Неравенства и экстремальные задачи

Теория экстремума в простых примерах

Я. Бринкхаус В. Ю. Протасов

С задачами на минимум и максимум каждый из нас впервые сталкивается в школе, а затем на олимпиадах и вступительных экзаменах, где они, подчас, помимо очень хорошей математической подготовки и сообразительности, требуют поиска нестандартных путей решения. Здесь мы встречаем множество красивых задач, и для каждой приходится изобретать свой метод. Затем, в институте, студентов знакомят с элементами теории экстремума на занятиях по математическому анализу. А тут ситуация обратная: есть методы стандартного решения, но очень мало красивых примеров. Большинство задач, как правило, рутинные. Каждый преподаватель знает, как трудно бывает убедить студента (особенно — увлеченного предметом) переключиться на новые методы решения, и не пытаться решать новые задачи «по-школьному».

В этой статье мы предлагаем экскурс в теорию конечномерных экстремальных задач (именно с них начинаются все стандартные курсы оптимизации в университетах), целиком построенный на примерах и задачах, с минимумом теоретических объяснений. Примеры и задачи собирались авторами в течение многих лет, при подготовке курсов для студентов математических и экономических специальностей в университетах Москвы (МГУ и НМУ) и Нидерландов (университеты Роттердама, Дельфта и Утрехта). По нашему убеждению, каждый университетский курс должен выполнять три основные функции: научить, убедить и заинтересовать. Поэтому примеры и задачи должны быть, во-первых, интересными, во-вторых (и это труднее всего!) — убедительными. Каждый пример должен подчеркивать силу того или иного метода. А кроме того — показывать, что даже олимпиадные задачи, которые имеют красивые элементарные решения, могут решаться в рамках стандартных методов проще, красивее и естественнее. Более того, начала теории экстремальных задач позволяют находить новые доказательства старых классических теорем.

Начнем с задач, которые решаются «школьными» методами: принцип Ферма (производная в точке минимума равна нулю) плюс теорема существования (теорема Вейерштрасса о достижимости минимума непрерывной функции на компактном множестве) — это тема параграфа 1. Во втором параграфе обратимся к выпуклым задачам. В третьем — к задачам с ограничениями, решаемым с помощью правила множителей Лагранжа. Среди предложенных примеров — как классические теоремы из различных областей математики (основная теорема алгебры, приведение квадратичной формы к главным осям, теорема Биркгофа и т. д., некоторые классические неравенства, закон Снеллиуса о преломлении света, задачи Дидоны, Фаньяно, Торичелли, сети Штейнера и т. д.), так и относительно новые задачи геометрии, алгебры и анализа, а также задачи, предлагавшиеся на различных студенческих и школьных олимпиадах. Несколько примеров из математической экономики собраны в отдельный параграф. Каждый параграф мы начинаем с короткого теоретического введения.

В статье предлагается 50 задач для самостоятельного решения, около трети из них — довольно трудные. Надеемся, что статья будет интересна преподавателям математики, студентам младших курсов и ученикам математических школ.

1. Принцип Ферма

Функции одной переменной. Метод, называемый принципом Ферма, общеизвестен: если функция f дифференцируема, то каждая точка ее локального минимума (максимума) является стационарной точкой, т. е. является решением уравнения $f'(x) = 0$. Об этом еще до Ферма было сказано:

> «По обе стороны от места наибольшего значения убывание вначале нечувствительно» (Иоганн Кеплер).

Обратное неверно: стационарная точка может не быть точкой локального экстремума, как показывает простейший пример: функция x^3 в точке $x = 0$. Чтобы найти экстремальные значения функции f, решаем уравнение $f'(x) = 0$, находим все стационарные точки, которые будут «подозрительными» на экстремум. Остается воспользоваться теоремой существования: непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ достигает своего наибольшего и наименьшего значения. Будем считать этот факт геометрически очевидным, и примем его без доказательства. Таким образом, точки максимума и минимума существуют, а значит, находятся среди «подозрительных» — либо стационарных, либо концевых. Тогда простым перебором находим точки минимума и максимума.

Задача с двумя или более переменными. Принцип Ферма распространяется на этот случай без существенных изменений. Чтобы найти экстремальные значения функции $f(x)$, где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, находим стационарные точки из уравнения

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_{x_j}(x_1, \dots, x_n) = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Уравнений здесь столько же, сколько неизвестных. Далее пользуемся теоремой Вейерштрасса (теоремой существования), заменив в ней «отрезок $[a, b]$» на «компакт A в $\mathbb{R}^n$» — ограниченное замкнутое множество. «Замкнутое» означает, что множество содержит все свои предельные точки.

Естественный вопрос: что делать, если минимум ищется на неограниченном множестве? Например, на всем $\mathbb{R}^n$? А если — на незамкнутом множестве, например, на открытом интервале (a, b)? В этом случае какие-нибудь дополнительные свойства функции f могут помочь. Часто используют два утверждения, доказательства которых будут простыми упражнениями для читателя.

Лемма 1. *Если функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна, и при этом $f(x) \to +\infty$ при $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \to \infty$, то она достигает своего минимума на $\mathbb{R}^n$.*

Лемма 2. *Если функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ непрерывна и $f(x) \to +\infty$ при $x \to a$ и при $x \to b$, то она достигает своего минимума на интервале (a, b).*

Так же формулируются соответствующие утверждения на максимум. Начнем с одного известного примера.

Пример 1. Закон Снеллиуса. Луч света пересекает прямую границу двух сред, входя под углом α, и выходя под углом β (оба угла отсчитываются от нормали к границе). Тогда $\dfrac{\sin\alpha}{v_a} = \dfrac{\sin\beta}{v_b}$, где v_a и v_b — скорости света в этих средах.

Решение. Считаем известным, что луч света при своем движении от одной точки к другой выбирает такой путь, для прохождения которого требуется минимальное время по сравнению с любым другим возможным путем. (Этот принцип в оптике также установил Ферма.) Если взять на луче точки A и B по разные стороны от границы, а саму границу обозначить через l, получим задачу на минимум:

$$\begin{cases} f(M) = \dfrac{AM}{v_a} + \dfrac{BM}{v_b} \ \to \ \min, \\ M \in l. \end{cases} \tag{1}$$

Точка минимума существует, это гарантирует лемма 1. Обозначим ее через M_0. Теперь нужно вычислить производную функции f. Как это сделать? Можно выразить саму функцию f по теореме Пифагора, или по теореме косинусов, затем найти ее производную. Удобнее, однако, (и это может показаться парадоксальным), рассмотреть f не как функцию на прямой линии, а как функцию на всей плоскости. Производная f' (градиент) длины отрезка AM в точке M является вектором u_a единичной длины, сонаправленным с вектором $\overrightarrow{AM}$. Аналогично определяем вектор u_b — производную длины BM. Итак, $f' = u_a/v_a + u_b/v_b$. Производная функции f вдоль прямой l — это проекция вектора f' на эту прямую. Таким образом,

$$f'(M) = \frac{\sin\alpha}{v_a}|u_a| - \frac{\sin\beta}{v_b}|u_b|.$$

Но если M_0 — точка минимума, то $f'(M_0) = 0$. А поскольку $|u_a| = |u_b| = 1$, получаем окончательно $\dfrac{\sin\alpha}{v_a} = \dfrac{\sin\beta}{v_b}$.

Замечание 1. Аналогично, и даже несколько проще, можно вывести известный закон отражения света: угол падения равен углу отражения. Нужно взять две произвольные точки A и B по одну сторону от прямой l и решить экстремальную задачу (1) при $v_a = v_b$. Конечно же, эту задачу можно решить без всяких производных, чисто геометрически, используя симметрию относительно прямой l. Однако, у нашего способа есть, как минимум, два преимущества. Во-первых, он без изменения распространяется на случай $v_a \neq v_b$ (а геометрически это сделать непросто!). Во-вторых, и это самое главное, он находит не только точки минимума, но и все стационарные точки функции f. Так, мы доказали, что задача (1) всегда имеет единственную стационарную точку, и эта точка характеризуется свойством $\sin\alpha/v_a = \sin\beta/v_b$. Воспользуемся этим в следующем примере из эргодической теории.

ПРИМЕР 2. ТЕОРЕМА БИРКГОФА. Для произвольной гладкой замкнутой кривой на плоскости, ограничивающей выпуклую фигуру, существует биллиард с n вершинами (биллиардом называется многоугольник с вершинами на данной кривой, любые две соседние стороны которого образуют с кривой равные углы).

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим множество всех n-угольников с вершинами на данной кривой. Очевидно, это множество будет компактным, если только мы позволим соседним вершинам совпадать. Следовательно, среди этих многоугольников найдется тот, который имеет максимальный периметр. Он и является биллиардом. Для доказательства заметим сначала, что он имеет ровно n различных вершин (в противном случае добавим несколько недостающих вершин, периметр от этого увеличится). Возьмем теперь три соседние вершины A_1, A_2, A_3 и обозначим через l касательную к кривой в точке A_2. Таким образом, $l = \{A_2 + tu,\ t \in \mathbb{R}\}$, где $u \in \mathbb{R}^2$, $|u| = 1$ — направляющий вектор прямой. Предположим, отрезки A_2A_1 и A_2A_3 образуют с l не равные углы. Тогда производная функции $f(t) = f(M) = A_1M + A_2M$, где $M = A_2 + tu$, не равна нулю в точке $t = 0$ (замечание 1). При $t \to 0$ имеем $f(t) = f(0) + f'(0)t + o(t)$, где $o(t)$, как обычно, обозначает величину, бесконечно малую по сравнению с t. С другой стороны, l — касательная, поэтому для произвольной точки N кривой, близкой к A_2, имеем $f(N) = f(t) + o(t)$, где $M = A_2 + tu$ — ближайшая к N точка прямой l. Итак, $f(N) = f(0) + f'(0)t + o(t)$. Но поскольку $f'(0) \neq 0$, мы видим, что на кривой существуют точки N, для которых $f(N) > f(0) = f(A_2)$, а это противоречит максимальности периметра нашего многоугольника.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В теореме Биркгофа гладкость кривой существенна! Кривая должна быть, как минимум, дифференцируемой в каждой точке, иначе биллиарда может не существовать. Например, кривая, ограничивающая тупоугольный треугольник, не имеет треугольного биллиарда. Почему? Если треугольник имеет биллиард из трех вершин, то эти вершины лежат в основаниях высот (пример 8), а для тупоугольного треугольника два основания из трех лежат вне треугольника.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Биллиарды изучаются в эргодической теории, теории динамических систем, механике (см., например, [11]). Они представляют собой замкнутые траектории движения механических систем в фазовой плоскости. Мы видели, что вписанный n-угольник максимального периметра является биллиардом. Однако для остроугольных треугольников биллиард (треугольный) соответствует не максимальному, а минимальному периметру (задача Фаньяно, пример 8). Это может показаться противоречием. Но дело в том, что как в минимальном, так и в максимальном случае биллиард соответствует стационарному положению вершин, когда все частные производные периметра по вершинам равны нулю. Это отражает один из основных принципов классической механики (принцип Гамильтона): движение механической системы происходит вдоль стационарных траекторий, где производные действия равны нулю. При этом само действие не обязано быть минимальным, как предполагалось математиками XVIII века. Подробнее об этом см., например, [10].

Упражнение 1. Фокальное свойство эллипса. Луч света, выходящий из фокуса эллипса, отразившись от его поверхности, попадает во второй фокус.

Упражнение 2. Докажите, что стороны любого n-угольного биллиарда данного эллипса касаются некоторого фиксированного эллипса. Как связан этот эллипс с исходным?

Упражнение 3. Сформулируйте и докажите фокальные свойства гиперболы и параболы.

Пример 3. Через данную точку внутри угла проведите отрезок наименьшей длины с вершинами на сторонах угла.

Решение. Лемма 1 гарантирует существование наименьшего отрезка. Обозначим его через AB, а данную фиксированную точку внутри угла — через M. Проведем через M другой отрезок $A'B'$ с вершинами на сторонах угла. Пусть δ — ориентированный угол между $A'B'$ и AB. Функция $f(\delta) = A'B'$ достигает своего минимума в точке $\delta = 0$, поэтому $f'(0) = 0$. Пусть $\alpha = \angle KAB$, $\beta = \angle KBA$, где K — вершина угла, Применив теорему синусов к треугольникам MBB' и MAA', получим

$$MB' = MB\frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\delta)}\,; \qquad MA' = MA\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\delta)}\,,$$

следовательно

$$\begin{aligned}\Delta f &= A'B' - AB = MB' + MA' - MB - MA = \\ &= MB\left(\frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\delta)} - 1\right) + MA\left(\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\delta)} - 1\right) = \\ &= -MB\frac{2\sin\frac{\delta}{2}\cos\left(\beta+\frac{\delta}{2}\right)}{\sin(\beta+\delta)} + MA\frac{2\sin\frac{\delta}{2}\cos\left(\alpha-\frac{\delta}{2}\right)}{\sin(\alpha-\delta)}\,.\end{aligned}$$

Итак,

$$\frac{\Delta f}{\Delta\delta} = -\frac{2\sin\frac{\delta}{2}}{\delta}\left(MB\frac{\cos\left(\beta+\frac{\delta}{2}\right)}{\sin(\beta+\delta)} - MA\frac{\cos\left(\alpha-\frac{\delta}{2}\right)}{\sin(\alpha-\delta)}\right).$$

Поскольку $\dfrac{2\sin\frac{\delta}{2}}{\delta} \to 1$ при $\delta \to 0$, и при этом

$$\frac{\cos\left(\beta+\frac{\delta}{2}\right)}{\sin(\beta+\delta)} \to \operatorname{ctg}\beta, \quad \frac{\cos\left(\alpha-\frac{\delta}{2}\right)}{\sin(\alpha-\delta)} \to \operatorname{ctg}\alpha,$$

получаем окончательно

$$f'(0) = -MB\operatorname{ctg}\beta + MA\operatorname{ctg}\alpha.$$

Но так как $f'(0) = 0$, то для кратчайшего отрезка AB получаем

$$MB\operatorname{ctg}\beta = MA\operatorname{ctg}\alpha.$$

Как геометрически охарактеризовать это свойство? Опустим перпендикуляр KH на AB. Нетрудно проверить, что $HB/HA = \operatorname{ctg}\beta/\operatorname{ctg}\alpha$. С другой стороны, $MA/MB = \operatorname{ctg}\beta/\operatorname{ctg}\alpha$, поэтому $MA = HB$, $MB = HA$. Итак,

> *кратчайший отрезок AB характеризуется следующим свойством: проекция вершины угла на AB симметрична точке M относительно середины отрезка AB.*

Замечание 4. Почему мы ограничились лишь тем, что охарактеризовали положение отрезка AB, а не дали способа его построения? Дело в том, что для произвольного угла этот отрезок не может быть построен с помощью циркуля и линейки. Именно поэтому эта «простая» геометрическая задача имеет столь громоздкое решение. Приведенное решения является самым коротким из всех, известных авторам (см. также [15]).

Если бы существовало такое построение, которое находило бы кратчайший отрезок для любого угла, то оно годилось бы и для прямого угла. Если угол K прямой, то $MA/MB = \operatorname{ctg}\beta/\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}-\alpha)/\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha$. С другой стороны, $MA/MB = \operatorname{tg}\gamma/\operatorname{tg}\alpha$, где γ — угол между KM и KA. Итак, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\gamma}$. Построить отрезок AB означает найти кубический корень из числа $\operatorname{tg}\gamma$. Последнее, как известно, не выполнимо с помощью циркуля и линейки.

В экстремальных задачах такое случается довольно часто, когда возможно только охарактеризовать положение точки минимума (максимума), а не найти ее конструктивно (задачи 15–17 и 38–40).

Упражнение 4. Прямой, проходящей через данную точку внутри угла, отрезать от этого угла треугольник наименьшей площади. Найдите как геометрическое решение, так и решение, использующее производную. Какое из них проще?

Упражнение 5. То же, но для треугольника наименьшего периметра. Найдите как геометрическое решение, так и решение, использующее производную.

Упражнение 6. Касательной к данной окружности, лежащей внутри угла, отрезать от этого угла треугольник а) минимальной площади; б) минимального периметра.

Упражнение 7. Через данную точку внутри угла провести прямую так, чтобы сумма $KA + KB$ была наименьшей (K — вершина угла, A и B — точка пересечения прямой со сторонами угла.)

Рассмотрим теперь несколько примеров из алгебры и анализа.

Пример 4. Основная теорема алгебры. Многочлен с комплексными коэффициентами, отличный от тождественной константы, имеет комплексный корень.

Решение. Возьмем произвольный многочлен $p(z)$, и рассмотрим величину $|p(z)|$ как функцию двух действительных переменных x и y, где $z = x + yi$. По лемме 1 эта функция достигает своего минимума в некоторой точке $\tilde{z} = (\tilde{x}, \tilde{y})$. Не ограничивая общности, с возможным сдвигом аргумента, полагаем $\tilde{z} = 0$. Предположим, что в этой точке многочлен $p(z)$ не обращается в ноль. Пусть k — наименьшее положительное число, для которого коэффициент при z^k в многочлене $p(z)$ ненулевой. Тогда $p(z) = a_0 + a_k z^k + \ldots + a_n z^n$, $k \geqslant 1$ и $a_k \neq 0$. Более того, $a_0 \neq 0$, поскольку $a_0 = p(0) = p(\tilde{z}) \neq 0$. Теперь возьмем одно из решений $u \in \mathbb{C}$ уравнения $a_0 + a_k z^k = 0$, т.е. один из комплексных корней k-той степени из числа $-a_0 a_k^{-1}$. Получаем

$$|p(tu)| = |a_0 + a_k(tu)^k + o(t^k)| = |(1 - t^k)a_0 + o(t^k)| < |a_0| = |p(0)|,$$

для достаточно малых $t > 0$. Получили противоречие: по предположению $\tilde{z} = 0$ — точка минимума для $|p(z)|$. Теорема доказана.

Упражнение 8. Принцип максимума для аналитической функции. Докажите, что максимум модуля аналитической функции (функции комплексной переменной z, являющейся суммой абсолютно сходящегося степенного ряда $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$) в некотором круге на комплексной плоскости достигается на границе этого круга.

Рассмотрим теперь несколько примеров из теории приближений.

Упражнение 9. Принцип наименьших квадратов. Предположим, нами получены 5 пар чисел $(x_i, y_i), 1 \leqslant i \leqslant 5$: $(1,2)$, $(2,5)$, $(4,7)$, $(6,10)$, $(8,14)$. Мы хотим подобрать линейную функцию $y = ax + b$, которая бы выражала связь между переменными в этих парах наилучшим образом. Один из способов — выбрать функцию, для которой сумма квадратов $f(a,b) = \sum_{i=1}^{5}(y_i - ax_i - b)^2$ была бы наименьшей. Найдите эту функцию.

Замечание 5. Принцип наименьших квадратов имеет множество приложений. Например «решить систему линейных уравнений, которая не имеет решения». Более точно: найти точку минимума функции $f(x) = |Ax - b|$ на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Здесь A — заданная $m \times n$-матрица, а $b \in \mathbb{R}^m$ — данный вектор; норма евклидова $|x| = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2$. Эта задача всегда имеет решение (лемма 1), причем единственное.

Пример 5. Многочлен наилучшего приближения. Принцип наименьших квадратов приближает функцию, заданную в нескольких точках, многочленом первой степени. А что, если приближать функцию многочленами более высоких степеней? И не на конечном числе точек, а на целом отрезке? Какой многочлен будет наилучшим? Напомним, что многочлен Тейлора приближает функцию лишь в малой окрестности точки, нам же нужно приблизить ее на отрезке. К сожалению, коэффициенты многочленов наилучшего приближения в такой задаче могут быть очень велики. Это обстоятельство делает задачу чувствительной по отношению к малым изменениям функции. Поэтому обычно делают так: для каждого целого $k \geqslant 0$ решаем экстремальную задачу $\int_a^b \left|p_k(x)\right|^2 dx \ \to \ \min$, где p_k — неизвестный многочлен степени k со старшим коэффициентом 1. Таким образом, для каждого $k \geqslant 0$ мы приближаем функцию «тождественный ноль» многочленом степени k. Наилучшие многочлены p_k называются *многочленами Лежандра*. Затем мы находим для данной функции f многочлен наилучшего приближения в виде линейной комбинации многочленов p_k.

Упражнение 10. Найдите многочлен Лежандра $p_2(t)$ на отрезке $[-1,1]$, т. е. решите экстремальную задачу $\int_{-1}^{1}(t^2 + x_2 t + x_1)^2\, dt$.

Упражнение 11. Найдите многочлен Лежандра $p_3(t)$ на отрезке $[-1,1]$.

Упражнение 12. Формула Родригеса. Докажите, что многочлен Лежандра $p_k(t)$ на отрезке $[-1,1]$ вычисляется по формуле

$$p_k(t) = \frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{(dt)^n}(t^2-1)^n. \tag{2}$$

Подсказка. Рассмотрите соответствующую экстремальную задачу и докажите, что ее решение единственно и характеризуется следующим свойством: многочлен p_k ортогонален всем многочленам меньших степеней, то есть

$$\int_{-1}^{1} t^r\, p_k(t)\, dt = 0, \qquad 0 \leqslant r \leqslant k-1.$$

Далее по индукции покажите, что многочлены (2) этим свойством обладают.

2. Выпуклые задачи

Функции одной переменной. Непрерывная функция f называется выпуклой, если для любых x_1, x_2 выполнено неравенство

$$f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big) \leqslant \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2).$$

Если это неравенство строгое для любых $x_1 \neq x_2$, то функция называется строго выпуклой. Если функция одной переменной дважды дифференцируема на отрезке, то удобным критерием ее выпуклости является неотрицательность второй производной на этом отрезке: $f''(x) \geqslant 0$. Если же вторая производная везде строго положительна (или, более точно, не обращается в тождественный ноль ни на каком интервале), то функция строго выпукла. Для экстремальных задач выпуклые функции чрезвычайно удобны, благодаря двум своим свойствам:

▷ Любой локальный минимум выпуклой функции является ее глобальным минимумом на всем отрезке.

▷ Если функция f выпукла, то условие стационарности $f'(\hat{x}) = 0$ является не только необходимым для минимальности функции в точке $\hat{x}$, но и достаточным.

Для строго выпуклых функций добавляется еще одно замечательное свойство:

▹ Строго выпуклая функция имеет не более одной точки минимума.

Более того, для строго выпуклых функций выполняется принцип максимума: точка максимума на компактном множестве всегда лежит на границе этого множества.

Функции многих переменных. Определения и свойства те же, что и в случае одной переменной. Два отличия: везде отрезок заменяется на выпуклое тело (выпуклый компакт), а также критерий выпуклости $f'' \geqslant 0$ заменяется на условие неотрицательной определенности квадратичной формы, заданной матрицей из вторых производных. Ввиду практической сложности этого критерия, мы не будем его использовать, а будем проверять выпуклость функции многих переменных просто по определению (что в большинстве случаев гораздо проще). Подробнее о свойствах выпуклых функций и о выпуклых экстремальных задачах см. [2, 3].

Пример 6. Дан выпуклый четырехугольник. Доказать, что среди всех отрезков, проходящих через точку пересечения диагоналей и имеющих концы на границе четырехугольника, наибольшую длину имеет одна из диагоналей.

Несмотря на такой «школьный» вид и на геометрическую очевидность этого факта, доказать его непросто. Доказательства, которые можно встретить в литературе, используют довольно громоздкие вычисления. Наиболее простое из известных нам рассуждений использует выпуклость. Начнем с того, что установим следующий полезный факт, который пригодится и в других задачах:

Лемма 3. *Дана прямая a и точка P, не лежащая на ней. Для произвольной точки $M \in a$ обозначим через α ориентированный угол между a и отрезком PM. Тогда длина отрезка PM является строго выпуклой функцией угла α.*

Для доказательства опустим перпендикуляр из P на прямую a (пусть h — его длина) и выразим $MP = f(\alpha) = \dfrac{h}{\sin\alpha}$. Читатель без труда проверит, что $f''(\alpha) > 0$.

Отметим, что мы могли бы обозначить через α угол, образуемый отрезком MP с любым фиксированным направлением, и утверждение леммы 3 осталось бы верным (поскольку сдвиг аргумента не влияет на строгую выпуклость функции).

Вернемся к примеру 6.

Решение примера 6. Пусть P — точка пересечения диагоналей, M и N — точки на границе четырехугольника, причем отрезок MN проходит через P. Пусть также α — угол между отрезком MP и некоторым фиксированным направлением. Углы α_1 и α_2 соответствуют диагоналям четырехугольника, таким образом $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$. Согласно лемме 3 обе функции $f_1(\alpha) = MP$ и $f_2(\alpha) = NP$ строго выпуклы на отрезке $[\alpha_1, \alpha_2]$, значит и их сумма $f_1 + f_2 = MN$ также строго выпукла. Следовательно, ее максимум достигается на конце отрезка, т. е., на одной из диагоналей четырехугольника.

Из леммы 3 можно «задаром» получить ряд интересных следствий. Например, такое:

Следствие 1. *Биссектриса треугольника меньше полусуммы сторон, между которыми она заключена.*

Для доказательства достаточно применить определение строгой выпуклости

$$f\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right) < \frac{1}{2}\left(f(\alpha_1)+f(\alpha_2)\right)$$

к функции $f(\alpha) = MP$.

Замечание 6. Полезно также следующее усиление леммы 3: функция $f(\alpha) = \ln MP$ также строго выпукла. В самом деле,

$$\left(\ln MP\right)'' = \left(\ln\frac{h}{\sin\alpha}\right)'' = (-\operatorname{ctg}\alpha)' = 1/\sin^2\alpha > 0.$$

Упражнение 13. Докажите, что биссектриса треугольника меньше среднего геометрического двух сторон, между которыми она заключена.

Всем известна задача о точке на прямой, для которой сумма расстояний до двух фиксированных точек минимальна. Ответ легко получается после симметрии относительно прямой. А каков будет ответ, если точек не две, а три? А если рассмотреть трехмерный аналог: для какой точки плоскости сумма расстояний до фиксированных точек пространства минимальна? Наконец, часто возникает такая задача: Найти точку на плоскости (или, более общо, в $\mathbb{R}^n$), сумма расстояний от которой до m данных точек минимальна. Сколько точек минимума существует в таких задачах, и как их охарактеризовать? Решения этих и многих других задач опираются на ключевую лемму:

Лемма 4. *а) Пусть данные точки $A_1,\ldots,A_m \in \mathbb{R}^n$, $m \geqslant 3$, не все лежат на одной прямой. Тогда сумма расстояний*

$$f(M) = A_1M + \ldots + A_mM$$

является строго выпуклой функцией точки $M \in \mathbb{R}^n$.

б) Пусть $A_1,\ldots,A_m \in \mathbb{R}^n$, $m \geqslant 2$ — данные точки, и H — аффинная плоскость в $\mathbb{R}^n$, не содержащая ни одной из этих точек. Тогда функция $f(M) = A_1M + \ldots + A_mM$, $M \in H$, строго выпукла на H.

Доказательство. Докажем только пункт а), доказательство б) полностью аналогично. Нужно показать, что для любой пары различных точек $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство $f(M) < \frac{1}{2}\big(f(M_1)+f(M_2)\big)$, где M — середина отрезка M_1M_2. Поскольку A_jM — медиана треугольника $M_1A_jM_2$, ее длина не превосходит $\frac{1}{2}\left(A_jM_1 + A_jM_2\right)$, причем неравенство строгое, если A_j не лежит на прямой M_1M_2. Сложив все неравенства от $j=1$ до m и замечая, что хотя бы одно из них строгое (так как не все точки A_j лежат на одной прямой), получаем требуемое.

Пример 7. Точка Ферма – Торичелли. Если углы треугольника меньше $2\pi/3$, то сумма расстояний от точки до вершин треугольника достигает своего минимума в единственной точке, из которой все стороны треугольника видны под углом $2\pi/3$.

Решение. Оставим читателю доказательство существования такой точки T и докажем, что в ней достигается минимум суммы расстояний. Так как все углы ABC меньше $2\pi/3$, то T не совпадает ни с одной из вершин треугольника. Поэтому функция $f(M) = MA + MB + MC$ дифференцируема в точке $M = T$; ее производная равна сумме трех единичных векторов, сонаправленных векторам AT, BT и CT. Так как углы между этими векторами равны $2\pi/3$, то их сумма равна нулю. Итак, $f'(T) = 0$. Используя строгую выпуклость функции f, заключаем, что T — единственная точка минимума функции f.

Пример 8. Задача Фаньяно. Вписать в данный остроугольный треугольник ABC треугольник наименьшего периметра (на каждой стороне ABC должна лежать одна вершина треугольника).

Решение. Покажем, что единственным решением задачи является ортотреугольник (с вершинами в основаниях высот треугольника ABC). Пусть A', B', C' — три точки, лежащие на соответствующих сторонах треугольника ABC. Зафиксируем две из них A', B' и рассмотрим функцию одной переменной $g(C') = A'C' + B'C'$. Ее производная равна нулю, если отрезки $A'C', B'C'$ образуют равные углы с прямой AB (замечание 1). Аналогично с двумя другими суммами. Итак, производная функции $f(A', B', C') = A'B' + B'C' + C'A'$ равна нулю если отрезки $A'B', B'C', C'A'$ образуют попарно равные углы со сторонами треугольника ABC. Стороны ортотреугольника этим свойством обладают. Тогда из строгой выпуклости функции f (лемма 4) следует, что ортотреугольник является единственным треугольником минимального периметра.

Упражнение 14. Исследуйте задачу Фаньяно для четырехугольника. Для каких четырехугольников минимальный вписанный четырехугольник существует, и будет ли он единственным?

Упражнение 15. В трехмерном пространстве даны три попарно скрещивающиеся прямые. Докажите, что существует единственная тройка точек A, B, C (по одной на каждой прямой), обладающая таким свойством: каждая из трех прямых образует равные углы с двумя соответствующими сторонами треугольника ABC (AB и AC образуют равные углы с прямой, проходящей через точку A и т. д.)

Упражнение 16. На плоскости даны m точек. При каких условиях на эти точки найдется точка M, для которой сумма m единичных векторов с общим началом в M, направленных к этим точкам, равна нулю? Сколько таких точек M может быть?

Упражнение 17. Пусть M — точка внутри тетраэдра $ABCD$, для которой сумма расстояний до вершин минимальна. Докажите, что противоположные рёбра тетраэдра видны из точки M под равными углами. Покажите также, что биссектрисы двух этих углов лежат на одной прямой. Сформулируйте условия на тетраэдр, при которых такая точка существует (по условию, она не совпадает с вершинами.)

Упражнение 18. Четыре деревни расположены в вершинах квадрата со стороной 4 км. Жители хотят соединить их системой дорог так, чтобы из каждой деревни можно было проехать в любую другую. Они собрали деньги на 11 км дороги. Хватит ли этого?

Упражнение 19. Аналогичная задача для правильного тетраэдра. Паук связал все вершины правильного тетраэдра. Какова при этом наименьшая длина паутины? Дадут ли ответ четыре отрезка, соединяющие вершины с центром, или паук сможет обойтись меньшей длиной?

Упражнение 20. Сетью Штейнера для данных точек $A_1, \dots, A_n$ называется система отрезков (граф), соединяющая эти точки и имеющая наименьшую суммарную длину.

Примем без доказательства, что сеть Штейнера существует для любого набора точек. Точки $A_1, \dots, A_n$ будем называть *действительными вершинами* этого графа, а остальные его вершины — *ложными*.

a) докажите, что сеть Штейнера является односвязным графом, т. е. она связывает все вершины и не содержит замкнутых путей, или, что то же самое, для любой пары вершин существует единственный путь, их соединяющий;

b) докажите, что из каждой ложной вершины сети Штейнера выходит ровно 3 отрезка, причем углы между ними равны $2\pi/3$;

c) докажите, что из каждой действительной вершины выходят $1, 2$ или 3 отрезка. В случае двух отрезков угол между ними не меньше $2\pi/3$, в случае трех отрезков углы между ними равны $2\pi/3$;

d) постройте сеть Штейнера для треугольника. Для квадрата (сравните с упражнением 18). Для равнобедренной трапеции. Для правильного пятиугольника. Для правильного тетраэдра (сравните с упражнением 19). Для куба.

Мы завершаем этот параграф несколькими примерами из линейной алгебры. Напомним, что произведением Адамара $x * y$ точек $x, y \in \mathbb{R}^n$ называется точка с координатами $(x_1y_1, \dots, x_ny_n) \in \mathbb{R}^n$, где x_i, y_i — координаты x и y.

Упражнение 21. Пусть аффинные плоскости P и D являются ортогональными дополнениями друг к другу в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что каждая из них содержит положительную точку (точку с положительными координатами). Докажите, что тогда каждая положительная точка пространства $\mathbb{R}^n$ единственным образом представляется в виде произведения Адамара точки из P и точки из D.

Подсказка. Для каждой положительной точки $x \in \mathbb{R}^n$ рассмотрите экстремальную задачу

$$f_x(p, d) = p^T \cdot d - x^T \cdot \ln(p * d) \to \min, \quad p \in P,\ d \in D,\ p > 0_n,\ d > 0_n.$$

Здесь логарифм берется покоординатно: $\ln v = (\ln v_1, \dots, \ln v_n)^T$ для положительных точек v. Сравнение также покоординатное: $x > 0_n$ означает, что $x_i > 0$ для всех i от 1 до n.

Замечание 7. Из этой задачи, в частности, можно вывести условия дополняющей нежесткости в задачах линейного программирования: существуют неотрицательные точки $p \in P$ и $d \in D$, для которых $p_id_i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$ (см. также [9]).

3. Правило множителей Лагранжа

Каждый локальный минимум/максимум функции $f_0(x_1, \dots, x_n)$, ограниченной несколькими условиями типа равенств $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$, является решением системы уравнений

$$\mathcal{L}_{x_j}(x) = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant m,$$

где $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x,\lambda)$ обозначает функцию Лагранжа $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x)$ для подходящих множителей $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$, хотя бы один из которых не равен нулю (правило множителей Лагранжа). Предполагается, что все функции f_i непрерывно дифференцируемы. Заметим, что в этой системе неизвестных на одно больше, чем уравнений. Тем не менее, мы всегда можем избавиться от этой неопределенности, предполагая, что λ_0 равно либо 0, либо 1, и рассмотрев только эти два случая. Это не нарушает общности, поскольку функция Лагранжа однородна относительно множителей λ_i. Из соображений экономии мы всегда будем предполагать $\lambda_0 = 1$ и будем опускать доказательства того, что случай $\lambda_0 = 0$ невозможен. На самом деле, случай $\lambda_0 = 0$ также может давать точки экстремума, однако происходит это крайне редко, в основном, в вырожденных примерах. Смысл правила множителей Лагранжа состоит в том, что оно позволяет избежать необходимости явно выражать m переменных из числа $x_1, \ldots, x_n$ через остальные переменные, используя равенства $f_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, m$. Обычно правило Лагранжа проще в использовании, чем метод исключения неизвестных, кроме того оно часто позволяет понять смысл и природу решения.

Проиллюстрируем силу этого метода на нескольких примерах.

Пример 9. Найдите минимальное значение функции

$$f(x,y) = 5x^2 + 2xy + 3y^2$$
$$\text{при условии } g(x,y) = 7x^2 + 2xy + 4y^2 - 3 = 0.$$

Решение. Используя уравнение $g(x,y) = 0$, мы можем выразить y через x (или x через y). Однако прямая подстановка этого выражения в уравнение $f'(x, y(x)) = 0$ приводит к уравнению шестой степени. На самом деле — даже к двум уравнениям, из-за знака $\pm$ перед дискриминантом в выражении для $y(x)$. Чтобы этого избежать, поступаем по-другому: сохраняем обе переменные x, y и составляем лагранжиан: $\mathcal{L} = f(x,y) + \lambda g(x,y)$. Дифференцируя по x и по y, получаем систему

$$\begin{cases} 10x + 2y + \lambda(14x + 2y) = 0, \\ 6y + 2x + \lambda(8y + 2x) = 0. \end{cases}$$

Выражая λ из обеих уравнений и приравнивая, получаем $\dfrac{10x + 2y}{14x + 2y} = \dfrac{6y + 2x}{8y + 2x}$. Решая это однородное уравнение, имеем $\dfrac{y}{x} = -1$ или 2. Теперь подставляя в уравнение $g(x,y) = 0$, получаем несколько «подозрительных» на экстремум точек (x,y). Вычисляя значение функции f в каждой из них, убеждаемся, что минимум достигается в точках $(x,y) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ и $(x,y) = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$. Далее остается сослаться на существование точки минимума (уравнение $g(x,y) = 0$ определяет эллипс, а значит — компактное множество).

Упражнение 22. Задача о максимальной энтропии. Для n положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ таких, что $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$ найти наименьшее возможное значение величины $\sum_{k=1}^{n} x_k \ln x_k$ (эта величина, взятая со знаком минус, называется энтропией).

Упражнение 23. Каковы наибольшее и наименьшее значение суммы квадратов n чисел, если сумма их четвертых степеней равна 1?

Упражнение 24. Если сумма пяти чисел (не обязательно положительных) равна 1, а сумма их квадратов равна 13, то каково наименьшее возможное значение суммы их кубов?

Упражнение 25. Если сумма пяти чисел равна 1, а сумма их квадратов равна 11, то каково наибольшее возможное значение суммы их кубов?

Упражнение 26. $\sum_{i=1}^{5} x_i^4 \to \mathrm{extr}, \sum_{i=1}^{5} x_i = \sum_{i=1}^{5} x_i^3 = 0, \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 4.$

Подсказка к последним четырем задачам: обычно нет необходимости вычислять множители Лагранжа λ_j. Из уравнений на лагранжиан следует, что все числа x_i должны удовлетворять одному и тому же уравнению, следовательно, каждое из них может принимать одно из нескольких значений — корней этого уравнения. Далее останется рассмотреть случаи.

Пример 10. Шарнирный четырехугольник наибольшей площади. Стороны четырехугольника имеют фиксированные длины и соединены шарнирами в вершинах так, что четырехугольник может менять свою форму. В каком положении площадь четырехугольника максимальна?

Замечание 8. Эта задача была известна еще древним грекам, однако решена она была только в XIX веке выдающимся швейцарским геометром Якобом Штейнером (1796–1863). Оказывается, что наибольшая площадь шарнирного четырехугольника выражается через длины его сторон по формуле, похожей на формулу Герона (следствие 2).

Решение. Пусть a, b, c, d — длины сторон четырехугольника. Обозначим через α угол между a и b, и через β — угол между c и d. Пусть также e — диагональ, соединяющая два других угла. Площадь четырехугольника равна сумме площадей треугольников abe и cde:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}cd\sin\beta.$$

Как связаны переменные α и β? Применив теорему косинусов к треугольникам abe и cde, получим $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$ и $e^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta$. Таким образом,

$$\begin{cases} S(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\Big(ab\sin\alpha + cd\sin\beta\Big) \quad \to \quad \max, \\ a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta. \end{cases} \tag{3}$$

Выписываем лагранжиан:

$$\mathcal{L}(\alpha,\beta,\lambda) = \frac{1}{2}\Big(ab\sin\alpha + cd\sin\beta\Big) + \lambda\Big(a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha - c^2 - d^2 + 2cd\cos\beta\Big).$$

Дифференцируем по α и β:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}ab\cos\alpha + 2\lambda ab\sin\alpha = 0, \\ \mathcal{L}_\beta = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}cd\cos\beta - 2\lambda cd\sin\beta = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Из первого уравнения получаем $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{1}{4\lambda}$, из второго $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{4\lambda}$. Итак, $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\beta$, следовательно $\alpha = \pi - \beta$. Это означает, что четырехугольник $abcd$ вписан в окружность. Таким образом,

среди всех четырехугольников с данными длинами сторон наибольшую площадь имеет вписанный четырехугольник.

Замечание 9. Мы не стали решать систему (4) полностью, например, мы не стали искать λ. В этом не было необходимости, мы использовали множитель λ только для, чтобы вывести равенство $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\beta$. В большинстве случаев при использовании правила множителей Лагранжа не нужно находить множители.

Интуитивно ясно, что существует единственное положение шарнирного четырехугольника, при котором он вписан в окружность. Если немного увеличить угол α, длина диагонали e увеличится, поэтому угол β также увеличится. Таким образом, сумма углов $\alpha+\beta$ является непрерывной возрастающей функцией аргумента α. Поэтому для единственного значения α выполнено равенство $\alpha+\beta = \pi$. Нетрудно также найти это значение α. Заменяя β на $\pi - \alpha$ во втором уравнении системы (3), получаем $\cos\alpha = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)/(2ab + 2cd)$. Заменяя $\sin\alpha$ на $\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ и подставляя в первое уравнение (3), получим после преобразований:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}\,. \qquad (5)$$

Это известная формула Брахмагупты (VII век н. э.), выражающая площадь вписанного четырехугольника через длины его сторон. Она применима к любым значениям длин a, b, c, d при условии, что каждая из них не превосходит суммы трех других. Если одна из сторон обращается в ноль, то получаем формулу Герона.

Для данных сторон a, b, c, d величина (5) выражает наибольшую возможную площадь четырехугольника, откуда получаем

Следствие 2. *Если стороны четырехугольника равны a, b, c, d, а его площадь равна S, то*

$$S \leqslant \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}\,.$$

Равенство достигается для вписанного четырехугольника.

Так как точка локального максимума функции $S(\alpha)$ единственна, то

Следствие 3. *Если $\alpha+\beta < \pi$, то $S(\alpha)$ возрастает по переменной α, а если $\alpha + \beta \geqslant \pi$, то $S(\alpha)$ убывает.*

Теперь мы можем перейти от четырехугольников к произвольным многоугольникам.

Следствие 4. *Среди всех многоугольников с данными длинами сторон наибольшую площадь имеет вписанный многоугольник.*

Доказательство. Пусть многоугольник имеет n сторон. Для $n = 3$ доказывать нечего, для $n = 4$ всё уже доказано. Таким образом, $n \geqslant 5$. Рассмотрим множество всех несамопересекающихся многоугольников с данными длинами сторон. При этом можно считать, что они находятся внутри фиксированного круга достаточно большого радиуса. Если мы позволим углам многоугольника принимать значения от 0 до 2π включительно, а вершинам — лежать на других сторонах, то множество таких многоугольников будет компактно. Следовательно, существует многоугольник наибольшей площади. Этот многоугольник выпуклый (иначе можно симметрично отразить часть многоугольника относительно подходящей диагонали, отчего площадь увеличится. Подробности доказательства оставляем читателю). Итак, многоугольник выпуклый, при этом несколько соседних сторон могут лежать на одной прямой. Среди всех четырехугольников с вершинами в вершинах нашего многоугольника выберем тот, у которого сумма двух противоположных углов наименьшая. Обозначим эти вершины последовательно A, B, C, D, при этом A и C — противоположные углы с наименьшей суммой. Если многоугольник не является вписанным, то сумма углов BAD и BCD меньше π. Увеличим немного угол BAD, сохраняя длины сторон четырехугольника $ABCD$, и сохраняя неизменными куски многоугольника, примыкающие к этим сторонам. Площадь $ABCD$ при этом увеличится (следствие 3), и следовательно, увеличится и площадь всего многоугольника. При этом, так как исходный многоугольник выпуклый, то при достаточно малом увеличении угла BAD многоугольник останется несамопересекающимся (хотя, может потерять выпуклость). Это противоречит тому, что многоугольник имеет максимальную площадь, что завершает доказательство.

Упражнение 27. Отгородить от прямолинейного берега реки забором данной длины прямоугольный участок земли наибольшей площади.

Упражнение 28. То же упражнение, но теперь забор состоит из трех секций фиксированной (не обязательно равной) длины.

Упражнение 29. Докажите изопериметрическую теорему: среди всех плоских несамопересекающихся кривых данной длины наибольшую площадь ограничивает окружность.

Подсказка: *предположим, что найдется кривая, ограничивающая бо́льшую площадь, нежели соответствующий круг. Приблизим эту кривую многоугольником с вершинами на кривой. При этом периметр многоугольника будет меньше длины кривой, а площадь (при хорошем приближении) — по-прежнему больше площади соответствующего круга. Далее применяем следствие* 4.

Об изопериметрических неравенствах можно прочитать, например в [16], [8].

Упражнение 30. Задача Дидоны. Веревкой данной длины отгородить от прямолинейного берега моря участок земли наибольшей площади.

Упражнение 31. Веревкой данной длины отгородить от прямого угла фигуру наибольшей площади.

Упражнение 32. То же упражнение для угла $\frac{\pi}{4}$, и для угла $\frac{\pi}{3}$.

Упражнение 33. Кривой наименьшей возможной длины разделить равносторонний треугольник на две части равной площади.

Упражнение 34. То же упражнение для квадрата (следует быть осторожным с кажущимся сходством этой задачи с предыдущей!)

Пример 11. Найти точку P внутри данного треугольника, для которой сумма отношений длин сторон треугольника к расстояниям от P до этих сторон минимальна.

Решение. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, а x, y, z — расстояния от P до этих сторон. Нужно найти минимум величины $f(x,y,z) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$. При этом величины x, y и z связаны через площади треугольников. Соединив точку P с вершинами треугольника, мы разбиваем его на три треугольника, сумма площадей которых равна S. Таким образом, $\frac{ax}{2} + \frac{by}{2} + \frac{cz}{2} = S$. Итак,

$$\begin{cases} f(x,y,z) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \to \min, \\ ax + by + cz = 2S. \end{cases} \tag{6}$$

Дифференцируя лагранжиан

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} + \ \lambda\Big(ax + by + cz - 2S\Big),$$

приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} -\frac{a}{x^2} + \lambda a = 0, \\ -\frac{b}{y^2} + \lambda b = 0, \\ -\frac{c}{z^2} + \lambda c = 0, \end{cases}$$

из которой немедленно заключаем, что $x = y = z$. Значит точка P равноудалена от сторон треугольника. Таким образом, P — центр вписанной окружности треугольника.

Замечание 10. Эта задача была предложена на Международной математической Олимпиаде 1980 г. в Вашингтоне. Как видим, правило множителей Лагранжа приводит к короткому и вполне стандартному решению. Мы предлагаем читателю попробовать другие способы решения задачи (6) (например, выражая одни переменные через другие). Нетрудно будет убедиться, что решения будут более сложными и менее естественными.

Упражнение 35. Через данную точку M, лежащую внутри угла с вершиной K, провести отрезок AB с вершинами на сторонах угла так, чтобы величина $\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB}$ была наибольшей. (Американская математическая олимпиада, 1979 г.)

Подсказка: *в качестве переменных удобно взять углы* $\alpha = MKA$ *и* $\beta = MKB$.

Упражнение 36. При тех же условиях найти минимум величины

$$\sqrt{KA} + \sqrt{KB}.$$

Упражнение 37. Точка удалена от вершин прямоугольного треугольника на $2, 5$ и 10 см. (2 — расстояние до вершины прямого угла). Какова может быть наибольшая площадь этого треугольника?
(Соросовская олимпиада по математике, Россия, 1997 г.)

Пример 12. Снова про закон Снеллиуса. Правило множителей Лагранжа предлагает следующее элегантное доказательство законов преломления и отражения света. Теперь при решении экстремальной задачи (1) мы не будем параметризовать прямую l и сводить всё к задаче с одной переменной, а в духе Лагранжа сохраняем обе переменные и рассматриваем функцию $f(M)$ на всей плоскости. Соотношение $M \in l$ теперь запишется в виде уравнения связи $\langle \overrightarrow{AM}, n\rangle = c$, где n — вектор, перпендикулярный прямой l, а c — некоторая константа. Дифференцируя лагранжиан $\mathcal{L}(M,\lambda) = f(M) + \lambda(\langle \overrightarrow{AM}, n\rangle - c)$, получаем $f'(M) + \lambda n = 0$. Заметим, что

$$f'(M) = \frac{1}{v_a}|AM|' + \frac{1}{v_b}|BM|' = \frac{1}{v_a}u_a + \frac{1}{v_b}u_b,$$

где единичные векторы u_a, u_b были определены в примере 1. Итак,

$$\frac{1}{v_a}u_a + \frac{1}{v_b}u_b = -\lambda n,$$

а это означает, что вектор $\frac{1}{v_a}u_a + \frac{1}{v_b}u_b$ перпендикулярен l. Иначе говоря, сумма проекций векторов $\frac{1}{v_a}u_a$ и $\frac{1}{v_b}u_b$ на l равна нулю, что означает

$$\frac{\sin\alpha}{v_a} = \frac{\sin\beta}{v_b}\,.$$

Упражнение 38. На плоскости дана прямая и три точки, не лежащие на ней. Найти (или охарактеризовать) положение точки на прямой, для которой сумма расстояний до трех данных точек минимальна. Сколько может быть таких точек?

Упражнение 39. В пространстве дана плоскость и три точки, не лежащие на ней. Найти (или охарактеризовать) положение точки на плоскости, для которой сумма расстояний до трех данных точек минимальна.

Упражнение 40. Решить задачи 38 и 39 для произвольного числа точек.

Пример 13. Неравенство Коши (неравенство между средними). Для любых неотрицательных чисел $x_1, \dots, x_n$ выполнено неравенство

$$x_1^n + \ldots + x_n^n \geqslant n x_1 \cdot \ldots \cdot x_n.$$

(*произведение* $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ *является средним геометрическим величин* $x_1^n, \dots, x_n^n$).

Решение. Положим $x_1^n + \ldots + x_n^n = a$ и рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$\begin{cases} n x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \to \max, \\ x_1^n + \ldots + x_n^n = a, \\ x_1 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0. \end{cases} \tag{7}$$

По теореме Вейерштрасса существует точка максимума $(x_1, \dots, x_n)$. Ясно, что все x_i положительны, иначе $nx_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n = 0$, а это, очевидно, не максимум. Дифференцируя лагранжиан, получим

$$nx_1\cdot\ldots\cdot x_n + \lambda n x_i^n = x_i\mathcal{L}'_{x_i} = 0, \qquad i = 1,\ldots,n,$$

откуда $x_1 = \cdots = x_n$. Итак, в точках максимума $x_1 = \cdots = x_n$, следовательно $nx_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n = x_1^n + \ldots + x_n^n = a$. Значит, во всех остальных точках $nx_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n < a$, что завершает доказательство.

Доказательство любого неравенства можно свести к соответствующей экстремальной задаче. В большинстве случаев этот метод доказательства неравенств работает безотказно. Большинство неравенств из классической монографии [5] могут быть просто установлены сведе́нием их к экстремальным задачам.

Упражнение 41. Неравенство Гёльдера. Доказать, что для любого $p > 1$ и произвольных положительных чисел $x_1,\ldots,x_n$, $y_1,\ldots,y_n$ выполнено

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leqslant \Big(\sum_{k=1}^n x_k^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{k=1}^n y_k^q\Big)^{1/q},$$

где $q = p/(p-1)$. Для каких x_k и y_k это неравенство обращается в равенство?

Упражнение 42. Неравенство Адамара. Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ — квадратная матрица порядка n. Докажите, что

$$(\det A)^2 \leqslant \prod_{i=1}^n\Big(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\Big).$$

Мы завершаем этот раздел примером из линейной алгебры.

Пример 14. Действительная симметричная $(n\times n)$-матрица всегда имеет действительный собственный вектор.

Решение. Рассмотрим экстремальную задачу:

$$\begin{cases} f(x) = \langle Ax, x\rangle \to \max, \\ \langle x, x\rangle = 1, \end{cases} \tag{8}$$

где $\langle,\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, мы ищем максимум функции f на единичной сфере. В силу компактности сферы, существует точка максимума $x\in\mathbb{R}^n$. Дифференцируя лагранжиан в точке максимума, получаем

$$\mathcal{L}'_x = 2Ax + 2\lambda x = 0.$$

Следовательно, x является действительным собственным вектором с собственным значением $-\lambda$.

Замечание 11. Обычно существование действительного собственного вектора у самосопряженного оператора в $\mathbb{R}^n$ доказывается с помощью характеристического многочлена. Доказательство с использованием правила Лагранжа имеет одно преимущество: оно почти без изменений обобщается на бесконечномерные операторы. Именно так доказывается, что компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве имеет действительное собственное значение. Этот факт является ключевым для доказательства теоремы Гильберта–Шмидта о спектральном разложении компактного самосопряженного оператора (см., например, [12]). Этот же прием применяется для доказательства существования решений у некоторых дифференциальных уравнений.

4. Приложения к математической экономике

В математической экономике теория экстремума является одним из главных инструментов. Множество примеров можно найти, в книгах [1, 2, 4]. Математически эти примеры не столь интересны, по крайней мере, по сравнению с теми, которые рассматривались в предыдущих разделах. Как говорил выдающийся американский экономист Альфред Маршалл (1842–1924): «Красивая математическая теорема, примененная к экономике, вряд ли приведет к хорошим результатам». В этом, видимо, заключается специфика всех приложений математики к реальной жизни. На первом месте здесь стоит не столько красота, сколько эффективность. Мы решили включить несколько подобных примеров в статью, поскольку они достаточно наглядно описывают специфику предмета, а кроме того, знакомят с наукой формализации практических задач.

Упражнение 43. Оптимальная цена. Вы хотите продать машину, которая стоила Вам 9 000 евро. Вам неизвестно, сколько покупатель способен заплатить, но максимум, на что Вы надеетесь, это 15 000 евро. Считаем, что цена, которую покупатель готов заплатить, распределена равномерно (с одинаковой вероятностью) между двумя этими величинами. Если Вы запросите бóльшую цену, то сделка сорвется. Если меньше, то Вы проиграете в выручке. Какую оптимальную цену Вы должны запросить, чтобы максимизировать ожидаемую прибыль?

В следующих примерах дело осложняется тем, что экстремум ищется на множестве целых чисел.

Упражнение 44. Небоскребы. Стоимость постройки здания в x этажей исчисляется по следующим правилам:

(1) 10 миллионов долларов за землю,

(2) $\frac{1}{4}$ миллиона за каждый этаж,

(3) надбавка в $10\,000x$ долларов за этаж (чем выше, тем дороже).

Сколько этажей должно быть в здании, чтобы средняя цена за этаж была минимальной?

Упражнение 45. Оптимальный гонорар. Певец собирается записать свой DVD. В отделе маркетинга ему сказали, что если отпускная цена его DVD будет 26 долларов за диск, то ожидается продать 5 000 дисков.

Самой компании каждый диск обойдется в 5 долларов.

(1) Какая отпускная цена за диск максимизирует прибыль фирмы? Какова эта максимальная прибыль?

(2) Какой авторский гонорар с каждого диска певец должен потребовать с фирмы, чтобы максимизировать свою прибыль?

Упражнение 46. Фрукты на рынке. Некто пришел на рынок, где продается неограниченное число различных видов фруктов. Все виды — по одной цене в 1 доллар за фунт. Удовольствие, которое получит покупатель, купив m_1 фунтов первого вида фруктов, m_2 — второго и т. д. (все числа — целые) пропорционально произведению $\prod_{i=1}^{n} m_i$. У него есть 100 долларов. Как он должен их распределить, чтобы получить максимальное удовольствие?

Один из основополагающих законов экономики — равенство между спросом и предложением. С увеличением цены за услугу или продукт уменьшается число потенциальных клиентов. Уменьшение цены привлечет больше клиентов, но снизит прибыль, полученную с каждого из них. Поиск «точки равновесия» — наиболее выгодной цены, максимизирующей общую прибыль, является одной из основных проблем. Способы поиска оптимальной цены, конечно же, зависят от конкретной задачи. В следующем примере мы рассмотрим ситуацию, когда существует цена, оптимальная как для продавца, так и для клиента, т. е. цена, максимизирующая «удовольствие» обоих.

Более точно, предположим, что на рынке есть продавцы и покупатели некоторого товара. У каждого продавца есть минимальная цена, за которую он готов продать товар. Соответственно, у каждого покупателя есть максимальная цена, которую он готов за этот товар заплатить. Предположим, что мы можем установить некоторую цену на рынке. Тогда каждый продавец подсчитает свою выгоду: разность между тем, что он продаст по установленной цене, и тем, что он смог бы выручить по своей минимальной цене. То же для покупателя: его выгода — это разность между тем, сколько он потратил бы, покупая по максимальной для себя цене, и тем, что потратит по установленной цене. Сумма выгод всех покупателей и всех продавцов называется общим благосостоянием (total social welfare). Оно может быть интерпретировано, как сумма всех «удовольствий» участников рынка. В следующей задаче мы покажем, что

общее благосостояние максимально в точности тогда, когда установленная на рынке цена равна оптимальной «точке равновесия».

Пусть рынок некоторого товара описывается функцией предложения $S(P)$ и функцией спроса $D(P)$. Это означает, что если цена равна P, то количество продукта, предложенного всеми продавцами, для которых P не меньше их минимальной цены, равно $S(P)$; функция спроса определяется аналогично. Для простоты предположим пока, что обе функции — аффинные (графики — прямые линии).

Упражнение 47. (1) Функции S и D даны. Выразите общую выгоду продавцов и покупателей через P.

(2) Выразите положение точки равновесия, и докажите, что при этом значении цены общее благосостояние максимально.

До сих пор мы не использовали стационарные точки, не являющиеся точками локального максимума или минимума. Однако в задачах теории игр, где два оппонента пытаются увеличить свою прибыль, оптимальные состояния характеризуются именно такими точками. Со введением в теорию игр и ее применениями можно познакомиться, например, в [7].

Рассмотрим ситуацию, когда есть две фирмы, производящие одинаковую продукцию, и при этом спрос на рынке линейный: $p = 1 - q_1 - q_2$. Цена производства единицы продукции у обеих фирм одинакова и равна c. Фирма 1 максимизирует свою выгоду, т. е. выбирает цену q_1, чтобы получить прибыль

$$\max_{q_1}(1 - q_1 - q_2 - c)q_1.$$

Фирма 2 максимизирует свою выгоду, т. е. выбирает цену q_2. Однако менеджеры фирмы 2 также учитывают объём своих продаж с некоторым весом α:

$$\max_{q_2}(1 - q_1 - q_2 - c)q_2 + \alpha(1 - q_1 - q_2)q_2.$$

Таким образом, фирма 2 максимизирует свою прибыль в предположении, что ее выгода не упадет ниже некоторого уровня π_2.

Пример 15. Вкладчики и акционеры в ситуации диполя. Какая из двух фирм получит большую выгоду в точке равновесия при $\alpha > 0$?

Решение. Для ответа проанализируем точку равновесия Нэша (Nash equilibrium), где каждая фирма выбирает свой уровень цены, предполагая, что знает уровень цены ее оппонента (другой фирмы). Уравнение стационарности дает

$$1 - c - 2q_1 - q_2 = 0,$$
$$1 - c - q_1 - 2q_2 + \alpha - \alpha q_1 - 2\alpha q_2 = 0.$$

Положив $\varphi = \dfrac{1 - c + \alpha}{1 + \alpha}$, получаем

$$q_1 = \frac{2}{3}(1 - c) - \frac{1}{3}\varphi,$$
$$q_2 = \frac{2}{3}\varphi - \frac{1}{3}(1 - c),$$
$$p = 1 - \frac{1}{3}(1 - c) - \frac{1}{3}\varphi.$$

Следовательно, размер общей выгоды равен

$$\pi_1 = (\frac{2}{3}(1 - c) - \frac{1}{3}\varphi)^2,$$
$$\pi_2 = (\frac{2}{3}(1 - c) - \frac{1}{3}\varphi)(\frac{2}{3}\varphi - \frac{1}{3}(1 - c)).$$

Поскольку φ возрастает по α, несложно проверить, что прибыль фирмы 1 убывает по α, в то время как прибыль фирмы 2 возрастает по α (если $\varphi < \frac{5}{4}(1 - c)$).

Приходим к парадоксальному выводу: фирма, которая не максимизирует свою выгоду, на самом деле получает (в точке равновесия) большую выгоду, чем та, которая максимизирует! Какое может быть интуитивное объяснение этому феномену?

Упражнение 48. Предположим, некоторая фирма производит 90 единиц продукции, используя при этом 9 единиц компонента X и 9 единиц компонента Y. Количество единиц произведенной продукции вычисляется по формуле $Q = 10X^{1/2}Y^{1/2}$.

(1) если цена X — 8 долларов, а цена Y — 16 долларов, то дадут ли 9 единиц X и 9 единиц Y наиболее выгодный способ произвести 90 единиц продукции?

(2) Каково наиболее выгодное соотношение между X и Y?

(3) Каков наиболее дешевый способ произвести 400 единиц продукции, если цена X равна 1 доллар, а цена Y — 2 доллара?

Упражнение 49. Минимизация риска. Вкладчик решил разделить свои деньги между тремя инвестиционными фондами. Ожидаемая прибыль этих фондов — 10%, 10% и 15% соответственно. Его цель — получить общую прибыль не менее 12%, и при этом минимизировать свой риск. Функция риска описывается формулой

$$200x_1^2 + 400x_2^2 + 100x_1x_2 + 899x_3^2 + 200x_2x_3,$$

где x_i пропорционально сумме, вложенной в фонд i. Определить, в какой пропорции он должен вложить свои деньги в эти фонды. Поможет ли такое ослабление условий: величины x_i могут принимать отрицательные значения (не будем останавливаться на экономическом смысле отрицательных вкладов)?

Упражнение 50. Фирма производит продукцию y, используя компоненты x_1 и x_2, при этом $y = \sqrt{x_1x_2}$. Договорное соглашение обязывает фирму использовать хотя бы одну единицу каждого компонента. Цены компонентов x_1 и x_2 — соответственно w_1 и w_2. Как фирме минимизировать стоимость производства $\bar{y}$ единиц продукции?

Список литературы

[1] Mankiw N. G. *Principles of Economics.* Fort Worth, 1997.

[2] Fryer M. J., Greenman J. V. *Optimisation Theory.* London, 1987.

[3] Тихомиров В. М., Магарил-Ильяев Г. Г. *Выпуклый анализ и его приложения.* М.: Эдиториал УРСС, 2000.

[4] Sydsaeter K., Hammond P. *Essential Mathematics for Economic Analysis*, 1995.

[5] Hardy G., Littlewood J. E., Polya G. *Inequalities.* Cambridge University Press, 1934.

[6] Hildebrandt S., Tromba A. *Mathematics and Optimal Form.* New York, 1985.

[7] Binmore K. *Fun and Games, A Text on Game Theory.* Lexington, 1992.

[8] Тихомиров В. М. *Рассказы о максимумах и минимумах.* М.: Наука, 1986.

[9] Vaserstein L.N. *Introduction to Linear Programming.* London, 2003.

[10] Бунимович Л. А., Дани С. Г., Добрушин С. Г., Якобсон М. В., Корнфельд И. П., Маслова Н. Б., Песин Я. Б., Синай Я. Г., Смилле Дж., Сухов Ю. М., Вершик А. М. *Динамические системы, эргодическая теория и приложения* // Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 100. Mathematical Physics, I. Springer-Verlag, Berlin, 2000. xii+459 pp.

[11] Синай Я. Г. *Введение в эргодическую теорию.* М.: Фазис. 1996.

[12] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Физматлит, 2004. 570 с.

[13] Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л. *Новые встречи с геометрией.* М.: Наука, 1978. 223 с.

[14] Boltyanski V. G., Martini H., Soltan V. *Geometric methods and optimization problems.* Combinatorial Optimization. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999. 429 pp.

[15] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. *Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум.* М.: Наука, 1970. 335 с.

[16] Бляшке В. *Круг и шар.* М.: Наука, 1967. 232 с.

[17] Bottema O., Djordjevic R. Z., Janic R. R., Mitrinovic D. S., Vasic P. M. *Geometric inequalities.* Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969. 151 pp.

Я. Бринкхаус, Эразмус Университет, Роттердам, Нидерланды
e-mail: `brinkhuis@few.eur.nl`

В. Ю. Протасов, Московский Государственный Университет,
e-mail: `vladimir_protassov@yahoo.com`