Треугольники в выпуклых многоугольниках

А. Сойфер
Университет штата Колорадо,
Колорадо-Спрингс

П. Эрдёш
Институт математики
Венгерской академии наук

Во время совместной встречи Нового 1992 года в Колорадо-Спрингс нам пришел в голову ряд «максминных» задач.

Пусть S — конечное множество точек на плоскости. Символ $\min \Delta(S)$ будет обозначать наименьшую площадь треугольника, все вершины которого содержатся в S. Выпуклый n-угольник P_n в этой статье понимается как множество его n вершин. Однако мы будем говорить о его внутренности, имея в виду внутренность его выпуклой оболочки.

Вначале заметим, что из предложения 2 статьи А. Реньи и Р. Суланке [1] вытекает изящное следствие:

Результат 1. Среди всех выпуклых n-угольников P_n единичной площади величина

$$\Delta(n, 0) = \max(\min \Delta(P_n))$$

достигается, когда P_n является аффинным образом правильного n-угольника.

Поставим следующую задачу:

Задача 2. Для совокупности всех n-угольников P_n единичной площади и всех точек из их внутренности найдите

$$\Delta(n, 1) = \max(\min \Delta(P_n \cup \{p\})) \ .$$

Найдите все конфигурации $P_n \cup \{p\}$, реализующие этот максимум.

Для $n = 4$ эта задача решена в [2, гл.9]: $\Delta(4,1) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$. Соответствующая оптимальная конфигурация (с точностью до аффинных преобразований) показана на рис. 1 для равностороннего треугольника со стороной 1. (Чтобы сделать его площадь единичной, нужно применить гомотетию.)

В общем виде задача формулируется так:

©CEME. Geombinatorics, vol. II, No 4, 1993. P. 72–74. Перевод Б. Р. Френкина.

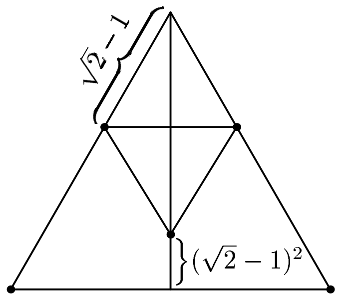

Рис. 1.

Задача 3. Для совокупности всех выпуклых n-угольников P_n единичной площади и всех k-элементных множеств S_k из их внутренности найдите

$$\Delta(n,k) = \max(\min \Delta(P_n \cup S_k)) \ .$$

Вопрос представляется интересным как для малых, так и для больших значений k, например для $k = n$. При больших k он связан со следующей хорошо известной проблемой Хейльбрауна:

> Пусть даны n точек в квадрате (или круге) единичной площади. Найдите максимум минимальной площади треугольника с вершинами в каких-либо из этих точек.

Список литературы

[1] A. Rényi, R. Sulanke. *Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten* // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, 2(1963), 75 – 84.

[2] A. Soifer. *How Does One Cut a Triangle*? Center for Excellence in Mathematical Education, Colorado Springs, 1990.