Задачный раздел

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Некоторые из этих задач (не обязательно самые сложные!) требуют знания «неэлементарной» математики — анализа, линейной алгебры и т. п.

Составителям этой подборки кажется, что предлагаемые ниже задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим свои собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются). Если автор задачи нам неизвестен, то в скобках указывается «фольклор».

1. Можно ли получить все возможные состояния кубика Рубика, последовательно выполняя некоторую комбинацию поворотов? (Учитываются только конечные, а не промежуточные состояния.)
   (*А. К. Ковальджи*)

2. Найти дискриминант многочлена $P(x) = x^{2003} + x + 1$.
   (*М. Л. Концевич*)

3. Можно ли круг с двумя дырками отобразить в себя без неподвижных точек? (*М. Л. Концевич*)

4. Доказать, что на описанной окружности каждого треугольника существует ровно три точки, для которых соответствующие прямые Симсона касаются окружности девяти точек треугольника, причем эти точки являются вершинами правильного треугольника.
   (*М. Ю. Панов*)

5. Для иррационального $\alpha > 1$ обозначим $N(\alpha) = \{[n\alpha] | n \in N\}$. При каких k найдутся такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, что множества $N(\alpha_1), \ldots, N(\alpha_k)$ задают разбиение натурального ряда?
   (*А. А. Заславский, А. В. Спивак*)

6. Внутри единичного квадрата расположено бесконечное множество точек. Всегда ли найдется гладкая кривая, проходящая через бесконечное его подмножество? А бесконечно гладкая? (*Фольклор*)

7. Докажите, что для любых целых неотрицательных n, p найдется такая константа $C > 0$, что для любой бесконечно дифференцируемой функции f условия $\int_0^1 x^n |f^{(k)}(x)|^{1/p} dx < 1$; $k = 0, \ldots \lfloor (n+p)/p \rfloor$ влекут условие $|f(0)| < C$. (*А. Я. Канель*)

8. В граничных клетках таблицы $n \times n$ расставлены числа. Докажите, что можно дописать числа в остальные клетки таблицы, чтобы каждое число равнялось бы среднему арифметическому своих соседей. (*М. З. Двейрин*)

9. Сфера раскрашена в 2 цвета. Докажите, что на ней найдется правильный треугольник с одноцветными вершинами. (*Л. А. Емельянов*)

10. Существует ли векторное пространство нильпотентных матриц некоторого порядка, произведения элементов которого порождают всю матричную алгебру? (Матрица A называется *нильпотентной*, если $A^k = 0$ для некоторого k.) (*П. Якобианов*)

11. Ряд $\sum a_n$ *сходится в среднем*, если существует предел средних арифметических его частных сумм $\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^n s_k)/n$, $s_k = \sum_{m=1}^k a_k$. Пусть ряд $\sum a_n$ сходится в среднем и при этом а) $a_n = o(1/n)$ (т. е. $\lim na_n = 0$); б) $a_n = O(1/n)$ (т. е. $\exists C > 0 : |na_n| < C$).
Докажите, что тогда ряд $\sum a_n$ сходится. (*А. Я. Белов*)

12. Идеальный солдат является конечным автоматом (т. е. принимает конечное число состояний и воспринимает конечное число сигналов). Солдат понимает «лево-право», воспринимает сигналы только от своих непосредственных соседей и понимает, является ли он крайним в шеренге. За один такт он обменивается сигналами с соседями. Можно ли так запрограммировать солдат, что если поставить в шеренгу солдат, находящихся в некотором одинаковом состоянии, то после того как первому будет дана команда, через некоторое время все они выстрелят одновременно? (Программа не должна зависеть от длины шеренги.) (*Задача Майхилла о стрелках*)

Исправления

В задачнике №3 «Математического Просвещения» условие задачи 3.9 (автор — С. Маркелов) было приведено неверно. Приводим правильное условие этой задачи и предлагаем читателям попробовать свои силы в ее решении.

3.9. Доказать, что на поверхности трехмерного выпуклого тела найдутся 5 точек, образующих вершины правильного 5-угольника.