не знал ни одной незамужней девушки.

Доказательство. Возьмем *наименьшее* $s \leqslant l$ такое, что найдутся s юношей, знакомых в совокупности не более чем с $(s-1)$ девушкой (если такого s не существует, то по лемме Холла можно поженить всех юношей на знакомых девушках). Назовем, как и в лемме A, этих юношей *скромными*, а их знакомых девушек — *общительными*. Заметим, что $s > 1$ по условию (каждый юноша знает хотя бы одну девушку).

Выберем $(s-1)$ юношу из этих s. В силу минимальности s любые h из этих $(s-1)$ юношей знакомы в совокупности не менее чем с h девушками. Поженим их, пользуясь леммой Холла, на всех общительных девушках.

Заметим, что построенный набор бракосочетаний удовлетворяет условиям леммы.

Доказательство теоремы A

Посадим в каждую точку X_i по юноше, а на каждую сторону Γ_j — по девушке. Познакомим юношу в точке X_i и девушку на стороне Γ_j, если X_i лежит по другую сторону от прямой, содержащей Γ_j, нежели многоугольник M.

Поженим юношей на девушках согласно лемме A (условия леммы A выполнены: если $k \leqslant [\frac{n+1}{2}]$, то $n \geqslant 2k-1$).

Назовем такое соответствие вершин сторонам допустимым.

Назовем *характеристикой* допустимого соответствия произведение расстояний от точек внутри M до соответствующих им сторон, деленное на произведение расстояний от точек вне M до соответствующих сторон.

Докажем, что допустимое соответствие с минимальной характеристикой удовлетворяет всем требованиям теоремы.

Для этого нам понадобится следующая нехитрая тригонометрическая

Лемма. Если $0 < \theta < \pi$, то функция $h(\gamma) = \frac{\sin(\theta-\gamma)}{\sin\gamma}$ убывает на интервале $(0, \theta)$.

Для доказательства достаточно заметить, что $h(\gamma) = \sin\theta \operatorname{ctg}\gamma - \cos\theta$.

Предположим, что допустимое соответствие с минимальной характеристикой не удовлетворяет условиям теоремы А и, скажем, треугольники X_1AB и X_2CD пересекаются (точкам X_1 и X_2 сопоставлены стороны AB и CD соответственно). Не умаляя общности, можно считать, что лучи AB и DC пересекаются в точке P (в случае, когда прямые AB и CD параллельны, рассуждения лишь упрощаются). Из допустимости рассматриваемого соответствия следует, что если точка X_1 лежит по ту же сторону от прямой AB, что и многоугольник M, то она лежит и внутри угла APC; аналогично, если точка X_2 лежит по ту же сторону от прямой DC, что и многоугольник M, то она лежит и внутри угла APC.

Значит, либо обе точки X_1 и X_2 лежат внутри APC, либо обе внутри вертикального с ним угла (иначе треугольники X_1AB и X_2CD не пересекутся).

В первом случае имеем $\angle X_1PB > \angle X_2PB$, значит по тригонометрической лемме

$$(X_1P\sin X_1PB)\cdot(X_2P\sin X_2PC) > (X_1P\sin X_1PC)\cdot(X_2P\sin X_2PB),$$

стало быть, если юноши в точках X_1 и X_2 поменяются женами, то соответствие останется допустимым, а его характеристика уменьшится. Это противоречит выбору допустимого соответствия с минимальной характеристикой.

Второй случай разбирается аналогично первому.

Теорема А доказана.

Точность оценки в теореме А

Докажем, что оценка $[\frac{n+1}{2}]$ для числа точек из теоремы А точная. А именно, для любого натурального $n \geqslant 3$ существует n-угольник M на плоскости и $[\frac{n+1}{2}]+1=[\frac{n+3}{2}]$ точек на плоскости такие, что не существует соответствия, описанного в теореме А. Построим пример, в котором все точки X_i совпадают.

Рассмотрим для определенности случай $n=2k$. Возьмем равносторонний треугольник A_1XA_{k+1}. Обозначим меньшую дугу A_1A_{k+1} описанной окружности через ω. Отметим на дуге w точки $A_2,\ldots,A_k$ (расположенные в указанном порядке в направлении от A_1 к A_{k+1}). Пусть ω' — дуга, симметричную дуге ω относительно отрезка A_1A_{k+1}. Пусть лучи XA_i $(i=1,\ldots,(k+1))$ пересекают w' в точках $B_1,\ldots,B_{k+1}$ $(B_1=A_1$, $B_{k+1}=A_{k+1})$. Очевидно, $2k$-угольник $M=A_1A_2\ldots A_{k+1}B_kB_{k-1}\ldots B_2$ является выпуклым. Для каждого $i=1,2,\ldots,k$ треугольник XB_iB_{i+1} содержится в треугольнике XA_iA_{i+1}, поэтому при выборе системы непересекающихся по внутренним точкам треугольников с вершиной в точке X и основаниями, являющимися сторонами M, из двух треугольников

XB_iB_{i+1} и XA_iA_{i+1} выбрано не более одного, откуда следует, что всего таких треугольников можно взять не более $k = [\frac{n+1}{2}]$. Пример для нечетного $n = 2k+1$ получается из только что построенного добавлением вершины A_1', лежащей в сегменте, образованном отрезком A_1A_2 и дугой ω. Тогда из трех треугольников XA_1B_2, XA_1A_1' и $XA_1'A_2$ можно выбрать не более двух, а из каждой пары XB_iB_{i+1} и XA_iA_{i+1} для $i = 2, \ldots, k$ по-прежнему не более одного, стало быть всего не более $2 + (k-1) = k+1 = [\frac{n+1}{2}]$ треугольников.

Доказательство теоремы B

Как и в доказательстве теоремы A, посадим в каждую вершину Y_i по юноше, а на каждую сторону Γ_j — по девушке. Познакомим юношу в точке Y_i и девушку на стороне Γ_j, если Y_i лежит по ту же сторону от прямой, содержащей Γ_j, что и многоугольник M.

Легко видеть, что выполнены условия леммы B (каждая точка лежит в одной полуплоскости с многоугольником M относительно хотя бы одной стороны M). Поженим некоторых юношей согласно этой лемме и назовем соответствующие этим бракам наборы треугольников допустимыми. Характеристикой допустимого набора будем называть произведение расстояний от точек, соответствующих женатым юношам до сопоставленных им сторон.

Выберем набор с максимальной характеристикой. Докажем, что треугольники этого набора покрывают многоугольник M полностью (таким образом, нам, вообще говоря, понадобится меньше, чем n треугольников).

Предположим, что некоторая точка Z многоугольника $M = A_1A_2\ldots \ldots A_n$ не покрыта. Рассмотрим один из треугольников набора, скажем $Y_1A_1A_2$. Один из лучей A_1Z, A_2Z идет вне этого треугольника (иначе точка Z была бы покрыта). Предположим для определенности, что это луч A_2Z.

Как легко увидеть, юноша в вершине Y_1 знаком с девушкой на стороне A_2A_3. Из допустимости получаем, что девушка на стороне A_2A_3 выдана замуж. Не умаляя общности, ее муж находится в вершине Y_2. Повторим аналогичное рассуждение для треугольника $Y_2A_2A_3$.

Возможны уже два случая:

1) луч A_2Z идет вне треугольника $Y_2A_2A_3$. Тогда по тригонометрической лемме получаем

$$\frac{d(Y_1, A_1A_2)}{d(Y_1, A_2A_3)} < \frac{d(Z, A_1A_2)}{d(Z, A_2A_3)} < \frac{d(Y_2, A_1A_2)}{d(Y_2, A_2A_3)},$$

где через $d(X, l)$ обозначено расстояние от точки X до прямой l. Это означает, что если юноши в Y_1 и Y_2 поменяют жен, набор треугольников останется допустимым и будет иметь бо́льшую характеристику, что противоречит выбору допустимого набора с максимальной характеристикой.

2) луч A_3Z идет вне треугольника $Y_2A_2A_3$. Тогда продолжим наш процесс. Мы либо придем к случаю, аналогичному первому, либо получим цикл: лучи A_iZ идут вне треугольников $A_{i-1}A_iZ$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ (нумерация вершин A_i циклическая по модулю n). Тогда перемножим неравенства

$$\frac{d(Y_{i-1}, A_{i-1}A_i)}{d(Y_{i-1}, A_iA_{i+1})} < \frac{d(Z, A_{i-1}A_i)}{d(Z, A_iA_{i+1})}$$

по всем $i = 1, 2, \ldots, n$, в правой части полученного неравенства будет 1, а в левой — отношение характеристик двух наборов треугольников: исходного и набора треугольников $\{Y_iA_{i+1}A_{i+2}\}$. Заметим, что второй набор также допустимый, что опять же приводит к противоречию с выбором набора.

Точность оценки теоремы B

Очевидно, $(n-1)$ точку не всегда можно соединить со сторонами так, чтобы получающиеся треугольники покрыли весь n-угольник — достаточно поместить все эти точки в одну точку внутри многоугольника M.

На самом деле существует даже такой пример, в котором все точки лежат вне многоугольника. Действительно, рассмотрим вблизи середины каждой стороны выпуклого n-угольника M какую-нибудь точку, лежащую вне M. Тогда любые $(n-1)$ точки из этих n, как легко понять, подходят в качестве требуемого примера (иначе с каждой стороной должна быть соединена хотя бы одна из точек для того, чтобы покрыть внутренние точки M, близкие к сторонам).

Многомерные обобщения

Опираясь на те же леммы, читатель с легкостью докажет следующие обобщения теорем A и B:

Теорема A$'$. Для любого выпуклого n-гранника M в пространстве $\mathbb{R}^m$ и любых точек $X_1, X_2, \ldots, X_k \in \mathbb{R}^m$ при $k \leqslant [\frac{n+1}{2}]$ существует инъекция φ из множества $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ в множество Γ граней многогранника M такая, что пирамиды $V_i = \operatorname{conv}(X_i, F_i)$, образованные вершинами X_i и соответствующими им гранями $F_i = \varphi(X_i)$, не имеют общих внутренних точек.

Теорема B$'$. Для любого выпуклого n-гранника M в пространстве $\mathbb{R}^m$ и любых точек $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \in \mathbb{R}^m$ существует биекция φ из множества $Y = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$ на множество Γ граней M такая, что объединение пирамид $U_i = \mathrm{conv}(Y_i, F_i)$, образованных вершинами Y_i и соответствующими им гранями $F_i = \varphi(Y_i)$, полностью покрывает многогранник M.

Авторы признательны Д. Максимову и Н. Кушпель за техническую помощь при написании данной статьи.

Список литературы

[1] Первая конференция по комбинаторной геометрии и ее приложениям, тезисы сообщений / Под ред. В. Г. Болтянского. Батуми, 1985.

[2] Математическое просвещение. Третья серия, вып. 6. М.: МЦНМО, 2002. С. 134.

[3] А. В. Богомольная, Ф. Л. Назаров, С. Е. Рукшин. *О покрытии выпуклого многоугольника треугольниками с фиксированными вершинами* // Математические заметки, 1988. Т. 44, №2. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы.

[4] Ф. В. Петров, С. Е. Рукшин. *Две теоремы о выпуклых многогранниках* // Труды Санкт-Петерб. Мат. Общ., 2001. №8

[5] R. N. Karasev. *On a Conjecture of A. Bezdek* // Discrete & Computational Geometry, 2002. V. 27, no 3. P. 419–439.