

Динамические системы с упругими отражениями и механизм ускорения Ферми

Л. Д. Пустыльников

В названии статьи сфокусирована проблема из области физики, однако приводимые ниже утверждения и доказательства носят строго математический характер.

Результаты, описанные в статье, не только дают ответы на поставленные ранее чисто физические проблемы, но и содержат решения возникающих в этой связи чисто математических задач. Методы, обсуждаемые далее, позволяют решать аналогичные проблемы как в области математики, так и механики и физики.

Физическая задача, ответ на которую по существу здесь описан, это поставленная известным физиком Энрико Ферми проблема: объяснить происхождение в космическом пространстве частиц с высокими энергиями на основе статистики механических столкновений частиц с периодически движущимися в космосе макрообъектами (см. [1]). В основе решения этой задачи лежит исследование специального класса динамических систем, описывающих движение материальной точки внутри некоторой области с движущейся границей.

В результате столкновения с границей точка испытывает упругий удар, который будет рассматриваться в дальнейшем как в рамках классической (ньютоновой), так и в рамках релятивистской механики (теории относительности). Для понимания математических утверждений, сформулированных и доказанных в настоящей статье, знание механики и теории относительности не обязательно. Общее описание физической проблемы дано в п. 1, а в пп. 2–4 исследуются три основные динамические системы, связанные с этой физической проблемой. По существу, речь идет о возможности или невозможности ухода на бесконечность траекторий некоторых специальных преобразований, задаваемых элементарными функциями. Эти преобразования обозначаются ниже буквами A , D и S . Несмотря на простоту формулировок полученных результатов (см. теоремы 1, 2 и 3), их доказательства связаны с глубокими теориями в математике. Эти доказательства приведены в работе на уровне идей.

Отметим, что развитые в ходе доказательств методы, примененные к модификациям описанных здесь динамических систем, позволили дать

строгое решение стоящей со времен Клаузиуса, Больцмана и Гиббса проблемы обоснования второго начала термодинамики — закона возрастания энтропии — на основе механики ([2]).

1. ПРОБЛЕМА ОБОСНОВАНИЯ МЕХАНИЗМА УСКОРЕНИЯ ФЕРМИ

Для объяснения происхождения быстрых частиц с высокими энергиями в космическом пространстве Э. Ферми в 1949 г. в работе [1] предложил статистический механизм, согласно которому энергия частиц при взаимодействии с периодически двигающимися в космосе макрообъектами возрастает. Под макрообъектами здесь следует понимать поля звезд, галактик и других объектов в космосе. Природа этого механизма может быть изучена уже на самых простых механических моделях. С этой целью математик Станислав Улам рассмотрел следующую динамическую систему ([3]), которая впоследствии получила название «модель Ферми – Улама»: упругий шарик движется в вертикальном направлении q между двумя параллельными горизонтальными бесконечно тяжелыми стенками, каждая из которых совершает вертикальные периодические колебания по законам $q = f_1(t)$ и $q = f_2(t)$ (рис. 1). Здесь t — время, а $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — гладкие функции, имеющие одинаковый период по t , причем $f_2(t) > f_1(t)$ при всех t . Улам предлагал изучать два случая: первый случай, когда $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — синусоиды, и второй случай, когда $f_1(t)$ — синусоида, а $f_2(t) \equiv \ell$, т. е. когда верхняя стенка неподвижна. Гипотеза Ферми и Улама применительно к этой динамической системе состояла в том, что в результате столкновений со стенками энергия шарика будет расти до бесконечности. Эта проблема относится к классической ньютоновской механике, и первоначально ее исследование проводилось численными методами (см. [3]). Однако результаты этих исследований оказались противоположны тем,

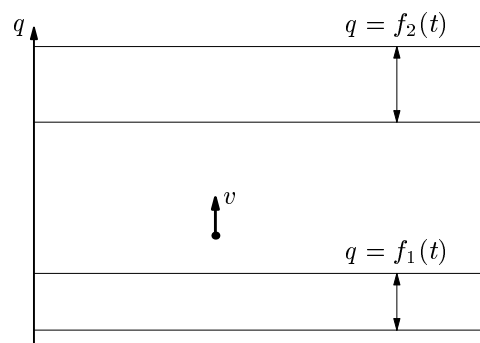


Рис. 1. Модель Ферми – Улама

которые ожидались. Несмотря на простоту формулировки проблема Ферми – Улама оказалась, как это часто бывает в математике, нетривиальной, и ее решение было получено только спустя несколько десятков лет впервые в работе [4], а затем в работах [5–7] и в обзоре [2]. Было доказано, что для любых функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ указанного вида и любых начальных данных системы для всех моментов времени $t \geq t_0$ скорость и энергия шарика ограничена по модулю некоторой константой, зависящей только от начальных данных в фиксированный момент времени t_0 и не зависящей от t . Таким образом, ответ, дающий решение проблемы Ферми – Улама, оказался отрицательным в рамках классической механики. Однако гипотеза Ферми о возможности неограниченного роста энергии частицы при ее механических столкновениях с периодически движущимися стенками оказывается справедливой, если рассматривать модель Ферми – Улама в рамках теории относительности: неограниченный, растущий по экспоненте от времени, рост энергии шарика возможен для начальных положений и скоростей, расположенных внутри множества, имеющего положительный объём [2, 8].

Этот результат доказан при выполнении следующего условия, введенного в работе [2]: существует вещественное число t_0 и целое число m_0 такие, что справедливы соотношения: $f_1(t) = f_1(t + 2\pi)$, $f_2(t) = f_2(t + 2\pi)$ при всех t , и

$$\frac{(1 + \dot{f}_1(t_0))(1 - \dot{f}_2(t_0))}{(1 - \dot{f}_1(t_0))(1 + \dot{f}_2(t_0))} > 1, \quad f_2(t_0) - f_1(t_0) = 2\pi m_0 \quad (1)$$

(точка над функцией обозначает дифференцирование по t , т. е. $\dot{f}(t) = \frac{df}{dt}(t)$). Учет релятивистского фактора в модели Ферми – Улама сказывается только на законе преобразования скорости и энергии шарика при его упругих отражениях от стенок. Он вытекает из законов сохранения энергии и импульса в теории относительности до и после столкновения массивной частицы со стенкой *конечной* массы, а затем перехода к пределу массы стенки к бесконечности.

В п. 4 изучается еще одна популярная динамическая система, связанная с механизмом ускорения Ферми. Она описывает движение материальной точки, падающей в поле тяжести с постоянным ускорением на бесконечно тяжелую горизонтальную стенку, которая колеблется в вертикальном направлении согласно периодическому по времени закону и сталкивается с частицей по закону упругого удара (рис. 2). Впервые эта модель была изучена в статье [9], где было доказано существование бесконечного множества (более точно, континуума) начальных данных, приводящих к неограниченному росту скорости шарика. В последующих работах ([10] и [11]) было доказано, что это множество имеет бесконечный объём.

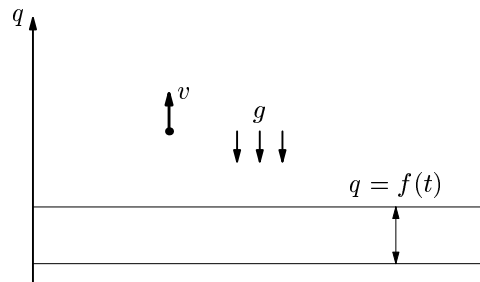


Рис. 2. Ускорительная модель с одной стенкой в поле тяжести

2. МОДЕЛЬ ФЕРМИ – УЛАМА

Для простоты изложения рассмотрим только тот случай модели Ферми – Улама, в котором верхняя стенка неподвижна и задается уравнением $q = \ell$, а нижняя стенка движется в вертикальном направлении q по периодическому закону $q = f(t)$, где $f(t)$ — бесконечно дифференцируемая 2π -периодическая функция: $f(t) = f(t + 2\pi)$, причем $|f(t)| < \ell$ (рис. 3).

Случай двух колеблющихся стенок мы рассматривать здесь не будем, так как все идеи демонстрируются уже рассматриваемым случаем; отличие лишь в технических деталях.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что в начальный момент времени t_0 шарик имел скорость v_0 . Тогда во все последующие моменты времени $t \geq t_0$ абсолютная величина скорости v шарика не превосходит константу, зависящую только от v_0 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Предположим, что в некоторый момент времени t столкновения с нижней стенкой шарик приобрел скорость $v > 0$, а в следующий за t момент времени t' столкновения ша-

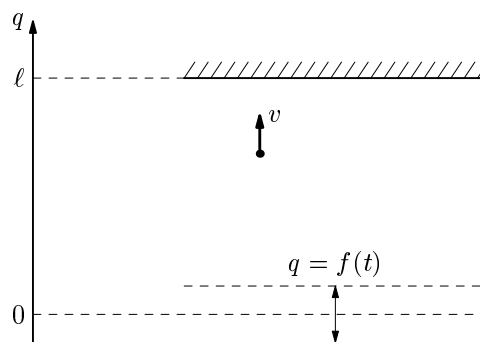


Рис. 3. Модель Ферми – Улама с неподвижной верхней стенкой

рика с нижней стенкой он приобрел скорость v' . Пара (t, v) однозначно определяет пару (t', v') . В результате возникает отображение A плоскости \mathbb{R}^2 с полярными координатами (t, v) (здесь t — угол, $0 \leq t < 2\pi$, а v — радиус), имеющее вид: $A(t, v) = (t', v')$. Отображение A , в силу постановки задачи, задается следующими равенствами:

$$t' = t + \frac{\ell - f(t)}{v} + \frac{\ell - f(t')}{v}; \quad v' = v + 2f'(t'). \quad (2)$$

Равенство для t' получается прибавлением к t времени движения шарика вверх до столкновения с верхней стенкой и времени движения вниз — после этого столкновения. Равенство для v' легко получается из законов сохранения импульса и энергии в момент времени t' столкновения шарика с нижней стенкой (при вычислениях, естественно, массу нижней стенки следует сначала считать конечной, а затем устремить ее к бесконечности).

Для доказательства теоремы нам потребуется важная лемма (лемма 1), которая дает одно из условий применимости общей теоремы к преобразованию (2). Эта общая теорема позволяет установить, что преобразование A имеет много *инвариантных* (т. е. переходящих в себя под действием A) *замкнутых* кривых. Следует отметить, что без выполнения заключения леммы 1 о пересечении кривой и ее образа инвариантных кривых может и не быть (простейший пример: прибавим к радиусу v одно и то же маленькое число $\varepsilon > 0$).

ЛЕММА 1. Пусть γ — замкнутая кривая без самопересечений на плоскости \mathbb{R}^2 , окружающая круг достаточно большого радиуса с центром в начале координат $v = 0$. Тогда кривая γ пересекает кривую $A(\gamma)$, являющуюся образом γ при отображении A .

ИДЕЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЛЕММЫ 1 основана на том, что преобразование A сохраняет «площадь» на плоскости \mathbb{R}^2 (здесь кавычки означают, что сохраняется мера, эквивалентная площади). Поэтому, если бы кривые γ и $A(\gamma)$ не пересекались, то одна из них содержалась бы в области плоскости, ограниченной другой кривой. Однако это невозможно в силу того, что «площадь» области, ограниченной γ , должна совпадать с «площадью» области, ограниченной кривой $A(\gamma)$. Полученное противоречие и завершает доказательство леммы 1. (Подробности см. в [4].)

Продолжим доказательство теоремы 1. Мы воспользуемся идеей, которая оказывается полезной при решении многих математических задач: перейти в окрестность бесконечно удаленной точки (бесконечности) и изучить действие преобразования A там. Дело в том, что в формуле (2) для выражения t' есть член $2\ell/v$. При больших v этот член очень мал и входит в качестве слагаемого линейно. Таким образом, в окрестности

$v = \infty$ величина $y = 2\ell/v$ будет мала, — а это нам и нужно для применения общей теоремы. Поэтому введем новую переменную $y = 2\ell/v$ и выразим через нее преобразование A . Нетрудно проверить, что преобразование A , выраженное в переменных t, y , в силу (2) превращается в преобразование $B: (t, y) \rightarrow (t', y')$, задающееся формулами:

$$t' = t + y + \varphi(y) = t + y - \frac{(f(t) + f(t'))y}{2\ell}, \quad (3)$$

$$y' = y + \psi(t, y) = y - \frac{2y^2 \dot{f}(t')}{2\ell + 2yf(t')}. \quad (4)$$

Заметим, что для простоты записи мы ввели функции $\varphi(t, y)$ и $\psi(t, y)$, изображающие дроби в правых частях. Переменная t , как и раньше, играет роль угла, а переменная y — роль радиуса.

Если при достаточно малом числе $\varepsilon > 0$ переменная y удовлетворяет неравенству $|y| \leq \varepsilon$, то в силу (3) и (4) справедливы следующие оценки сверху:

$$|\varphi(t, y)| < c_1|y|, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, y) \right| < c_1, \quad |\psi(t, y)| < c_2|y|^2. \quad (5)$$

Здесь c_1 и c_2 — некоторые константы, причем, что очень существенно, константа c_1 удовлетворяет неравенству

$$0 < c_1 < 1. \quad (6)$$

Введем теперь новую переменную r по формуле $r = y/\varepsilon$, причем t будем рассматривать, как и раньше в качестве угловой переменной, меняющейся в области $0 \leq t < 2\pi$. В результате действия этого преобразования кольцо $y \leq \varepsilon$, $y \neq 0$ (т. е. круг радиуса ε с выколотым центром) растянется и превратится в круг единичного радиуса $r \leq 1$ с выколотым центром: $r \neq 0$. Выразив преобразование B через новые переменные t и r , мы получим преобразование $U: (t, r) \rightarrow (t', r')$, зависящее от малого параметра $\varepsilon > 0$, которое в силу (3) и (4) имеет вид

$$t' = t + \varepsilon r + \omega(t, r), \quad r' = r + \rho(t, r). \quad (7)$$

Функции $\omega(t, r)$ и $\rho(t, r)$ имеют по t период 2π и удовлетворяют, в силу (5), неравенствам

$$|\omega(t, r)| < c_1 \varepsilon r, \quad \left| \frac{\partial \omega}{\partial r}(t, r) \right| < c_1 \varepsilon, \quad |\rho(t, r)| < c_2 \varepsilon r^2. \quad (8)$$

В результате мы получим отображение U плоскости \mathbb{R}^2 , к которому и будет применяться общая теорема о существовании инвариантных замкнутых кривых.

Итак, мы рассматриваем преобразование U в кольце $0 < r \leq 1$. Согласно лемме 1, при малом $\varepsilon > 0$ каждая замкнутая кривая в этом кольце,

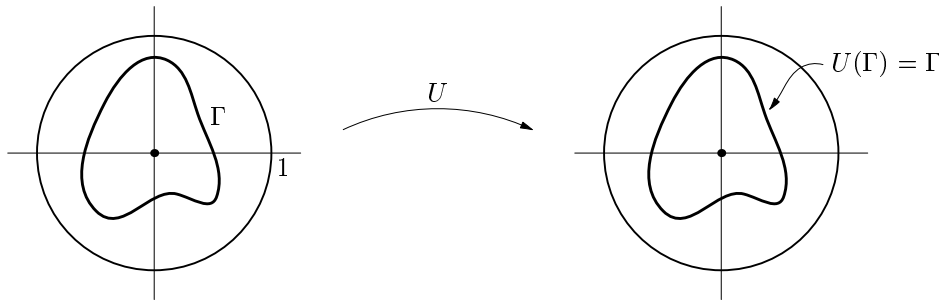


Рис. 4. Существование инвариантной кривой Γ в кольце $0 < r \leq 1$

окружающая точку $r = 0$, пересекается со своим образом при отображении U . Поэтому, если параметр ε — достаточно малое положительное число, то, в силу (7) и (8), мы попадаем в сферу применения общей теоремы о существовании замкнутых инвариантных кривых для отображения кольца, близкого к повороту на угол, зависящий от радиуса, и удовлетворяющего указанному выше свойству пересечения замкнутых кривых с их образами при этом отображении.

Впервые эта теорема при более сильных ограничениях была доказана Ю. Мозером в [12], а ее обобщение, применимое здесь, в котором существенную роль играет неравенство (6), доказано автором в работе [6]. Согласно этой общей теореме, при малом параметре $\varepsilon > 0$ в кольце $0 < r \leq 1$ существует замкнутая кривая Γ , окружающая точку $r = 0$ и инвариантная относительно преобразования U (рис. 4). Возьмем прообраз кривой Γ на плоскости t, r при второй замене переменных, т. е. кривую Λ на плоскости t, y . Поскольку Γ инвариантна относительно преобразования U (т. е. $U(\Gamma) = \Gamma$), Λ будет инвариантна относительно преобразования B : $B(\Lambda) = \Lambda$. При этом, напомним, кривая Λ содержится в области $|y| \leq \varepsilon$. Сделаем теперь еще один обратный шаг — перейдем от плоскости t, y назад в плоскость t, v . Прообраз кривой Λ в исходной плоскости t, v есть кривая Π , инвариантная относительно исходного преобразования A и содержащая круг, радиус которого будет стремиться к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Следовательно, область плоскости t, v , заключенная внутри кривой Π , инвариантна относительно преобразования A , т. е. под действием A она не выходит за пределы этой кривой. Это и означает, что при начальной скорости v_0 , по модулю не превышающей радиус этого круга, заключенного в область, ограниченную кривой Π , скорость v в любой другой момент времени t будет также ограничена по модулю.

Теорема 1 доказана.

3. РЕЛЯТИВИСТСКИЙ АНАЛОГ МОДЕЛИ ФЕРМИ – УЛАМА

В этом разделе мы изучаем тот же частный случай модели Ферми – Улама, что и в п. 2, но в рамках релятивистской механики (теории относительности). Релятивистский эффект здесь проявляется только в том, что упругий удар шарика об осциллирующую нижнюю стенку учитывает законы сохранения импульса и энергии в теории относительности, в то время как закон отражения от верхней неподвижной стенки в точности такой же, как в ньютоновской механике: после удара меняется только направление (но не величина) скорости шарика.

Не ограничивая общности, предположим, что масса шарика равна 1, а все скорости измеряются в долях скорости света, т. е. скорость света полагается равной 1, а абсолютные величины всех остальных скоростей меньше 1. В этом случае, как известно из теории относительности ([13]), скорость шарика v и его энергия E связаны между собой равенством $E = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$. Так же, как и в предыдущем параграфе, рассмотрим частный случай модели Ферми – Улама, где мы предполагаем, что верхняя стенка — неподвижная и задается уравнением $q = \ell$, а нижняя стенка движется в вертикальном направлении q согласно периодическому закону $q = f(t)$, где $f(t)$ — дифференцируемая 2π -периодическая функция такая, что $|f(t)| < \ell$ (рис. 3). Мы докажем, что в этой модели энергия E может неограниченно возрастать; скорость шарика при этом будет стремиться к скорости света.

Предположим, что после одного из моментов времени t столкновения с нижней стенкой шарик приобрел энергию E , а после следующего за t момента времени t' столкновения с нижней стенкой шарик приобрел энергию E' . Рассмотрим отображение D плоскости с координатами t, E , $D: (t, E) \rightarrow (t', E')$, которое задается следующими равенствами:

$$t' = t + \sqrt{\frac{E^2}{E^2 - 1}}(2\ell - f(t) - f(t')), \quad (9)$$

$$E' = E \frac{1 + \dot{f}(t')}{1 - \dot{f}(t')} + \frac{2\dot{f}(t')}{1 - \dot{f}^2(t')}(\sqrt{E^2 - 1} - E). \quad (10)$$

Равенство (9) для t' получается из первого равенства (2) для t' подстановкой $v = \sqrt{\frac{E^2 - 1}{E^2}}$, а равенство (10) для E' получается из релятивистских законов сохранения импульса и энергии, которые здесь мы опускаем.

Прежде чем формулировать и доказывать точную математическую теорему (теорему 2), укажем основную идею построения траекторий с неограниченным ростом энергии. Для предельного преобразования \hat{D} , введенного в доказательстве и аппроксимирующего преобразование D при неограниченном возрастании энергии, строится специальная резонансная

траектория, такая что шарик сталкивается с нижней стенкой в моменты времени, сравнимые с t_0 по модулю 2π (здесь t_0 — число, введенное в условии теоремы 2). Поэтому после каждого удара с нижней стенкой энергия шарика увеличивается примерно в одно и то же число раз, и то же самое справедливо для некоторой окрестности этой траектории, поскольку она оказывается устойчивой (по Ляпунову). Именно в этом и состоит принципиальное отличие релятивистского случая от классического: в рамках ньютоновской механики модель Ферми – Улама вообще не имеет резонансных траекторий!

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что выполнено следующее условие: существует такое число t_0 , что $\dot{f}(t_0) > 0$ и $\ell - f(t_0) = \pi t_0$, где t_0 — некоторое положительное целое число. Тогда существуют такие числа $\varepsilon_0 > 0$ и $E_0 > 0$, что если начальные данные t, E удовлетворяют условиям $|t - t_0| \leq \varepsilon_0$, $E \geq E_0$, то у траектории преобразования D , $(t_n, E_n) = D^n(t, E)$ ($n = 1, 2, \dots$), величина энергии E_n стремится к бесконечности при $n \rightarrow \infty$, причем ее рост быстрее, чем экспоненциальный: $E_n > cEk_0^n$, где $k_0 = \frac{1 + \dot{f}(t_0)}{1 - \dot{f}(t_0)} > 1$, а $c > 0$ — константа, не зависящая от t, E и n .*

ЗАМЕЧАНИЕ. В общем случае, когда двигаются две стенки, условие теоремы 2 заменяется на условие (1), п. 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Главная идея доказательства теоремы 2 аналогична идее доказательства теоремы 1 и состоит в том, чтобы рассмотреть действие преобразования D в окрестности бесконечно удаленной точки $E = \infty$. Однако здесь переход к бесконечно удаленной точке будет осуществляться по-другому.

С этой целью заметим, что в силу (9) и (10) преобразование D при $E \rightarrow \infty$ сходится к преобразованию $\hat{D}: (t, E) \rightarrow (\hat{t}, \hat{E})$, имеющему вид

$$\hat{t} = t + 2\ell - f(t) - f(\hat{t}), \quad (11)$$

$$\hat{E} = E \frac{1 + \dot{f}(\hat{t})}{1 - \dot{f}(\hat{t})}, \quad (12)$$

а модули разностей $|\hat{t} - t'|$, $|\hat{E} - E'|$ являются величинами порядка $1/E$, т. е.

$$|\hat{t} - t'| + |\hat{E} - E'| < \frac{\hat{c}_1}{E}, \quad (13)$$

где \hat{c}_1 — константа, не зависящая от переменных t и E .

Введем новую переменную $\eta = \ln E$. Тогда преобразования D и \hat{D} , выраженные через переменную η , перейдут соответственно в преобразования P и \hat{P} :

$$P: (t, \eta) \rightarrow (t', \eta'), \quad \hat{P}: (t, \eta) \rightarrow (\hat{t}, \hat{\eta}), \quad (14)$$

где

$$\eta' = \ln E', \quad \hat{\eta} = \ln \hat{E}, \quad (15)$$

а величины t' и \hat{t} здесь те же, что и в (9) и (11). При этом неравенство (13) переходит в неравенство такого же вида:

$$|\hat{t} - t'| + |\hat{\eta} - \eta'| < \frac{\hat{c}_2}{E}, \quad (16)$$

где \hat{c}_2 — константа, не зависящая от переменных t и η .

Теперь естественно ввести, в силу (12), функцию $F(t) = \ln \frac{1+f(\hat{t})}{1-f(\hat{t})}$, где $\hat{t} = \hat{t}(t)$ — величина, определенная с помощью равенства (11). Из равенства (11) и условия теоремы 2 следует, что

$$\hat{t}(t_0) - t_0 = 2\ell - f(t_0) - f(\hat{t}_0) = 2\pi m_0, \quad \frac{d\hat{t}}{dt}(t_0) = \frac{1-f(t_0)}{1+f(t_0)} = \frac{1}{k_0} < 1, \quad (17)$$

а в силу равенств (12), (15) и определений (14) и функции $F(t)$ получаем:

$$\hat{\eta} = \hat{\eta}(t, \eta) = \eta + F(t), \quad \hat{\eta}(t_0, \eta) = \eta + \ln k_0. \quad (18)$$

Из (17) видно, что t_0 , рассматриваемое на окружности $0 \leq t < 2\pi$, является неподвижной точкой преобразования (11), причем эта точка притягивает некоторую свою окрестность — в силу того, что $\frac{d\hat{t}}{dt}(t_0) < 1$. В то же время переменная η растет под действием преобразования \hat{P} как арифметическая прогрессия с положительной разностью.

Действительно, согласно условию теоремы 2, m_0 — целое число, а функция $f(t)$ имеет период 2π по t ; поэтому из первого равенства (17) и равенства (18) следует, что у траектории $(\hat{t}_0^{(n)}, \hat{\eta}_0^{(n)}) = \hat{P}^n(t_0, \eta)$ преобразования \hat{P} (здесь \hat{P}^n — n -я итерация \hat{P}) при всех $n \geq 1$ координаты $\hat{t}_0^{(n)}$, $\hat{\eta}_0^{(n)}$ имеют вид арифметических прогрессий:

$$\hat{t}_0^{(n)} = t_0 + 2\pi m_0 n, \quad \hat{\eta}_0^{(n)} = \eta + n \ln k_0, \quad (19)$$

где $\ln k_0 > 0$. Кроме того, из второго равенства (17), и из (18) и (19) следует существование такого числа $\hat{\varepsilon} > 0$, что при $|t - t_0| \leq \hat{\varepsilon}$ у траектории $(\hat{t}^{(n)}, \hat{\eta}^{(n)}) = \hat{P}^n(t, \eta)$ координаты $\hat{t}^{(n)}$, $\hat{\eta}^{(n)}$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{t}^{(n)} - \hat{t}_0^{(n)}) = 0, \quad |\hat{\eta}^{(n)} - \hat{\eta}_0^{(n)}| < \hat{c}_3 \hat{\varepsilon}, \quad (20)$$

где \hat{c}_3 — константа, не зависящая от n , t и η .

Если бы речь шла только о преобразованиях \hat{D} и \hat{P} , то из (20) и (19) вытекало бы утверждение теоремы 2. Однако первоначальные преобразования D и P отличаются, хотя и мало, от \hat{D} и \hat{P} . Тем не менее, и для

них утверждение теоремы 2 будет справедливо. Действительно, применяя неравенства (16), (20) и равенства (15), (19), получим, что существует константа η_0 такая, что если $\eta \geq \eta_0$ и $|t - t_0| \leq \hat{\varepsilon}$, то у траектории $(t_n, \eta_n) = P^n(t, \eta)$ координата η_n при всех $n \geq 1$ удовлетворяет неравенству

$$\eta_n > \hat{c} + \eta + n \ln k_0,$$

где \hat{c} — константа, не зависящая от n , t и η . Положив $c = e^{\hat{c}}$, $\varepsilon_0 = \hat{\varepsilon}$, $E_0 = e^{\eta_0}$, $E = e^\eta$, мы видим, что $E_n = e^{\eta_n} > e^{\hat{c} + \eta + n \ln k_0}$, откуда и следует утверждение теоремы 2.

4. УСКОРИТЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ С ОДНОЙ СТЕНКОЙ В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

В этом разделе мы рассмотрим последнюю, третью, модель ускорения частицы.

Пусть $f(t)$ — гладкая периодическая функция, имеющая по t период $T > 0$. Предположим, что бесконечно тяжелая горизонтальная стенка движется в вертикальном направлении q во времени t по закону $q = f(t)$. На стенку падает массивный шарик с постоянным ускорением g и отталкивается от нее по закону упругого удара (рис. 2). Верхней стенки («потолка») в этой модели нет, но из-за силы тяжести шарик каждый раз возвращается к нижней стенке и затем отражается от нее.

Предположим, что после столкновения со стенкой в момент времени t шарик приобрел скорость $v > 0$, а после следующего столкновения со стенкой в момент времени t' шарик приобрел скорость v' . В результате возникает преобразование $S: (t, v) \rightarrow (t', v')$ плоскости t, v . Точка (t', v') однозначно определяется из следующих равенств:

$$f(t) + v(t' - t) - \frac{g}{2}(t' - t)^2 = f(t'), \quad (21)$$

$$v' = g(t' - t) - v + 2\dot{f}(t'), \quad (22)$$

(точка, как и раньше, — дифференцирование по t). Равенство (21) означает, что шарик движется по дуге параболы, левый конец которой совпадает со значением $f(t)$, а правый — со значением $f(t')$ (см. рис. 5). Формула (22) словесно формулируется так: к скорости $g(t' - t) - v$ падающего вниз шарика добавляется удвоенная скорость движения стенки при упругом ударе с ней шарика (как и в ньютоновской модели Ферми — Улама, см. вторую формулу в (2)).

Для преобразования S будет построена специальная резонансная траектория (см. лемму 2), такая что каждый раз шарик будет попадать на колеблющуюся стенку в одной и той же фазе и, следовательно, будет испытывать один и тот же прирост скорости. Таким образом, скорость ша-

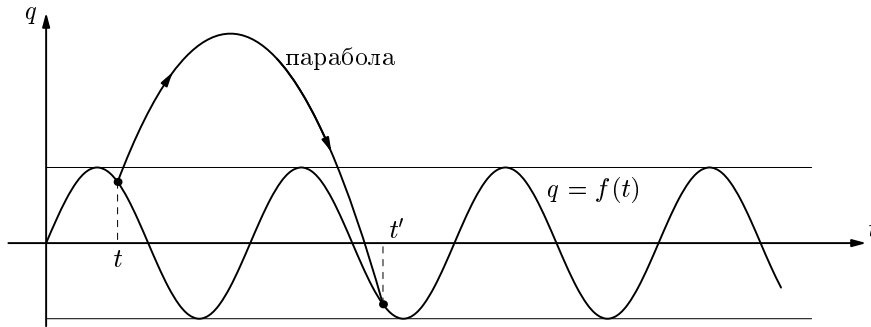


Рис. 5. График движения шарика во времени t от одной точки столкновения до другой точки столкновения

рика на этой траектории будет стремиться к бесконечности. Самое же трудное — доказать, что построенная траектория *устойчива* (по Ляпунову), т. е. что при малых отклонениях начальных условий, во все последующие моменты времени отличие отклоненной траектории от исходной будет мало. Устойчивость построенной в лемме 2 траектории позволяет сделать заключение, что для всех близких траекторий скорость шарика на них также будет стремиться к бесконечности. Таким образом, свойство $v \rightarrow \infty$ выполняется на множестве положительной (и даже бесконечной) меры начальных данных.

Переходим к теореме 3 и ее доказательству. В ее формулировке используются значки f , \dot{f} , \ddot{f} и $\overset{\cdot\cdot\cdot}{f}$, которые означают соответственно первую, вторую, третью и четвертую производные по времени.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что функция $f(t)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1. *Существуют целое $k_0 > 0$ и t_0 , такие что*

$$Tgk_0 = 2\dot{f}(t_0), \quad -g < \ddot{f}(t_0) = \beta < 0.$$

(Первое равенство — условие, позволяющее найти резонансную траекторию; второе — доказать ее устойчивость.)

2. $\ddot{f}(t_0) \neq -\frac{g}{2} + \frac{g}{2} \cos(2\pi\frac{k}{r})$, где $k = 0, \pm 1, \dots, \pm r$; $r = 1, 2, 3, 4$.

3. $a_0(\beta)\overset{\cdot\cdot\cdot}{f}(t_0) + a_1(\beta)\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{f}(t_0) \neq 0$, где $a_0(x)$ и $a_1(x)$ — фиксированные функции, не зависящие от функции $f(t)$.

(Условия 2 и 3 — чисто технические; они позволяют применить общую теорему об устойчивости неавтономной системы.)

Тогда на плоскости t, v существует открытое множество начальных данных (t, v) , имеющее бесконечную меру (площадь), такое что у

траектории $(t_n, v_n) = S^n(t, v)$ ($n = 1, 2, \dots$) преобразования S координата v_n стремится к бесконечности, и при этом $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{n} = Tgk_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Множество функций $f(t)$, удовлетворяющих условию теоремы 3, содержит открытое множество в пространстве T — периодических аналитических функций, которому, в частности, принадлежат функции вида $f(t) = h \sin \omega t$, где h, ω взяты из некоторого открытого множества на плоскости h, ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Начнем с построения резонансной траектории.

ЛЕММА 2. Предположим, что $2\dot{f}(t_0) = Tgk_0$, $v_0 = \frac{1}{2}Tgm$, $k_0 > 0$, $m > 0$, k_0 и m — целые числа. Тогда для траектории $(t_n^0, v_n^0) = S^n(t_0, v_0)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) выполнены неравенства

$$t_0 = t_0^0 \equiv t_1^0 \equiv \dots \equiv t_n^0 \equiv \dots \pmod{T}, \quad t_{n+1}^0 - t_n^0 = T(m + 2k_0n), \\ v_n^0 = v_0 + Tgk_0n$$

(мы полагаем $S^0 = \text{id}$ — тождественное отображение).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2 мы опускаем: оно легко получается из равенств (21) и (22) (см. [11, гл. 2, §1, лемма 1]).

Изучим теперь поведение преобразования S в окрестности резонансной траектории (t_n^0, v_n^0) ($n = 0, 1, \dots$), построенной в лемме 2.

С этой целью мы введем бесконечную последовательность отображений S_n ($n = 1, 2, \dots$) фиксированной окрестности W точки $(0, 0)$ следующим образом: если $(t, v) \in W$, то

$$(t'_n, v'_n) = S_n(t, v) \stackrel{\text{def}}{=} S(t_{n-1}^0 + t, v_{n-1}^0 + v) - (t_n^0, v_n^0). \quad (23)$$

(См. рис. 6, на котором показано, как отображается точка (t, v) из окрестности нуля W под действием отображения S_n .) Из леммы 2 и из формул (21) и (22) следует, что отображения S_n сходятся при $n \rightarrow \infty$ к предельному отображению S_∞ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t, v) = S_\infty(t, v),$$

где S_∞ — отображение той же самой окрестности нуля W , имеющее вид:

$$S_\infty: (t, v) \rightarrow (t'_\infty, v'_\infty) = \left(t + \frac{2v}{g}, v + 2\dot{f}(t_0 + t + \frac{2v}{g}) - 2\dot{f}(t_0) \right). \quad (24)$$

В этом переходе к бесконечности еще раз проявляется общая идея всей работы, согласно которой мы изучаем поведение системы в окрестности бесконечно удаленной точки: S_∞ отвечает точке резонансной траектории, у которой координата v с самого начала равна ∞ .

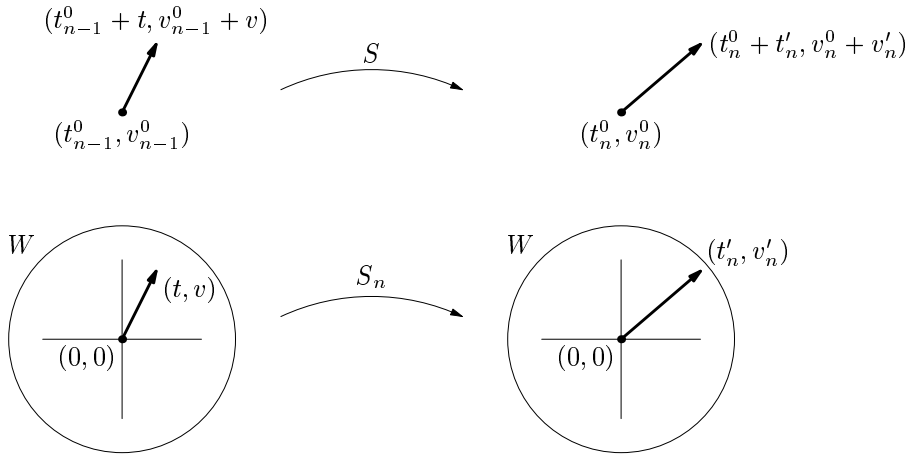


Рис. 6. Точечное отображение S плоскости t, v в ускорительной модели и порожденная им последовательность S_n отображений векторов в окрестности начала координат плоскости t, v

В силу (24) преобразование S_∞ сохраняет площадь (якобиан отображения S_∞ , как нетрудно видеть, тождественно равен 1), причем начало координат $(0, 0)$ — неподвижная точка отображения S_∞ . Кроме того, согласно условиям теоремы 3, неподвижная точка $(0, 0)$ есть точка общего эллиптического типа, что означает, что линейная часть отображения S_∞ в этой точке в некоторых полярных координатах приводится к повороту окрестности нуля W на угол, отличный от $2\pi k/r$, где r принимает только 4 исключительных значения: $r = 1, 2, 3, 4$, а $k = 0, \pm 1, \dots, \pm r$. Поэтому к преобразованию S_∞ в окрестности нуля W можно применить теорему Мозера [12] (о ней уже шла речь в разделе 2), согласно которой точка $(0, 0)$ устойчива (по Ляпунову) относительно преобразования S_∞ . Эквивалентная формулировка дается следующей леммой 3.

ЛЕММА 3. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что, если $|t| + |v| \leq \delta$, то при любом натуральном числе n координаты точки

$$(t_\infty^{(n)}, v_\infty^{(n)}) = S_\infty^n(t, v)$$

удовлетворяют неравенству $|t_\infty^{(n)}| + |v_\infty^{(n)}| \leq \varepsilon$.

Переходим к завершающему этапу в доказательстве теоремы 3. Утверждение теоремы 3 об открытом множестве разгоняющихся до бесконечности траекторий преобразования S будет доказано, если будет установлено, что траектория (t_n^0, v_n^0) ($n = 0, 1, 2, \dots$), построенная в лемме 2, устойчива относительно S . Последнее же утверждение в силу

определения преобразований S_n в (23) (см. рис. 6) сводится к доказательству следующей леммы 4 об устойчивости резонансной траектории.

ЛЕММА 4. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что, если $|t| + |v| \leq \delta$, то при любом натуральном числе n координаты точки

$$(t^{(n)}, v^{(n)}) = S_n \circ S_{n-1} \circ \dots \circ S_1(t, v)$$

(где S_1, \dots, S_n — отображения, введенные в (23)) удовлетворяют неравенству $|t^{(n)}| + |v^{(n)}| \leq \varepsilon$.

Формальное доказательство леммы 4 весьма сложно; в полном виде оно приведено в работе [11]. Однако с интуитивной точки зрения лемма 4 весьма прозрачна: ведь отображения S_n сходятся при $n \rightarrow \infty$ к предельному отображению S_∞ , и если в формулировке леммы 4 заменить суперпозицию $S_n \circ S_{n-1} \circ \dots \circ S_1$ отображений S_1, \dots, S_n на n -ю степень $S_\infty^n = \underbrace{S_\infty \circ S_\infty \circ \dots \circ S_\infty}_{n \text{ раз}}$ отображения S_∞ , то мы сразу приходим к установленной выше лемме 3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Во всех трех обсуждаемых моделях, связанных с физическим механизмом ускорения частиц, реализованы три различных способа одной и той же общей для них всех идеи — переходу к бесконечности и изучению динамической системы в бесконечно удаленной точке. Результаты исследования для каждой из этих моделей получаются различными. А именно, в *первой* модели (ньютоновская модель Ферми – Улама) скорость и энергия шарика всегда ограничены; во *второй* модели (релятивистская модель Ферми – Улама) скорость шарика ограничена скоростью света, а его энергия может стремиться к бесконечности; и, наконец, в *третьей* модели (ускорительная модель в поле тяжести) как скорость, так и энергия могут стремиться к бесконечности. При этом во второй и третьей моделях соответствующие эффекты справедливы для открытого множества (положительной меры) начальных данных.

Настоящая работа может рассматриваться как результат взаимодействия геометрии с теорией динамических систем и физикой. Однако для каждой из трех моделей, описанных здесь, связь с геометрией различная. Опишем эти геометрические связи более подробно.

- ▷ Модель Ферми – Улама, ньютоновский случай (п. 2): в основе доказательства лежит теорема об инвариантных замкнутых кривых плоского кольца. Она справедлива при выполнении чисто геометрического условия, согласно которому замкнутая кривая пересекается со своим образом (рис. 4).

- ▷ Модель Ферми – Улама, релятивистский случай (п. 3): здесь закон преобразования скорости и энергии шарика при упругом столкновении с движущейся стенкой основаны на геометрии теории относительности. Эта геометрия есть разновидность неевклидовой геометрии (геометрия Лобачевского), а траектории шарика могут рассматриваться как обобщенные геодезические линии в этой геометрии.
- ▷ Наконец, ускорительная модель с одной стенкой в поле тяжести (п. 4). Здесь присутствуют два аспекта, связанных с геометрией:
 1. как и в п. 2, первый аспект касается инвариантных замкнутых кривых при отображениях плоского кольца, и именно обобщение этого результата приводит к устойчивости резонансной траектории, построенной в лемме 2 (п. 4);
 2. геометрическая природа отображения S (см. равенство (21)), получающегося в результате перехода от одной точки пересечения параболы с графиком периодической функции $f(t)$ к другой такой точке пересечения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Fermi E. *On the origin of the cosmic radiation* // Phys. Rev., 1949. Vol. 75. No 8. P. 1169–1174.
- [2] Пустыльников Л. Д. *Модели Пуанкаре, строгое обоснование второго начала термодинамики из механики и механизм ускорения Ферми* // УМН, 1995. Т. 50. №1. С. 143–186.
- [3] Ulam S. *On some statistical properties of dynamical systems* // Proc. 4th Berkeley Sympos. on Math. and Probabil. 1961. Vol. 3. Berkeley – Los Angeles: California Press. P. 315–320.
- [4] Пустыльников Л. Д. *Об одной задаче Улама* // ТМФ, 1983. Т. 57. №1. С. 128–132.
- [5] Пустыльников Л. Д. *О модели Ферми – Улама* // ДАН СССР, 1987. Т. 292. №3. С. 549–553.
- [6] Пустыльников Л. Д. *Существование инвариантных кривых для отображений, близких к вырожденным, и решение проблемы Ферми – Улама* // Матем. сб., 1994. Т. 185. №6. С. 1–12.
- [7] Довбыш С. А. *Колмогоровская устойчивость, невозможность разгона Ферми и существование периодических решений в некоторых системах типа гамильтоновых* // Прикладная математика и механика, 1992. Т. 56. №2. С. 218–229.

-
- [8] Пустыльников Л. Д. *Новый механизм ускорения частиц и релятивистский аналог модели Ферми – Улама* // ТМФ, 1988. Т. 77. №1. С. 154–160.
- [9] Пустыльников Л. Д. *Об одной динамической системе* // УМН. 1968. Т. 23. №4 (142). С. 251–252.
- [10] Пустыльников Л. Д. *Существование множества положительной меры осциллирующих движений в одной задаче механики* // ДАН СССР, 1972. Т. 202. №2. С. 287–289.
- [11] Пустыльников Л. Д. *Устойчивые и осциллирующие движения в неавтономных динамических системах. II* // Труды ММО. 1977. Т. 34. С. 3–103.
- [12] Мозер Ю. *Об инвариантных кривых сохраняющего площадь отображения кольца в себя* // Математика. 1963. Т. 6. №5. С. 51–67.
- [13] Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. *Теория поля*. М.: Физматгиз, 1962.