

## Изогональные трехвалентные графы на сфере

Р. М. Травкин

Мы рассматриваем в этой статье *изогональные трехвалентные графы*, т. е. графы на сфере  $S^2$ , ребра которых идут по геодезическим, а в каждой вершине сходятся по 3 ребра, образующие между собой равные углы (по  $120^\circ$ ). Такие графы возникают при изучении структуры сингулярных мыльных пленок (см. [1]). Другая простая физическая интерпретация — резиновая «трехвалентная» сетка, натянутая на сферу, у которой натяжения всех резинок совпадают, а трение между сеткой и сферой отсутствует. Такая сетка имеет форму изогонального трехвалентного графа. Оказывается, существует всего девять типов таких графов (см., например, [1]); точнее говоря, любой такой граф можно наложить поворотом сферы на один из графов некоторого набора (из девяти графов). Цель настоящей заметки — привести элементарное «переборное» доказательство этого факта; при этом переборе естественно появятся все девять изогональных трехвалентных графов. Эти графы изображены на рис. 1. Из рисунка видно, что каждому графу соответствует сферический многогранник. Любопытно, что числа граней этих многогранников, расположенные в порядке возрастания, образуют ряд 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12.

### 1. СВОЙСТВА СФЕРИЧЕСКИХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

В этом параграфе мы перечислим ряд свойств сферических многоугольников, которые нам потребуются в дальнейшем. Доказательства этих свойств<sup>1)</sup>, которые мы предоставляем читателю, могут быть получены из основных правил сферической геометрии<sup>2)</sup> (см., например, учебник [2]). В условиях задачи сфера разбивается нашим графом на сферические многоугольники, обладающие следующими свойствами:

1. Все углы каждого из многоугольников равны  $120^\circ$ .

---

<sup>1)</sup>Как и доказательство применяемой ниже формулы (1) из разд. 4.2.

<sup>2)</sup>Свойство 9 вытекает из леммы 1 (см. разд. 6 настоящей статьи). Получить непосредственное геометрическое доказательство свойства 9 автору не удалось. Ряд свойств легче доказывается при переходе к двойственным (полярным) многоугольникам.

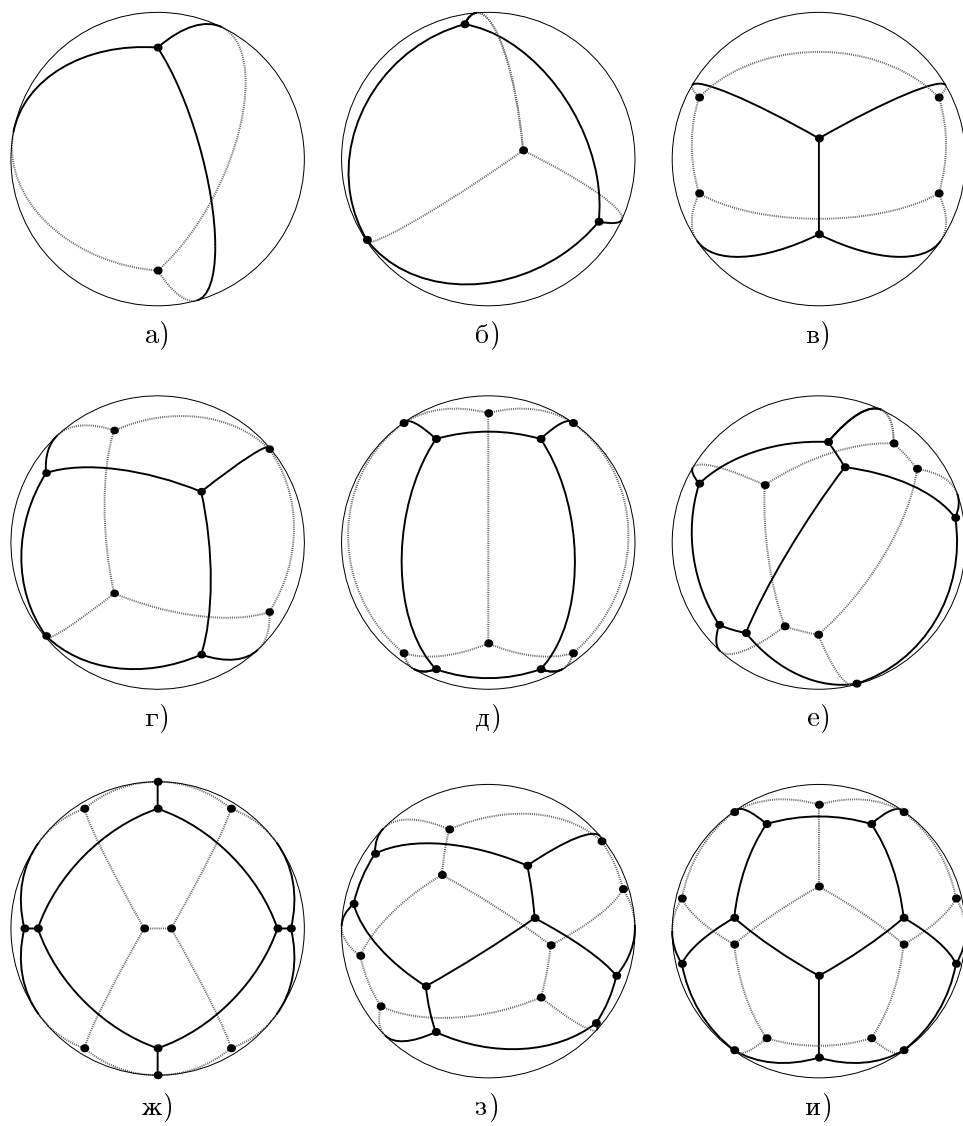


Рис. 1.

2. Многоугольники правильно примыкают друг к другу, т. е. два многоугольника имеют либо общую сторону, либо не имеют общих точек (из трехвалентности всех вершин нашего графа следует, что если два многоугольника имеют общую вершину, то они имеют и общую сторону).
3. Число сторон каждого многоугольника  $\leq 5$  (поскольку сумма внешних углов сферического многоугольника меньше  $2\pi$ , см. [2]).

Известно (см. [2]), что сумма углов любого выпуклого сферического многоугольника однозначно определяет его площадь, независимо от формы самого многоугольника. Рассмотрим для удобства сферу, площадь поверхности которой равна 12. Тогда площадь поверхности для многоугольников, составляющих разбиение сферы ребрами изогонального трехвалентного графа, будет равна:

- 4 — для двуугольников,
- 3 — для треугольников,
- 2 — для четырехугольников,
- 1 — для пятиугольников.

Отметим также следующие свойства (выпуклых) сферических многоугольников с углами  $120^\circ$ :

4. Все двуугольники равны (конгруэнтны) между собой.
5. Все треугольники равны между собой.
6. Четырехугольники равны по одной стороне.
7. Пятиугольники равны по двум соответственным сторонам (т. е. по двум смежным или по двум не смежным).
8. Никакая сторона пятиугольника не равна стороне треугольника.
9. Если каждая из трех смежных сторон одного пятиугольника не меньше соответствующей стороны из трех смежных сторон другого пятиугольника, то эти пятиугольники равны.

В дальнейшем, если в тексте прямо не указано иное, слово *многоугольник* означает выпуклый сферический многоугольник, все углы которого равны  $120^\circ$ . Далее, мы будем говорить, что два сферических многогранника имеют одинаковый *комбинаторный тип*, если можно установить взаимно однозначное соответствие между их вершинами, ребрами и гранями, сохраняющее примыкание.

Кроме перечисленных свойств, нам будет полезна следующая

**ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ.** *Если два сферических многогранника с выпуклыми гранями имеют одинаковый комбинаторный тип и одинаковые соответственные углы, то они равны.*

Доказательство теоремы единственности приводится в конце статьи. Теорема позволяет проверять только существование сферических многогранников с заданным комбинаторным типом, не заботясь о доказательстве единственности. Отметим, что справедливость этой теоремы позволяет а priori утверждать конечность изучаемого множества искомым многогранников.

Далее мы последовательно перебираем все возможные искомые многогранники в зависимости от наличия у них тех или иных граней (по свойству 3 число сторон их граней может принимать значения 2, 3, 4, 5).

## 2. ЕСТЬ ДВУУГОЛЬНИК

Пусть одна из граней искомого многогранника — двуугольник. Тогда из свойств 1 и 2 следует, что у многогранника еще две грани — тоже двуугольники, так что в этом случае на сфере получается *правильный трехгранник*, изображенный на рис. 1а.

## 3. ЕСТЬ ТРЕУГОЛЬНИК (И НЕТ ДВУУГОЛЬНИКОВ)

Рассмотрим отдельно два подслучая этого случая.

### 3.1. К ТРЕУГОЛЬНИКУ ПРИМЫКАЕТ ДРУГОЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Пусть рядом с треугольником  $ABC$  имеется треугольник  $B CD$ . Очевидно, что рядом с ними можно расположить треугольник  $ABD$ , который будет примыкать к ним по сторонам  $AB$  и  $BD$  (рис. 2). Если же мы попытаемся вписать в угол  $ABD$  четырехугольник или пятиугольник, то его стороны (проведенные под теми же углами) пойдут по геодезической  $AD$ , на которой окажутся все его вершины (кроме  $B$ ). Тем самым, случай четырех-(пяти-) угольника невозможен.

Следовательно, конфигурация из двух смежных треугольников может быть дополнена только треугольником. Продолжая расширять конфигурацию из треугольников, придем к тому, что вся сфера будет покрыта треугольниками. Это разбиение получается при центральной проекции на сферу ребер *правильного тетраэдра*. Оно изображено на рис. 1б.

### 3.2. К ТРЕУГОЛЬНИКУ НЕ ПРИМЫКАЕТ НИКАКОЙ ДРУГОЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Ввиду свойства 8, можно считать, что треугольник окружен только четырехугольниками (рис. 3). Обозначим длину стороны треугольника через  $a$ , и пусть  $b$  — длина стороны четырехугольника, смежной со стороной  $a$  (свойство 6). Вписывая четырехугольник  $AA'B'B$  в угол  $A'AB$ ,

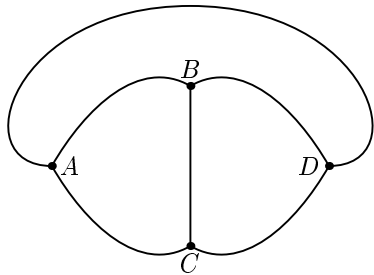


Рис. 2.

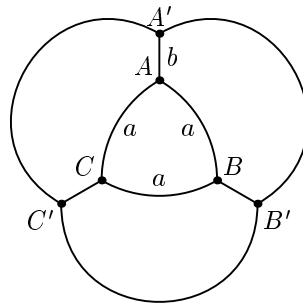


Рис. 3.

получим равенство длин  $AA' = b$ , аналогично  $BB' = b$  и  $CC' = b$ . Поскольку все углы сферического треугольника  $A'B'C'$  равны  $120^\circ$ , любая пара смежных сторон этого треугольника входит в один и тот же многоугольник. Очевидно, таким многоугольником может быть только сам треугольник  $A'B'C'$ . Таким образом в этом случае на сфере получается центральная проекция *треугольной призмы*. Она изображена на рис. 1в.

#### 4. ЕСТЬ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК (И НЕТ 2-УГОЛЬНИКОВ И ТРЕУГОЛЬНИКОВ)

Здесь мы снова рассмотрим ряд подслучаев.

##### 4.1. В РАЗБИЕНИИ ЕСТЬ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК, ГРАНИЧАЩИЙ ТОЛЬКО С ПЯТИУГОЛЬНИКАМИ

Этот четырехугольник вместе с примыкающими к нему пятиугольниками имеет комбинаторную схему, изображенную на рис. 4. Фигура  $C_1B_2C_2B_3C_3B_4C_4B_1$  имеет четыре внешних угла, равных  $120^\circ$  ( $B_1, B_2, B_3, B_4$ ). Здесь снова возникают две возможности, и мы отдельно рассмотрим два «подподслучая»

##### 4.1.1. В углы $B_1, B_2, B_3, B_4$ вписаны только пятиугольники

Тогда получающаяся фигура будет иметь на границе 4 стороны (которые можно наклеить четырехугольником). В результате получается разбиение сферы на фигуру  $C_1B_2C_2B_3C_3B_4C_4B_1$  и дополнительную к ней фигуру такого же типа. Описанная ситуация реализуется при центральной проекции на сферу 10-гранника, состоящего из двух прямоугольных и восьми пятиугольных граней.

Построить этот 10-гранник можно следующим образом. Впишем в сферу куб  $ABCDC_2D_2A_2B_2$ . Грань  $D_2A_2B_2C_2$  повернем в своей плоскости

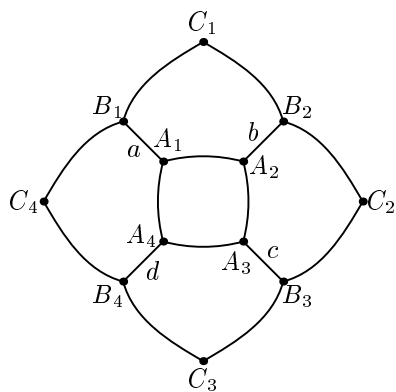


Рис. 4.

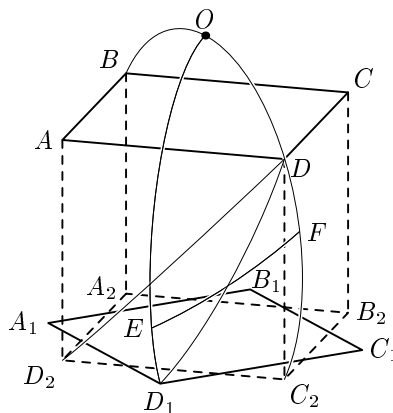


Рис. 5.

на  $45^\circ$ , как показано на рисунке 5, получая квадрат  $A_1B_1C_1D_1$  (он тоже будет вписанным в сферу). Центральные проекции на сферу квадратов  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$  дадут два четырехугольника нужного сферического многогранника. Пусть  $O$  — проекция центра квадрата  $ABCD$  на сферу. Прилежащие к вершинам квадратов ребра пятиугольников пойдут по линиям пересечения со сферой больших кругов  $BDC_2A_2$ ,  $ACB_2D_2$  и двух кругов, проходящих через точки  $OA_1C_1$  и  $OB_1D_1$ . Чтобы завершить построение, необходимо найти на дугах  $OD_1$  и  $ODC_2$  такие точки  $E$  и  $F$ , чтобы оба угла  $D_1EF$  и  $DFE$  равнялись  $120^\circ$  (тогда остальные дуги можно построить аналогично). Станем симметрично вращать дугу  $EF$  от начального положения  $D_1D$  до среднего положения, когда ее плоскость станет параллельна плоскости квадрата  $ABCD$ . Поскольку в конечном положении требуемые углы будут равны  $90^\circ$ , достаточно доказать, что в начальном положении они больше  $120^\circ$ , или, что то же самое, что сферический угол  $D_1DC_2$  меньше  $60^\circ$ . Если повернуть квадрат  $A_1B_1C_1D_1$  еще на  $45^\circ$ , он перейдет в квадрат  $A_2B_2C_2D_2$ , причем угол  $D_1DC_2$  увеличится и перейдет в угол  $D_2DC_2$ . Последний равен  $60^\circ$ , как половина сферического угла между соседними ребрами куба. Требуемый 10-гранник тем самым построен. Его проекция на сферу изображена на рис. 1з.

4.1.2. В углы  $B_1, B_2, B_3, B_4$  вписаны не только пятиугольники

Пусть, для определенности, в угол  $B_2$  вписан четырехугольник (рис. 6).

Будем считать, что никакие два четырехугольника не имеют общей стороны (варианты со смежными четырехугольниками рассматриваются далее). Точки  $C_3, B_3, C_2$  и  $D$  входят в один многоугольник, который по

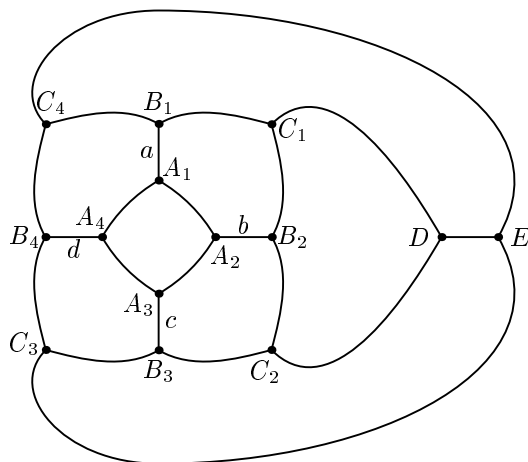


Рис. 6.

нашему допущению является пятиугольником  $C_3B_3C_2DE$ . При этом образуется пятиугольник  $C_4B_1C_1DE$  и еще один четырехугольник  $C_3B_4C_4E$ .

Полученная комбинаторная схема включает 3 четырехугольника и 6 пятиугольников и реализуется на сфере так, что все четырехугольники являются «квадратами». Заметим, что длина диагонали «квадрата» не превосходит  $1/3$  длины окружности большого круга. Разместив 3 «квадрата» так, чтобы их диагонали равномерно располагались на этой окружности, как на экваторе, и проведя из вершин «квадратов» геодезические к полюсам, получим требуемое разбиение, изображенное на рис. 1ж. Оно имеет комбинаторный тип так называемого многогранника Штаефа (см. [3]).

#### 4.2. ЕСТЬ ДВА СОСЕДНИХ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА, ОКРУЖЕННЫХ СО ВСЕХ СТОРОН ПЯТИУГОЛЬНИКАМИ

Изображенная на рис. 7 конфигурация многоугольников имеет площадь 8 и ее граница состоит из 6 сторон; следовательно, недостающие многоугольники должны иметь суммарную площадь 4. Поскольку  $x$ ,  $y$  и  $z$  (аналогично  $u$ ,  $v$  и  $w$ ) разделены углами в  $120^\circ$ , они входят в один и тот же многоугольник. С учетом соображений площади недостающие многоугольники — два четырехугольника.

Поскольку изображенные на рисунке 7 четырехугольники имеют общую сторону, в силу свойства 6 они равны. Теперь рассмотрим верхний пятиугольник на рис. 7. У него есть пара равных сторон. Значит, по свойству 7, у него есть ось симметрии. Аналогично для нижнего

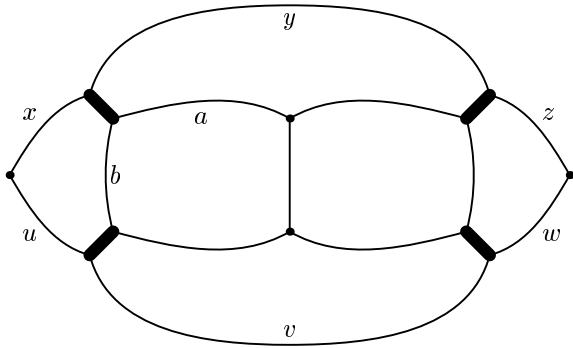


Рис. 7.

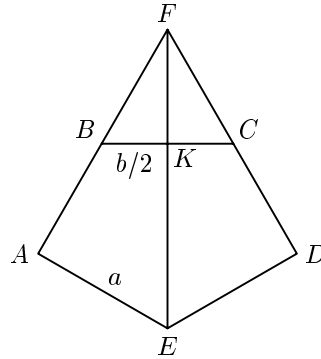


Рис. 8.

пятиугольника. В силу того же свойства 7, верхний пятиугольник равен нижнему, поэтому все ребра, отмеченные на рисунке жирными линиями, равны между собой. Наконец, в силу свойства 7 для несмежных сторон все четыре пятиугольника равны, в частности  $x = u = z = w = a$  и  $y = v = b$ . Нашей дальнейшей задачей является вычисление  $a$  и  $b$  на основании этих равенств. Поскольку стороны многоугольников на сфере являются геодезическими, их можно рассматривать как углы. Стороны четырехугольников  $a$  и  $b$  связаны соотношением

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2} = \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Согласно доказанному, сферические пятиугольники, участвующие в разбиении, имеют вид, указанный на рис. 8.

При этом имеют место соотношения  $AE = ED = a$ ;  $BK = KC = b/2$ ;  $\angle EAB = \angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle DEA = 120^\circ$ , откуда

$$\angle KBF = \angle KEA = 60^\circ; \angle BKF = 90^\circ.$$

Применяя формулы сферической тригонометрии (см. [2]), по  $\cos a$  из треугольника  $AEF$  найдем  $\cos \angle BFK$ , а по нему найдем  $\cos(b/2)$ . В результате возникает еще одно соотношение между  $a$  и  $b$ :

$$\cos \frac{b}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(3 \cos a + 1) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( 3 \frac{1 - \operatorname{tg}^2(a/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(a/2)} + 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \operatorname{tg}^2(a/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(a/2)}.$$

Возведем обе части равенства (1) в квадрат и подставим туда значение  $\operatorname{tg}^2(b/2)$ , выраженное через  $\cos^2(b/2)$ . Получим такое соотношение:

$$\operatorname{tg}^2(a/2) \left( \frac{3(1 + \operatorname{tg}^2(a/2))^2}{(2 - \operatorname{tg}^2(a/2))^2} - 1 \right) = \frac{1}{4}.$$

После преобразований получается следующее уравнение относительно



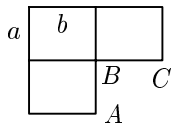
неизвестной  $y := 1/\operatorname{tg}^2(a/2)$ :

$$y^3 - 9,75y - 2 = 0.$$

Это уравнение имеет ровно один положительный корень и однозначно определяет значения  $\operatorname{tg}^2(a/2)$ ,  $\operatorname{tg}(a/2)$  и  $a$ , поскольку  $a < \pi$ . Следовательно, существует пятиугольник со сторонами  $a$  и  $b$ , которые удовлетворяют определяющему соотношению (1) и, следовательно, являются сторонами некоторого четырехугольника. Поэтому конфигурация, изображенная на рис. 8, может быть достроена (единственным образом) до сферического многогранника, изображенного на рис. 1е.

Очевидно, что четырехугольники могут укладываться на сферу в ряды. А возможны ли двойные ряды? Например, возможна ли конфигурация, изображенная на рис. 9?

#### 4.3. ДВЕ СМЕЖНЫЕ СТОРОНЫ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА ЯВЛЯЮТСЯ СТОРОНАМИ ДРУГИХ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ



В силу того, что все углы четырехугольников равны по  $120^\circ$ , очевидно, что на рис. 9 сторона  $AB$  совпадает с  $CB$ , так что изображенные четырехугольники являются на самом деле «квадратами».

**Рис. 9.**

Докажем, что приведенную конфигурацию нельзя расширить пятиугольником. Вставим пятиугольник в некоторый внешний угол конфигурации. В тот же угол можно вставить и «квадрат», две смежных стороны которого будут являться сторонами пятиугольника. Являясь выпуклой фигурой, пятиугольник займет при этом не меньше половины «квадрата». Но из соображений площади он не может занять и более половины «квадрата», так что он должен совпадать с треугольником, образованным смежными сторонами «квадрата» и диагональю, на которую они опираются. Противоречие.

Следовательно, наша конфигурация (как и все получающиеся из нее) может расширяться только «квадратами». В результате мы получим *проекцию куба*, изображенную на рис. 1г.

Осталось рассмотреть случаи, когда четырехугольники образуют незамкнутый ряд и когда они образуют «кольцо».

#### 4.4. ИМЕЕТСЯ БОЛЕЕ ДВУХ СОСЕДНИХ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ, НЕ ОБРАЗУЮЩИХ «КОЛЬЦО»

Несложными рассуждениями (которые мы оставляем читателю), опирающимися на разд. 1, можно показать, что этот случай невозможен.

#### 4.5. ИМЕЕТСЯ БОЛЕЕ ДВУХ СОСЕДНИХ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ, И ОНИ ОБРАЗУЮТ «КОЛЬЦО»

Пусть имеется  $k$  таких четырехугольников. Нетрудно доказать, что тогда «кольцо» можно дополнить до сферического многогранника только заклеиванием двумя  $k$ -угольниками. Случаи  $k = 3$  и  $k = 4$  были рассмотрены ранее. Остается только (по свойству 3) случай  $k = 5$ . Ясно, что в этом случае на сфере получается проекция пятиугольной призмы. Она изображена на рис. 1д.

На этом заканчивается рассмотрение возможных разбиений с четырехугольной гранью.

### 5. ЕСТЬ ТОЛЬКО ПЯТИУГОЛЬНИКИ

Нетрудно показать, что искомый граф с пятиугольными гранями имеет комбинаторный тип додекаэдра. В силу теоремы единственности это — центральная проекция *правильного додекаэдра*, которая изображена на рис. 1и.

Мы перебрали все возможные изогональные графы на сфере: наше доказательство завершено.

### 6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ

Для доказательства этой теоремы потребуются две леммы.

**ЛЕММА 1.** Пусть  $A_1 \dots A_n$  и  $B_1 \dots B_n$  — два сферических  $n$ -угольника таких, что  $\angle A_i = \angle B_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). На сторонах многоугольника  $A_1 \dots A_n$  расставлены знаки «+» и «-» в зависимости от того, больше или меньше данная сторона соответствующей стороны многоугольника  $B_1 \dots B_n$  (в случае равенства никакой знак не ставится). Тогда, если многоугольники не равны, то количество перемен знака при обходе многоугольника  $A_1 \dots A_n$  будет не менее 4 (стороны, не снабженные знаком, при подсчете числа перемен игнорируются).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Данная лемма представляет собой переформулировку леммы Коши (см. [4]).

**ЛЕММА 2.** Пусть на сфере нарисован граф с непересекающимися ребрами, у которого никакие две вершины не соединены более чем одним ребром, и пусть на некоторых его ребрах расставлены знаки «+» и «-», причем есть хотя бы одно ребро, где стоит знак. Тогда найдется вершина, к которой подходит хотя бы одно ребро со знаком, но количество перемен знаков ребер при обходе вокруг этой вершины не более 2.

СЛУЧАЙ 1. Все грани графа — треугольные и нет «пустых вершин» (т. е. таких вершин, что все ребра, выходящие из этой вершины, не помечены).

Заметим, что количество граней в 1,5 раза меньше, чем количество ребер. Пусть количество граней равно  $2k$ , а количество ребер равно  $3k$ . Тогда по формуле Эйлера (см. [5, с. 391]) количество вершин равно  $k + 2$ . Достаточно рассмотреть случай, когда все ребра помечены, так как в противном случае можно расставить недостающие знаки произвольным образом, и тогда количество перемен знаков в каждой вершине не уменьшится. Для каждой грани количество перемен знаков в этой грани не более двух, поэтому общее количество перемен знаков в гранях (или, что то же, в вершинах) не более  $4k$ . Количество вершин равно  $k + 2$ , значит, найдется вершина, где количество перемен знака будет меньше 4, т. е.  $\leq 2$ , что и требовалось доказать.

СЛУЧАЙ 2. Граф связный, без кратных ребер, и нет пустых ребер.

Этот случай можно свести к случаю 1. Каждая грань представляет собой многоугольник, который имеет не менее трех ребер, и ее можно разбить на треугольники, не добавляя новых вершин. Добавляя ребра разбиения, попадем в условия случая 1.

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ.

Удалим из графа пустые ребра и пустые вершины. Тогда граф может распасться на несколько компонент связности. Выберем одну из них и применим к ней случай 2.

Доказательство леммы 2 закончено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Обозначим графы, образованные ребрами заданных многогранников, через  $A$  и  $B$ . Рассмотрим графы  $A'$  и  $B'$ , двойственные к графам  $A$  и  $B$  соответственно.<sup>3)</sup> Между ребрами графа и ребрами двойственного к нему графа имеется взаимно однозначное соответствие. Поскольку многогранники комбинаторно эквивалентны,  $A'$  и  $B'$  можно отождествить. На каждом ребре  $a$  графа  $A'$  поставим знак «+» или «-» в зависимости от того, какое из ребер многогранников  $A$  и  $B$ , соответствующих  $a$ , больше. Если многогранники не равны, к графу  $A'$  можно применить лемму 2. По этой лемме, в  $A'$  найдется непустая вершина  $p$  с не более чем двумя переменами знаков. Этой вершине соответствует две грани в многогранниках  $A$  и  $B$ . Если эти грани были бы равны, то вершина  $p$  была бы пустой. Значит, они не равны, и можно применить лемму 1, согласно которой число перемен знаков в этой вершине должно быть не менее 4, в то время как оно, по доказанному, не более 2.

<sup>3)</sup> Двойственным к графу  $A$  является граф  $A'$ , вершины которого выбраны по одной в каждой грани  $A$ , и две вершины  $A'$  связаны ребром, если соответствующие грани  $A$  имеют общее ребро.

Ввиду полученного противоречия, многогранники  $A$  и  $B$  равны. Теорема доказана.

Автор благодарит А. Б. Сосинского за постановку задачи и внимание к работе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дао Чонг Тхи, А. Т. Фоменко. *Минимальные поверхности и проблема Плато*. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. л-ры, 1987.
- [2] В. В. Прасолов, В. М. Тихомиров. *Геометрия*. М.: МЦНМО, 1999.
- [3] П. Картье. *Комбинаторика деревьев* // Студенческие чтения МК НМУ, вып. 2. М.: МЦНМО, 2001.
- [4] Н. П. Долбилин. *Жемчужины теории многогранников*. Биб-ка «Математическое просвещение», вып. 5. М.: МЦНМО, 2000.
- [5] Энциклопедия элементарной математики. Книга четвертая. Геометрия. М.: Гос.изд. физ.-мат. л-ры, 1963.