

Периодические десятичные дроби

А. Е. Ерошин

Всем хорошо известны десятичные (а также m -ичные) дроби. Периодические m -ичные дроби могут быть представлены в виде обыкновенных и наоборот. Если знаменатель q правильной несократимой дроби p/q ($p < q$) взаимно прост с m , то m -ичная запись такой дроби будет *чисто периодической*, т. е. иметь вид $0,(\alpha_1 \dots \alpha_n)$, где $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ — период дроби; если же q не взаимно просто с p , то может наблюдаться и *предпериод* $\beta_1 \dots \beta_s$:

$$p/q = 0,\beta_1 \dots \beta_s(\alpha_1 \dots \alpha_n).$$

В этом случае говорят, что дробь *условно периодическая*. Иррациональные числа не разлагаются в периодические дроби. Про их разложение почти ничего не известно. Например, неизвестно, бесконечное ли число «девяток» содержится в десятичном разложении $\sqrt{2}$.

То немногое, что известно о свойствах периодических дробей, связано с вращением (циклической перестановкой) цифр периода. Этому и посвящена настоящая статья. Мы покажем, что в десятичном разложении числа

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i}, \quad \text{где } a_1 = 1 \text{ и } a_{k+1} = 9^{a_k},$$

встретится любая комбинация цифр.¹⁾

Нас интересуют прежде всего *десятичные дроби* и, если не оговорено обратное, то подразумевается система счисления с основанием 10. Записи $\overline{a_1 \dots a_n}$, \overline{X} , где $a_1 \dots a_n$, X — последовательности цифр, обозначают числа, задаваемые этими последовательностями.

Автор приносит благодарность своему руководителю Алексею Яковлевичу Канелю–Белову за постановку задачи, полезные обсуждения и участие в редактировании. Данная работа докладывалась на научной конференции школьников Junior-98, организованной корпорацией INTEL в городе Fort Worth, и получила вторую премию.

¹⁾Задача 3.10 из задачника «Математического просвещения», №3, с. 233.

1. ВРАЩЕНИЕ ЦИФР В ПЕРИОДЕ. ОСНОВНАЯ ИДЕЯ

Начнем с простейшего примера.

ЗАДАЧА 1. Требуется найти такое шестизначное число A , произведения которого на 2, 3, 4, 5, 6 записываются циклическими перестановками его цифр.

РЕШЕНИЕ. Заметим, что последняя цифра числа A однозначно определяет последнюю цифру чисел $2A$, $3A$, $4A$, $5A$ и $6A$. Отсюда с помощью несложного перебора можно получить, что $A = 142857$.

Заметим, что $1/7 = 0,(142857)$. При этом

$$\begin{aligned} 2/7 &= 0,(285714), & 3/7 &= 0,(428571), & 4/7 &= 0,(571428), \\ 5/7 &= 0,(714285), & 6/7 &= 0,(857142). \end{aligned}$$

Таким образом, дроби вида $m/7$, где $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, получаются из дроби $1/7$ путем вращения цифр в периоде.

ЗАДАЧА 2. Последняя цифра числа двойка и ее перенесли в начало. В результате число удвоилось. Найти такое число.

РЕШЕНИЕ 1. Пусть искомое число записывается последовательностью цифр X . Последняя цифра числа $2\overline{X}$ четверка, поэтому X имеет вид $\dots 42$ и число $2\overline{X}$ записывается как $\dots 84$. Следовательно, X имеет вид $\dots 842$, а $2\overline{X}$ записывается как $\dots 684$, далее $X = \dots 6842$, откуда $2\overline{X} = \dots 3684$ и $X = \dots 36842$ и т. д. Последовательность цифр строится однозначно, в итоге имеем:

$$X = 105263157894736842.$$

Последовательность $X = 105263157894736842$ можно продолжать дальше. Аналогично рассуждая, можно показать, что множество всех чисел, удовлетворяющих условию задачи, имеет вид $\overline{XX\dots X}$.

Однако на эту задачу можно посмотреть и с несколько неожиданной точки зрения.

РЕШЕНИЕ 2. Пусть $X = Y2$. Тогда $\overline{Z} = 2\overline{X} = \overline{2Y}$. Рассмотрим бесконечную периодическую дробь $x = 0,(X)$. Тогда

$$(x + 2)/10 = 0,2(X) = 0,2Y2Y2Y\dots = 0,ZZZ\dots = 0,(Z) = 2x.$$

Откуда x удовлетворяет уравнению $(x + 2)/10 = 2x$ и $x = 2/19$. Таким образом, X есть период дроби $2/19$, и в результате вращения цифр в периоде этой дроби получаются дроби вида $1/19, 2/19, \dots, 18/19$.

ЗАДАЧА НА ИССЛЕДОВАНИЕ. Исследуйте числа, которые при переносе последней цифры в начало увеличиваются в α раз.

Вращение цифр в периоде имеет интересный арифметический смысл, причем получаются дроби с тем же знаменателем.

ТЕОРЕМА 1. *Циклические перестановки периода дроби p/q , где $0 < p < q$, а q взаимно просто с 10 и с p , есть числа вида k/q .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку q взаимно просто с 10, дробь p/q чисто периодическая. Пусть $p/q = 0,(a_1a_2 \dots a_k a_{k+1} \dots a_n)$ и пусть $\alpha = 0,(a_{k+1} \dots a_n a_1 a_2 \dots a_k)$ — результат циклической перестановки цифр периода. Тогда $10^k p/q = \overline{a_1 a_2 \dots a_k} + 0,(a_{k+1} \dots a_n a_1 a_2 \dots a_k) = N + \alpha$, где $N = \overline{a_1 a_2 \dots a_k}$ — целое число. Поскольку q взаимно просто с 10 и с p , после приведения $\alpha = (10^k p - Nq)/q$ к виду обыкновенной дроби ее знаменателем будет q .

В качестве иллюстрации к вышесказанному рассмотрим циклические перестановки дроби $1/13 = 0,(076923)$. Имеем:

$$\begin{aligned} 0,(076923) &= 1/13; & 0,(230769) &= 3/13; & 0,(307692) &= 4/13; \\ 0,(692307) &= 9/13; & 0,(769230) &= 10/13; & 0,(923076) &= 12/13. \end{aligned}$$

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Нам понадобятся несколько фактов и конструкций, которые очень полезны при решении теоретико-числовых задач. $\varphi(n)$ означает *функцию Эйлера*, то есть $\varphi(n)$ есть количество всех чисел, меньших n и взаимно простых с n , и $\varphi(1) = 1$. Если число n — простое, то $\varphi(n) = n - 1$. Известно, что если $n = n_1 n_2$ и числа n_1 и n_2 взаимно просты, то $\varphi(n) = \varphi(n_1)\varphi(n_2)$. Поэтому, разлагая число n в произведение степеней различных простых чисел $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$, получаем представление для $\varphi(n)$:

$$\varphi(n) = p_1^{k_1-1}(p_1 - 1)p_2^{k_2-1}(p_2 - 1) \dots p_s^{k_s-1}(p_s - 1).$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА. *Пусть числа x и n взаимно просты. Тогда*

$$x^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Частным случаем теоремы Эйлера является

МАЛАЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА. *Пусть p — простое число и x не делится на p , тогда*

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Из малой теоремы Ферма следует, что наименьшее k такое, что $x^k \equiv 1 \pmod{p}$ делит $p - 1$. Теорема о существовании первообразного корня (см. ниже) показывает, что при подходящем выборе x , такое k в *точности* равно $p - 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Тогда длина наименьшего периода дроби p/q в 10-ичном разложении равна такому минимальному k , что $10^k - 1$ делится на q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности считаем, что $p < q$. Пусть $p/q = 0, (a_1 \dots a_n)$, $a = \overline{a_1 \dots a_n}$. Тогда

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{10^n - 1}$$

и q делит $10^n - 1$ в силу взаимной простоты p и q . И наоборот, если q делит $10^n - 1$, то n — период дроби p/q .

(Все рассуждения непосредственно переносятся на произвольные системы счисления.)

Из предложения 1 и теоремы Эйлера выводится следующее утверждение, нужное для дальнейшего:

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть число q взаимно просто с 10 и с p . Тогда длина наименьшего периода дроби p/q есть делитель числа $\varphi(q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим длину наименьшего периода дроби p/q через n . Разделим $\varphi(q)$ на n с остатком: $\varphi(q) = ns + r$, $0 \leq r < n$. Тогда

$$10^r \equiv 10^{ns+r} \equiv 10^{\varphi(q)} \equiv 1 \pmod{q}.$$

И, следовательно, $r = 0$.

Кроме того, нам понадобится

ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРВООБРАЗНОГО КОРНЯ. Существует такое x , что $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, а из сравнения $x^a \equiv 1 \pmod{p}$ следует, что a делит $p - 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из предложения 1 и теоремы о существовании первообразного корня вытекает любопытное следствие. Для любого простого q найдется такое t , что t -ичное разложение дроби p/q имеет длину периода, в точности равную $q - 1$. Однако из этого не следует, что таким числом t непременно должно быть 10. Более того, неизвестно, конечно ли множество таких p , что 10^q не сравнимо с 1 по модулю p при $q < p - 1$. И, соответственно, минимальный период дроби k/p имеет длину $p - 1$.

Хотя поведение периодов дробей с простым знаменателем p при различных p чрезвычайно сложное, остатки по модулю степеней фиксированного простого p поддаются изучению. И в этом помогает следующая

ЛЕММА ГЕНЗЕЛЯ²⁾. Пусть p — простое число.

а) Пусть $x \equiv 1 \pmod{p^k}$, $x \not\equiv 1 \pmod{p^{k+1}}$. И, кроме того, либо $p > 2$, либо $k > 1$. Тогда для всякого натурального r

$$x^{p^r} \equiv 1 \pmod{p^{k+r}}, \quad x^{p^r} \not\equiv 1 \pmod{p^{k+r+1}}.$$

б) Пусть, кроме того, p^s делит m , но p^{s+1} не делит m . Тогда

$$x^m \equiv 1 \pmod{p^{k+r}}, \quad x^m \not\equiv 1 \pmod{p^{k+r+1}}.$$

(Отметим, что если одновременно $p = 2$ и $k = 1$ утверждение п. а) места не имеет.)

Из леммы Гензеля вытекает такое

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть числа x и k удовлетворяют условиям леммы Гензеля. Тогда остатки от деления степеней x^r на p^q ($q \geq k$) имеют вид $p^k s + 1$.

Суммируя вышесказанное, имеем следующую лемму, удобную для дальнейшего:

ЛЕММА 1.

а) $10^m \equiv 1 \pmod{3^q}$ тогда и только тогда, когда $m \equiv 0 \pmod{3^{q-2}}$.

б) Длина периода дроби $p/3^n$, где $n > 1$ и p не делится на 3, равна 3^{n-2} .

в) Остатки от деления чисел вида 10^r на 3^s имеют вид $9t + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. П. а) вытекает из леммы Гензеля, п. в) есть частный случай предыдущего следствия, п. б) вытекает из п. а) и предложения 1.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО УТВЕРЖДЕНИЯ

Наша цель — доказать основную теорему:

ТЕОРЕМА. Пусть последовательность $\{a_k\}$ задана рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_{k+1} = 9^{a_k}$ и пусть

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i}.$$

Тогда в десятичном разложении числа X встретится любая комбинация цифр.

ЗАМЕЧАНИЕ. Имеет место теорема Лиувилля: Пусть t — иррациональный корень уравнения $a_0 x^n + \dots + a_n = 0$, a_0, \dots, a_n — целые числа.

²⁾ А. Я. Канель-Белов. Устное сообщение.

Тогда при некотором N неравенство $|t - p/q| < 1/Nq^n$ не имеет решений в целых числах p и q .

Из этой теоремы следует, что число X трансцендентно, т. е. не может быть корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, так как приближается рациональными лучше, чем алгебраическое число любой фиксированной степени.

Нам понадобится

ЛЕММА 2. а) Пусть $p = 9k + 1 < 3^s$. Рассмотрим дробь $p/3^s$ и все дроби, которые из нее получаются путем циклической перестановки цифр периода. Тогда множество всех таких дробей суть $\{(9h + 1)/3^s \mid 9h + 1 < 3^s\}$.

б) В общем случае, если p взаимно просто с 3, то множество указанных дробей суть $\{h/3^s \mid h \equiv p \pmod{9} \text{ и } h < 3^s\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно проверить, что дробная часть числа $p10^m/3^s$ есть циклическая перестановка периода дроби $p/3^s$. Рассмотрим множество дробных частей чисел вида $p10^m/3^s$, $m = 0, \dots, 3^{s-2} - 1$. По лемме 1 это множество суть множество $\{p(9h + 1)/3^s\}_{h=0}^{3^{s-2}-1}$, что и составляет утверждение леммы.

П. б) доказывается аналогично.

Следующее утверждение, которое нам потребуется при доказательстве основной теоремы, представляет самостоятельный интерес.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть числа p и 3 взаимно просты. Тогда в десятичном разложении числа $x = p/3^s$ встретится любая последовательность из $[(s - 2) \lg 3]$ цифр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $N = [(s - 2) \lg 3]$. Рассмотрим какую-нибудь последовательность цифр α длины N . Достаточно показать, что некоторая циклическая перестановка цифр числа x может начинаться с α .

Пусть $\alpha = a_1 \dots a_N$. Множество вещественных чисел, у которых десятичная запись начинается с α , есть полуинтервал

$$\Delta = [0, a_1 \dots a_N; 0, a_1 \dots a_N + 10^{-N}).$$

Его длина равна 10^{-N} .

Рассмотрим множество дробей, получающихся путем вращения цифр в периоде исходной дроби. В силу леммы 2 это система точек отрезка $[0, 1]$, идущих с шагом $1/3^{s-2}$:

$$\left\{ \frac{1}{3^s}, \frac{10}{3^s}, \dots, \frac{3^s - 8}{3^s} \right\}.$$

И в любом подотрезке отрезка $[0, 1]$ длины большей, чем $1/3^{s-2}$, находится дробь указанного вида.

Поскольку $N < (s-2) \lg 3$, то $|\Delta| = 10^{-N} > 3^{-(s-2)}$ и в отрезке Δ встретится нужная нам дробь, десятичное разложение которой начинается с участка α . Предложение доказано.

Доказательство основной теоремы. Обозначим через X_n частичную сумму ряда $\sum_{i=1}^n 1/a_i$. Это чисто периодическая дробь и t_n — ее период. В силу предложения 2 число X_n содержит все последовательности цифр длины меньшей или равной $N_n = [a_n \lg 3/9]$.

Более того, в любом участке десятичной записи числа X_n , длина которого больше $N_n + t_n$, встретится каждая такая последовательность.

Нам надо показать, что остаточный член $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} 1/a_k$ не испортит ситуацию. Прежде всего, период не может состоять из одних девяток, и если $0 < \varepsilon < 10^{-3t_n}$, то первые $2t_n$ знаков десятичного разложения чисел X_n и $X_n + \varepsilon$ совпадают (перенос разряда может происходить только на девятке и он остановится где-то внутри третьего периода дроби X_n). Поэтому любой участок длины N_n также встречается в десятичном разложении числа $X_n + \varepsilon$.

В силу леммы 1 длина периода t_n десятичного разложения числа X_n равна $t_n = a_n/9$. Легко получить оценку: $R_n < 2/a_{n+1} < 10^{-3t_n}$. Из этой оценки, в силу только что сказанного, вытекает, что в десятичном разложении числа $X = X_n + R_n$ встречается любая комбинация из N_n подряд идущих цифр.

А так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\log_{10} 3}{9} a_n \right) = \infty,$$

параметр N с ростом n стремится к бесконечности и любая наперед заданная комбинация цифр встретится в десятичном разложении числа X .

ЗАМЕЧАНИЕ. Назовем *частотой* появления последовательности ν в X величину: $W(X, \nu) = \lim_{p \rightarrow \infty} m/p$, где m — количество последовательностей ν в начальном куске X длины p . Из доказательства основной теоремы можно извлечь следующий результат: $W(X, \nu) = 10^{-l}$. Это означает, что все комбинации цифр в числе X равновероятны. Такие числа называются *нормальными*. Содержательных примеров нормальных чисел не так много.