О тригонометрических многочленах, наименее уклоняющихся от нуля, с фиксированным средним коэффициентом

С. Б. Гашков

Действительным тригонометрическим многочленом степени n называется функция вида

$$t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx + b_k \cos kx,$$

где a_k, b_k — действительные числа, называемые его коэффициентами, $a_n^2 + b_n^2 > 0$. Нулевой коэффициент традиционно записывается в виде $a_0/2$. Так как согласно формулам Эйлера $\exp ikx = \cos kx + i \sin kx$, и $a_k \sin kx + b_k \cos kx = \mathrm{Re}((b_k - ia_k)\exp ikx)$, где Re означает действительную часть комплексного числа, а i — мнимую единицу, то тригонометрический многочлен можно записать в более краткой комплексной форме

$$t_n(x) = \mathrm{Re}\sum_{k=0}^{n} c_k \exp ikx,\ c_k = b_k - ia_k,\ k = 1, \ldots, n,\ c_0 = \frac{a_0}{2}$$

(см. [1]). Рассмотрим следующую задачу: среди всех таких тригонометрических многочленов с фиксированным комплексным коэффициентом c_h, или, что равносильно, с фиксированными действительными коэффициентами a_h, b_h, найти многочлен, наименее уклоняющийся от нуля. Другими словами, надо найти такой тригонометрический многочлен $t_n(x)$, у которого величина $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |t_n(x)|$ минимальна. Эту величину называют равномерной или чебышёвской нормой и обозначают $\|t_n\|$. Кроме этой нормы, часто используют семейство норм[1)]

$$\|t_n\|_p = \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t_n(x)|^p\right)^{1/p},\ p \geqslant 1,$$

а норму $\|t_n\|$ обозначают $\|t_n\|_\infty$ (см. [2]). Эти нормы связаны неравенствами

$$\|t_n\|_1 \leqslant 2^{1-1/p}\|t_n\|_p \leqslant 2\|t_n\|,$$

которые, впрочем, нам далее не понадобятся. Очевидно, что для любого действительного c и любого $p \geqslant 1$, в том числе и $p = \infty$, справедливо равенство $\|ct_n\| = |c|\|t_n\|$. Решение задачи дает

[1)]Можно считать, что интеграл в их определении — это обычный интеграл Римана.

Теорема. *Для любого действительного тригонометрического многочлена* $t_n(x) = \operatorname{Re} \sum\limits_{k=0}^{n} c_k \exp ikx$ *и* $h \geqslant 1$ *справедливо неравенство*

$$\|t_n\|_p \geqslant \mu(n,h,p)|c_h|\|\cos\|_p,$$

$$\mu(n,h,p) = \mu(2m+1,1,p) = \frac{m+2}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m+4}\,,\ m = \left\lfloor \frac{n-h}{2h} \right\rfloor,$$

где символ $\lfloor a \rfloor$ *означает целую часть числа* a*. При* $p = \infty$ *это неравенство обращается в равенство для многочлена*

$$t_n(x) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{m} c_{(2k+1)h} \exp i(2k+1)hx = |c_h| g_{2m+1}(hx+\gamma), \qquad (*)$$

где $\gamma = \arg c_h$,

$$g_{2m+1}(x) = C \sum_{k=1}^{m+1} g_{m,k}(x) = \cos x + \sum_{k=1}^{m} b_k \cos(2k+1)x,$$

$$C = \frac{2^{2m+1}}{m+2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m+4}\,,$$

$$g_{m,k}(x) = h_{m,k}(x) f_{m,k}(x),\ h_{m,k}(x) = \left(\frac{w_m(x)\sin k\alpha}{\cos(x-k\alpha)}\right)^2,$$

$$w_m(x) = \prod_{k=1}^{m+1} \cos(x-k\alpha),$$

$$f_{m,k}(x) = 2\operatorname{ctg} k\alpha \cos(x-k\alpha) - \sin(x-k\alpha),\ k = 1,\ldots,m+1.$$

Следовательно, среди всех многочленов $t_n(x)$ *с фиксированным* c_h *многочлен* $(*)$ *имеет минимальную норму*

$$\|t_n\|_\infty = \frac{m+2}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m+4} |c_h|.$$

Этот минимальный многочлен при нечетном $\lfloor n/h \rfloor$ *определен однозначно, а при четном* $\lfloor n/h \rfloor$ *— неоднозначно.*

При $h = n$ (и вообще при $h > n/3$), очевидно, $m = 0$, и из теоремы следует неравенство $\|t_n\|_\infty \geqslant |c_h|$. Экстремальный многочлен тогда равен $a_h \sin hx + b_h \cos hx$. Это утверждение равносильно известному экстремальному свойству многочленов Чебышёва (см. [1]).

В книге С. Н. Бернштейна [3] доказано неравенство $\|t_n\|_\infty \geqslant \frac{\pi}{4}|c_h|$, и показано, что оно является асимптотически точным.

В [4] в случае $p = \infty$, опираясь на метод, развитый в [5], было получено точное неравенство.

Далее приводится элементарное доказательство этой теоремы, использующее только простейшие свойства комплексных чисел (краткое изложение см. [6]).

Сначала сведем общий случай к случаю $h = 1$, рассматривая вместо многочлена $t_n(x)$ многочлен

$$\frac{1}{2h}\sum_{l=1}^{2h}(-1)^l t_n\left(x+\frac{\pi l}{h}\right)=\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{m}c_{h(2k+1)}\exp i(2k+1)hx.$$

Для доказательства этого тождества достаточно, меняя порядок суммирования, заметить, что

$$\sum_{l=1}^{2h}(-1)^l t_n\left(x+\frac{\pi l}{h}\right)=\sum_{l=1}^{2h}(-1)^l\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n}c_k\exp\left(ikx+\frac{ikl\pi}{h}\right)=$$
$$=\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=1}^{2h}(-1)^l c_k\exp\left(ikx+\frac{ikl\pi}{h}\right).$$

Теперь при k, кратном h, в силу равенства $\exp(\pi kli/h)=(-1)^{kl/h}$ имеем

$$\sum_{l=1}^{2h}(-1)^l c_k\exp\left(ikx+\frac{ikl\pi}{h}\right)=c_k\exp ikx\sum_{l=1}^{2h}(-1)^l\exp\left(\frac{\pi kli}{h}\right)=2hc_k\exp ikx,$$

если k/h нечетно, и

$$\sum_{l=1}^{2h}(-1)^l c_k\exp\left(ikx+\frac{ikl\pi}{h}\right)=0,$$

если k/h четно, а при k, не кратном h, применяя формулу суммирования геометрической прогрессии, имеем

$$\sum_{l=1}^{2h}(-1)^l\exp\left(\frac{\pi kli}{h}\right)=\sum_{l=0}^{2h-1}(-1)^l\exp\left(\frac{\pi kli}{h}\right)=\frac{\exp 2\pi ki-1}{-\exp(\pi ki/h)-1}=0.$$

Воспользовавшись выпуклостью нормы, т. е. неравенством[2)]

$$\|\alpha f+\beta g\|_p\leqslant|\alpha|\cdot\|f\|_p+|\beta|\cdot\|g\|_p,$$

и свойствами $\|f(x+a)\|_p=\|f(x)\|_p$, $\|f(rx)\|_p=\|f(x)\|_p$ (инвариантности нормы относительно сдвига[3)] на произвольное число a и растяжения[4)] с целым коэффициентом r), имеем при $m=\left\lfloor\dfrac{n-h}{2h}\right\rfloor$

$$\|t_n\|_p=\frac{1}{2h}\sum_{k=1}^{2h}\left\|t_n\left(x+\frac{\pi k}{h}\right)\right\|_p\geqslant\left\|\frac{1}{2h}\sum_{k=1}^{2h}t_n\left(x+\frac{\pi k}{h}\right)\right\|_p=$$
$$=\left\|\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{m}c_{h(2k+1)}\exp i(2k+1)hx\right\|_p=\left\|\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{m}c_{h(2k+1)}\exp i(2k+1)x\right\|_p.$$

[2)] Это свойство при $p=\infty$ и $p=1$ вытекает из неравенства $|a+b|\leqslant|a|+|b|$, а при конечных $p>1$ — из неравенства Минковского (см.[2]).

[3)] Для 2π-периодических функций это очевидно при $p=\infty$, а при конечных p вытекает из периодичности и свойства аддитивности интеграла.

[4)] Это очевидно при $p=\infty$, а при конечных p доказывается линейной заменой переменных с учетом периодичности и свойства аддитивности интеграла.

Из этого неравенства следует, что неравенство теоремы достаточно доказать при $h = 1$ для многочленов вида $t_n(x) = \operatorname{Re} \sum\limits_{k=0}^{m} c_{2k+1} \exp i(2k+1)x$, $n = 2m+1$. Хотя это не приводит к каким либо упрощениям, заметим, что взяв вместо $t_n(x)$ многочлен $t_n(x+\gamma)$, где $\operatorname{Re} c_1 \exp i\gamma = |c_1|$, легко свести задачу к случаю, когда многочлен имеет вид $t_n(x) = |c_1| \cos x + \operatorname{Re} \sum\limits_{k=1}^{m} c_{2k+1} \exp i(2k+1)x$, а взяв вместо $t_n(x)$ многочлен $(t_n(x) + t_n(-x))/2$, можно далее считать, что $t_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_{2k+1} \cos(2k+1)x$. Тогда для таких многочленов достаточно доказать неравенство

$$\|t_n\|_p \geqslant |b_1| \frac{m+2}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m+4} \|\cos\|_p.$$

Положим для краткости $\alpha = \pi/(m+2)$. Доказательство теперь умещается в две строчки

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2m+4} \|t_n\|_p = \sum_{k=1}^{m+1} \sin k\alpha \ \left\| t_n\left(x + k\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \right\|_\infty \geqslant$$
$$\geqslant \left\| \sum_{k=1}^{m+1} \sin k\alpha \ t_n\left(x + k\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \right\|_p = |b_1| \frac{m+2}{2} \|\cos\|_p,$$

если воспользоваться указанными выше свойствами нормы и тождествами

$$\sum_{k=1}^{m+1} |\sin k\alpha| = \sum_{k=1}^{m+1} \sin k\alpha = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2m+4} \ ,$$
$$\sum_{k=1}^{m+1} \sin k\alpha \ t_n\left(x + k\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = b_1 \frac{m+2}{2} \cos x.$$

Первое из них, очевидно, следует из известного тождества[5)] (см., например, [7, зад. 225] или [1])

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

при подстановке $n = m+1, x = \pi/(n+1)$. Для доказательства второго заменим $t_n\left(x + l\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ на

$$\operatorname{Re} \sum_{k=0}^{m} b_{2k+1} \exp i(2k+1) \left(x + l\alpha - \frac{\pi}{2}\right),$$

5) Для его доказательства достаточно умножить обе его части на $\sin(x/2)$ и применить к каждому слагаемому формулу $\sin kx \sin(x/2) = \cos(k-1/2)x - \cos(k+1/2)x$.

изменим в полученной двойной сумме порядок суммирования

$$\sum_{l=1}^{m+1}\sin l\alpha\ \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{m} b_{2k+1}\exp i(2k+1)\left(x+l\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{m} b_{2k+1}\sum_{l=1}^{m+1}\sin l\alpha\exp i(2k+1)\left(x+l\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{m} b_{2k+1}\exp i(2k+1)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sum_{l=1}^{m+1}\sin l\alpha\ \exp i(2k+1)l\alpha,$$

и применим тождества $\operatorname{Re}(i\exp i(x-\pi/2))=-\sin(x-\pi/2)=\cos x$,

$$\sum_{l=0}^{m+1}\sin l\alpha\exp i(2k+1)l\alpha=\left[\begin{array}{ll}0, & m\geqslant k\geqslant 1,\\ \dfrac{m+2}{2}i, & k=0.\end{array}\right.$$

Для доказательства второго из них $\sin l\alpha$ заменяем на $\dfrac{\exp il\alpha-\exp(-il\alpha)}{2i}$, левую часть тождества преобразуем к виду

$$\frac{1}{2i}\left(\sum_{l=0}^{m+1}\exp i(2k+2)l\alpha-\sum_{l=0}^{m+1}\exp i2kl\alpha\right),$$

и применяем в очередной раз формулу суммирования геометрической прогрессии

$$\sum_{l=0}^{m+1}\exp i2kl\alpha=\left[\begin{array}{ll}0, & m+1\geqslant k\geqslant 1,\\ m+2, & k=0.\end{array}\right.$$

Доказательство равенства $\|g_{2m+1}\|_\infty=\dfrac{m+2}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2m+4}$ более громоздко.

Сначала проверим тождество $g_{2m+1}(x+\pi)=-g_{2m+1}(x)$. Так как в силу формул $\sin(x+\pi)=-\sin x, \cos(x+\pi)=-\cos x$, очевидно

$$f_{m,k}(x+\pi)=-f_{m,k}(x), w_m(x+\pi)=(-1)^{m+1}w_m(x),$$

то

$$h_{m,k}(x+\pi)=\left(\frac{w_m(x+\pi)\sin k\alpha}{\cos(x+\pi-k\alpha)}\right)^2=h_{m,k}(x),$$

откуда $g_{m,k}k(x+\pi)=h_{m,k}(x+\pi)f_{m,k}(x+\pi)=-g_{m,k}k(x)$, и, следовательно, $g_{2m+1}(x+\pi)=-g_{2m+1}(x)$.

Проверим, что $g_{2m+1}(k\alpha-\pi/2)=\dfrac{m+2}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2m+4}$, $k=1,\ldots,m+1$. Так как $h_{m,k}$ вместе с w_m очевидно имеет двукратные корни $l\alpha-\pi/2, 1\leqslant l\leqslant m+1, l\neq k$, то и $g_{m,k}$ тоже имеет те же двукратные корни[6]. Поэтому $g_{2m+1}(k\alpha-\pi/2)=$

[6] Корень функции двукратен, если он является также корнем ее производной. Все корни функции $f(x)$ будут двукратными корнями функции $f^2(x)g(x)$, так как $(f^2(x)g(x))'=$ $=2f(x)f'(x)g(x)+f^2(x)g'(x)=f(x)(2f'(x)g(x)+f(x)g'(x))$.

$= Cg_{m,k}(k\alpha - \pi/2)$. Так как $f_{m,k}(k\alpha - \pi/2) = 1$, $\sin l\alpha = \sin(m+2-l)\alpha$, то

$$g_{m,k}(k\alpha - \pi/2) = h_{m,k}(k\alpha - \pi/2) =$$
$$= \sin^2 k\alpha \prod_{l=1, l\neq k}^{m+1} \cos^2(k\alpha - \pi/2 - l\alpha) = \sin^2 k\alpha \prod_{l=1, l\neq k}^{m+1} \sin^2(l-k)\alpha =$$
$$= \prod_{l=1}^{k} \sin^2 l\alpha \prod_{l=k+1}^{m+1} \sin^2(l-k)\alpha = \prod_{l=1}^{k} \sin^2 l\alpha \prod_{l=1}^{m+1-k} \sin^2 l\alpha,$$

откуда, переставляя порядок сомножителей в последнем произведении, имеем

$$g_{2m+1}(k\alpha - \pi/2) = \prod_{l=1}^{m+1} \sin^2 l\alpha, \quad k = 1, \ldots, m+1.$$

Из известного тождества

$$\prod_{l=1}^{n-1} \sin\frac{l\pi}{n} = n2^{-n+1}$$

(см., например, [7, зад. 232]) следует, что

$$g_{2m+1}(k\alpha - \pi/2) = (m+2)^2 2^{-2m-2} C = \frac{m+2}{2} \operatorname{tg}\frac{\pi}{2m+4}, \quad k = 1, \ldots, m+1.$$

Проверим, что $g'_{2m+1}(k\alpha - \pi/2) = 0$, $k = 1, \ldots, m+1$. Так как $g_{m,k}$ имеет двукратные корни $l\alpha - \pi/2, 1 \leqslant l \leqslant m+1, l \neq k$, то $g'_{m,k}(l\alpha - \pi/2) = 0$, $1 \leqslant l \leqslant m+1$, $l \neq k$, поэтому $g'_{2m+1}(k\alpha - \pi/2) = Cg'_{m,k}(k\alpha - \pi/2)$, $k = 1, \ldots, m+1$. Так как

$$f_{m,k}\left(k\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 1, f'_{m,k}\left(k\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -2\operatorname{ctg} k\alpha \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\operatorname{ctg} k\alpha,$$
$$h_{m,k}\left(k\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = g_{2m+1}\left(k\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin^2 k\alpha \left(\frac{w_m}{\cos(x-k\alpha)}\right)^2\bigg|_{x=k\alpha-\pi/2} =$$
$$= (m+2)^2 2^{-2m-2}, \quad k = 1, \ldots, m+1,$$
$$h'_{m,k}\left(k\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin^2 k\alpha \frac{w_m}{\cos(x-k\alpha)}\bigg|_{x=k\alpha-\pi/2} \left(\frac{w_m}{\cos(x-k\alpha}\right)'\bigg|_{x=k\alpha-\pi/2},$$

то, согласно формуле Лейбница[7)] и тождеству $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}(x - \pi/2)$, имеем

$$\left(\frac{w_m}{\cos(x-k\alpha)}\right)'\bigg|_{x=k\alpha-\pi/2} = \frac{w_m}{\cos(x-k\alpha)}\left(\sum_{l=1, l\neq k}^{m+1} -\operatorname{tg}(x-l\alpha)\right)\bigg|_{x=k\alpha-\pi/2} =$$
$$= \frac{w_m}{\cos(x-k\alpha)}\bigg|_{x=k\alpha-\pi/2} \left(\sum_{l=1, l\neq k}^{m+1} -\operatorname{tg}\left(k\alpha - \frac{\pi}{2} - l\alpha\right)\right) =$$

[7)] Имеется в виду следующая ее форма $(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n)' = f_1 \cdot \ldots \cdot f_n(f'_1/f_1 + \ldots + f'_n/f_n)$, пригодная, если $f_i \neq 0, i = 1, \ldots, n$.

$$= \left. \frac{w_m}{\cos(x-k\alpha)}\right|_{x=k\alpha-\pi/2} \left(\sum_{l=1,l\neq k}^{m+1} \operatorname{ctg}(k-l)\alpha\right),$$

откуда следует, что

$$h'_{m,k}\left(k\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin^2 k\alpha \left.\left(\frac{w_m}{\cos(x-k\alpha)}\right)^2\right|_{x=k\alpha-\pi/2} \left(\sum_{l=1,l\neq k}^{m+1} \operatorname{ctg}(k-l)\alpha\right) =$$

$$= (m+2)^2 2^{-2m-1} \left(\sum_{l=1,l\neq k}^{m+1} \operatorname{ctg}(k-l)\alpha\right),$$

следовательно

$$g'_{m,k}(k\alpha-\pi/2) =$$
$$= h'_{m,k}\left(k\alpha-\frac{\pi}{2}\right) f_{m,k}\left(k\alpha-\frac{\pi}{2}\right) + h_{m,k}\left(k\alpha-\frac{\pi}{2}\right) f'_{m,k}\left(k\alpha-\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= h'_{m,k}\left(k\alpha-\frac{\pi}{2}\right) + 2h_{m,k}\left(k\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{ctg} k\alpha =$$
$$= (m+2)^2 2^{-2m-1}\left(\operatorname{ctg} k\alpha + \sum_{l=1,l\neq k}^{m+1} \operatorname{ctg}(k-l)\alpha\right).$$

Сумму в скобках можно, сокращая равные слагаемые, записать в виде

$$\sum_{l=1}^{k} \operatorname{ctg} l\alpha - \sum_{l=1}^{m-k+1} \operatorname{ctg} l\alpha = \pm \sum_{l=s+1}^{m+1-s} \operatorname{ctg} l\alpha, \quad s = \min(k, m+1-k).$$

Заметив, что $\operatorname{ctg} l\alpha = -\operatorname{ctg}(m+2-l)\alpha$, $\operatorname{ctg}(m+2)\alpha/2 = 0$, отсюда имеем $g'_{2m+1}(k\alpha-\pi/2) = Cg'_{m,k}(k\alpha-\pi/2) = 0$, $k = 1,\dots,m+1$.

Проверим, что многочлен $g_{2m+1}(x)$ имеет локальные экстремумы в точках $k\alpha+\sigma\pi/2$, $\sigma=\pm1$, $k=1,\dots,m+1$. Сначала оценим число корней у производной $g'_{2m+1}(x)$ на интервале $[-\pi/2, 3\pi/2)$. Из равенства $g_{2m+1}(x+\pi) = -g_{2m+1}(x)$ следует, что $g'_{2m+1}(k\alpha+\pi/2) = -g'_{2m+1}(k\alpha-\pi/2) = 0$, $k=1,\dots,m+1$, т. е. производная имеет еще $m+1$ корней на интервале $[\pi/2, 3\pi/2)$. Так как $g_{2m+1}(k\alpha-\pi/2) = -g_{2m+1}(k\alpha+\pi/2) = \dfrac{m+2}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2m+4}$, $k=1,\dots,m+1$, то функция $g_{2m+1}(x)$ на концах каждого из отрезков $[k\alpha+\sigma\pi/2, (k+1)\alpha+\sigma\pi/2]$, $\sigma=\pm1$, $k=1,\dots m$ принимает равные значения, поэтому согласно теореме Ролля[8] ее производная имеет хотя бы один корень на каждом из этих $2m$ отрезков, поэтому общее число ее корней на интервале $[-\pi/2, 3\pi/2)$ не меньше $4m+2$. Поэтому, согласно известной теореме об оценке числа корней тригонометрического многочлена[9] (см., например, [1]) многочлен g'_{2m+1} имеет на интервале $[-\pi/2, 3\pi/2)$ ровно $4m+2$ простых (однократных) корней, перечисленных выше, следовательно g'_{2m+1} не

[8] Если функция дифференцируема на отрезке и принимает равные значения на его концах, то ее производная обращается в нуль в одной из его внутренних точек.

[9] Ненулевой тригонометрический многочлен порядка n имеет на любом интервале $[a, a+2\pi)$ не более $2n$ корней с учетом кратности.

имеет кратных корней. В частности, на интервале $((m+1)\alpha-\pi/2, \alpha+\pi/2)$ производная корней не имеет, значит, она сохраняет постоянный знак, а так как $g_{2m+1}((m+1)\alpha-\pi/2)>0>g_{2m+1}(\alpha+\pi/2)$, то она отрицательна и функция g_{2m+1} на этом интервале убывает. Так как производная не имеет кратных корней, то ее знаки между корнями чередуются[10)], поэтому слева от корня $(m+1)\alpha-\pi/2$ производная положительна, поэтому согласно известному признаку локального максимума функция $g_{2m+1}(x)$ имеет в точке $(m+1)\alpha-\pi/2$ локальный максимум. Аналогично проверяется, что во всех точках $k\alpha-\pi/2, k=1,\dots m+1$ многочлен $g_{2m+1}(x)$ имеет локальный максимум, а во всех точках $k\alpha+\pi/2, k=1,\dots m+1$ — локальный минимум.

Проверим, что $g_{2m+1}(x)\geqslant 0$ на отрезке $[-\pi/2,\pi/2]$. Так как $C>0$, то достаточно проверить, что $g_{m,k}(x)+g_{m,m+2-k}(x)\geqslant 0$, $1\leqslant k\leqslant (m+2)/2$, откуда следует неравенство

$$g_{2m+1}(x)=C((g_{m,1}(x)+g_{m,m+1}(x))+(g_{m,2}(x)+g_{m,m}(x))+\dots)\geqslant 0.$$

Так как $\cos(x-(m+2-k)\alpha)=-\cos(x+k\alpha)$, то

$$\begin{aligned}&g_{m,k}(x)+g_{m,m+2-k}(x)=\\&=\left(\frac{w_m(x)\sin k\alpha}{\cos(x-k\alpha)\cos(x+k\alpha)}\right)^2(\cos^2(x+k\alpha)f_{m,k}(x)+\cos^2(x-k\alpha)f_{m,m+2-k}(x)).\end{aligned}$$

Для проверки неотрицательности второго сомножителя, в силу тождеств $\sin(x-(m+2-k)\alpha)=-\sin(x+k\alpha)$, $\operatorname{ctg}(m+2-k)\alpha=-\operatorname{ctg}k\alpha$, равного, очевидно,

$$\begin{aligned}&\cos^2(x+k\alpha)(2\operatorname{ctg}k\alpha\cos(x-k\alpha)-\sin(x-k\alpha))+\\&\qquad\qquad+\cos^2(x-k\alpha)(2\operatorname{ctg}k\alpha\cos(x+k\alpha)+\sin(x+k\alpha)),\end{aligned}$$

пользуясь тригонометрическими теоремами сложения, преобразуем его к виду[11)]

$$2\cos x\sin k\alpha(\cos^2 x(2\operatorname{ctg}^2 k\alpha-1)+\sin^2 k\alpha).$$

Так как $0\leqslant\cos^2 x\leqslant 1$, а линейная функция достигает экстремумов на концах отрезка, то при $k=1,\dots,m+1$

$$\cos^2 x(2\operatorname{ctg}^2 k\alpha-1)+\sin^2 k\alpha)\geqslant\min(\sin^2 k\alpha, 2\operatorname{ctg}^2 k\alpha-1+\sin^2 k\alpha).$$

Остается заметить, что в силу тождества

$$\operatorname{ctg}^2 x-\cos^2 x=\operatorname{ctg}^2 x(1-\sin^2 x)=\operatorname{ctg}^2 x\cos^2 x$$

при $k=1,\dots,m+1$, очевидно,

$$2\operatorname{ctg}^2 k\alpha-1+\sin^2 k\alpha=2\operatorname{ctg}^2 k\alpha-\cos^2 k\alpha=\operatorname{ctg}^2 k\alpha(1+\cos^2 k\alpha))\geqslant 0.$$

Так как $\sin k\alpha>0, k=1,\dots,m+1$, то тем самым доказано, что знак функции $g_{2m+1}(x)$ совпадает со знаком $\cos x$.

[10)] Если бы она сохраняла знак на интервале, содержащем три соседних корня, то в среднем из них производная была бы равна нулю, т. е. он был бы двукратным корнем, что невозможно.

[11)] Проверка предоставляется читателю. Для удобства можно обозначить $\cos k\alpha$ через c, а $\sin k\alpha$ через s.

Докажем теперь, что найденные ее экстремумы — глобальные. Между соседними локальными максимумами расположены локальные минимумы, а так как $g_{2m+1}(x) \geqslant 0$ на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$, то на этом отрезке локальные максимумы будут очевидно и глобальными максимумами. В силу равенства $g_{2m+1}(x+\pi) = -g_{2m+1}(x)$ на отрезке $[\pi/2, 3\pi/2]$ функция g_{2m+1} неположительна, поэтому в точках $k\alpha+\pi/2, k = 1, \ldots m+1$ она имеет глобальные минимумы. Следовательно, равенство

$$\|g_{2m+1}\|_\infty = g_{2m+1}\left(k\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{m+2}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2m+4}\,,\ k = 1, \ldots, m+1,$$

доказано.

Докажем теперь, что $g_{2m+1}(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k \cos(2k+1)x$. Так как в силу ее периодичности

$$g_{2m+1}\left(-k\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = g_{2m+1}\left((m+2-k)\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = g_{2m+1}\left(k\alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$g_{2m+1}\left(k\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = g_{2m+1}\left(\frac{\pi}{2} - k\alpha\right),\ 1 \leqslant k \leqslant \frac{m+2}{2}\,,$$

то функции $g_{2m+1}(x)$ и $g_{2m+1}(-x)$ имеют $2m+2$ общих максимума и минимума на интервале $[-\pi, \pi)$, значит их разность имеет в точках $\pm k\alpha + \pm\pi/2$, $1 \leqslant k \leqslant (m+2)/2$ двукратные корни[12)], суммарная кратность которых равна $4m+4$, т. е. больше $4m+2$, поэтому согласно теореме о числе корней тригонометрического многочлена разность $g_{2m+1}(x) - g_{2m+1}(-x)$ равна нулю. Следовательно, многочлен $g_{2m+1}(x)$ четен, поэтому состоит из одних косинусов[13)] (см., например, [1]). Отсутствие в нем косинусов с четными дугами[14)] можно вывести из тождества[15)] $g_{2m+1}(x+\pi) = -g_{2m+1}(x)$, но можно проверить и непосредственно из определения[16)] $g_{2m+1}(x)$.

[12)] Производная разности $g_{2m+1}(x) - g_{2m+1}(-x)$ в этих точках тоже равна нулю, так как производные функций $g_{2m+1}(\pm x)$ в них равны нулю.

[13)] Нечетная часть тригонометрического многочлена $t_n(x)$ выражается формулой

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx = (t_n(x) - t_n(-x))/2,$$

поэтому у четного многочлена она тождественно равна нулю, и поэтому ее коэффициенты a_k равны нулю, согласно теореме о числе корней многочлена.

[14)] Слагаемых вида $b\cos 2kx$, где k — целое. — *Прим. ред.*

[15)] Представляя четный многочлен t_n в виде $t_{0,n} + t_{1,n}$, где $t_{0,n} = \sum\limits_{k=1}^{\lfloor n/2\rfloor} b_{2k}\cos 2kx$, $t_{1,n} = \sum\limits_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor} b_{2k+1}\cos(2k+1)x$, замечаем, что $t_{0,n} = (t_n(x) + t_n(x+\pi))/2$, поэтому из тождества $t_n(x) = -t_n(x+\pi)$ следует, что $t_{0,n}(x) = 0$, и согласно теореме о числе корней многочлена четные коэффициенты $b_{2k} = 0$. Аналогично, если $t_n(x) = t_n(x+\pi)$, то $t_{1,n}(x) = (t_n(x) - t_n(x+\pi))/2 = 0$, следовательно $t_n = t_{0,n}$, т. е. нечетные коэффициенты $b_{2k+1} = 0$.

[16)] Доказав с помощью формул преобразования произведения синусов-косинусов в сумму, что множество многочленов, содержащих только четные дуги, замкнуто относительно умножения, а умножение таких многочленов на многочлены, содержащие только нечетные дуги, дает в результате тоже многочлены, содержащие только нечетные дуги.

Из доказанного для любого многочлена $t_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k \cos(2k+1)x$, $n = 2m+1$, тождества

$$\sum_{k=1}^{m+1} \sin k\alpha\; t_n\left(x + k\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{m+2}{2} b_1 \cos x$$

и соотношений $\|t_n\|_\infty \geqslant t_n\left(k\alpha - \pi/2\right)$,

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2m+4}\|t_n\|_\infty = \sum_{k=1}^{m+1} \sin k\alpha\ \left\|t_n\left(x + k\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right\|_\infty$$

следует неравенство

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2m+4}\|t_n\|_\infty \geqslant \sum_{k=1}^{m+1} \sin k\alpha\; t_n\left(k\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = b_1\frac{m+2}{2},$$

которое, очевидно, обращается в равенство, если и только если

$$t_n\left(k\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \|t_n\|_\infty, \quad k = 1, \ldots, m+1.$$

Так как эти соотношения выполнены для $t_n = g_{2m+1}$, то

$$\|g_{2m+1}\|_\infty = \frac{m+2}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2m+4} b_1,$$

откуда, в силу доказанного равенства $\|g_{2m+1}\|_\infty = \dfrac{m+2}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2m+4}$, следует, что $b_1 = 1$.

Докажем единственность экстремального многочлена t_n при нечетном $\lfloor n/h \rfloor$. Можно считать, что $c_h = 1$, $\|t_n\|_\infty = \dfrac{m+2}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2m+4}$, $m = \lfloor (n-h)/2h \rfloor$. Положим

$$f_{2m+1}(x) = \frac{1}{2h}\sum_{l=1}^{2h}(-1)^l t_n\left(\frac{x+\pi l}{h}\right) = \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{m} c_{2k+1}\exp i(2k+1)x.$$

Так как

$$\|t_n\|_\infty \geqslant t_n\left(\frac{x+\pi l}{h}\right), \quad \|f_{2m+1}\|_\infty \geqslant f_{2m+1}\left(k\alpha - \frac{\pi}{2}\right), \quad \sum_{k=1}^{m+1}\sin k\alpha = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2m+4},$$

то из доказанных выше неравенств следует, что при некотором γ

$$\frac{m+2}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2m+4} = \|t_n\|_\infty \geqslant \frac{1}{2h}\sum_{l=1}^{2h}(-1)^l t_n\left(\frac{\gamma+\pi l}{h}\right) = f_{2m+1}(\gamma) =$$

$$= \|f_{2m+1}\|_\infty \geqslant \operatorname{tg}\frac{\pi}{2m+4}\sum_{k=1}^{m+1}\sin k\alpha\; f_{2m+1}\left(k\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{m+2}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2m+4}.$$

Очевидно, эти неравенства обращаются в равенства, поэтому

$$\|f_{2m+1}\|_\infty = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2m+4}\sum_{k=1}^{m+1}\sin k\alpha\ \|f_{2m+1}\|_\infty =$$

$$= \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m+4} \sum_{k=1}^{m+1} \sin k\alpha \; f_{2m+1}\left(k\alpha - \frac{\pi}{2}\right),$$

значит в качестве γ можно взять любое $k\alpha - \pi/2$, $k = 1, \ldots, m+1$, откуда

$$t_n\left(\frac{k\alpha + \pi l - \pi/2}{h}\right) = (-1)^l \|t_n\|_\infty, \quad k = 1, \ldots, m+1, \; l = 1, \ldots, 2h.$$

Следовательно, многочлен t_n имеет на интервале $[\pi/2h, 2\pi + \pi/2h)$ локальные экстремумы в точках $(k\alpha + \pi l - \pi/2)/h$, $k = 1, \ldots, m+1$, $l = 1, \ldots, 2h$, и общее их количество равно $2(m+1)h > n$. Докажем его единственность рассуждением от противного. Так как производная многочлена t_n в точках локальных экстремумов равна нулю, то если бы существовал другой многочлен с теми же локальными экстремумами, то разность этих многочленов имела бы на интервале $[\pi/2h, 2\pi + \pi/2h)$ не менее $2(m+1)h > n$ двукратных корней, что противоречит теореме о числе корней на периоде у тригонометрического многочлена.

Рассмотрим случай четного $\lfloor n/h \rfloor$. Тогда $n \geqslant (2m+2)h$, $m = \lfloor \frac{n-h}{2h} \rfloor$. Полагаем, как и выше, что $c_h = 1$. Покажем, что тогда экстремальными будут многочлены $g_{2m+1}(hx) + cU^2_{m+1}(\sin hx)$ при любом достаточно малом $|c|$, где $U_k(x)$ — многочлен Чебышёва второго рода, определяемый равенством $U_k(\cos x) = \sin(k+1)x / \sin x$ (см. [1]). Так как в силу тождества $\sin(k+2)x + \sin kx = 2\sin(k+1)x \cos x$ очевидно $U_{k+1}(\cos x) + U_{k-1}(\cos x) = 2\cos x U_k(\cos x)$, то по индукции легко проверяется, что $U_k(x)$ есть алгебраический многочлен степени k. Так как

$$U_k(-\cos x) = U_k(\cos(x+\pi)) = \frac{\sin(k+1)(x+\pi)}{\sin(x+\pi)} =$$
$$= (-1)^k \frac{\sin(k+1)x}{\sin x} = (-1)^k U_k(\cos x),$$

то $U_k(-x) = (-1)^k U_k(x)$, значит $U_k^2(x)$ — четный алгебраический многочлен степени $2k$, значит $U^2_{m+1}(\sin h(x+\pi)) = U^2_{m+1}(\pm \sin hx) = U^2_{m+1}(\sin hx)$, следовательно $U^2_{m+1}(\sin hx) = \sum\limits_{k=0}^{m+1} d_{2k} \cos 2khx$ есть четный тригонометрический многочлен порядка $2(m+1)h \leqslant n$. Так как корни многочлена $U_k(x)$ есть, очевидно, $\cos l\pi/(k+1), l = 1, \ldots, k$ то в силу равенств

$$\alpha = \frac{\pi}{m+2}, \sin\left(h\frac{k\alpha + \pi l - \pi/2}{h}\right) = \sin\left(k\alpha + \pi l - \frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= (-1)^{l+1} \cos k\alpha = (-1)^l \cos(m+2-k)\alpha$$

тригонометрический многочлен $U_{m+1}(\sin hx)$ имеет корни $(k\alpha + \pi l - \pi/2)/h$, $k = 1, \ldots, m+1$, $l \in \mathbb{Z}$. В силу формулы дифференцирования $(f^2)' = 2ff'$ у многочлена $U^2_{m+1}(\sin hx)$ те же корни будут двукратными (но не троекратными, так как суммарная кратность корней на периоде не может быть больше $4(m+1)h$), и они совпадают с точками локальных экстремумов многочлена $g_{2m+1}(hx)$, так как подобные точки многочлена $g_{2m+1}(x)$ есть $k\alpha + \pi l - \pi/2$,$k = 1, \ldots, m+1$, $l \in \mathbb{Z}$. Поэтому локальные экстремумы многочлена $g_{2m+1}(hx) + cU^2_{m+1}(\sin hx)$

совпадают с локальными экстремумами многочлена $g_{2m+1}(hx)$. Осталось доказать, что при малом $|c|$ локальные экстремумы будут также глобальными. Заметим, что, в силу отсутствия кратных корней у производной $g_{2m+1}(x)$ и известного признака локального экстремума, в точках локальных максимумов вторая производная $g_{2m+1}(x)$ отрицательна, а в точках локальных минимумов — положительна, и то же самое, очевидно, верно для многочлена $g_{2m+1}(hx)$. Аналогично, во всех указанных точках вторая производная многочлена $U^2_{m+1}(\sin hx)$ положительна. Поэтому глобальность локальных экстремумов у многочлена $g_{2m+1}(hx) + cU^2_{m+1}(\sin hx)$ при любом достаточно малом $|c|$ вытекает из следующей интуитивно очевидной леммы:

Пусть функции f, g дважды дифференцируемы на отрезке $[a, b]$. Если они имеют двукратные нули в точках a, b, вторая производная g в этих точках отрицательна, вторая производная f в них положительна, и $g(x) < 0 < f(x)$ при $a < x < b$, то при малом $|c|$ $g(x) + cf(x) < 0$ при $a < x < b$. Если же g убывает на этом отрезке и $g'(a) = g'(b) = 0$, $g''(a) < 0, g''(b) > 0$, то $g(a) \geqslant g(x) + cf(x) \geqslant g(b)$ при малом $|c|$.

Для доказательства первого утверждения достаточно проверить, что при малом $|c|$ и $a < x < b$ справедливо неравенство $g(x)/f(x) < -c$. Так как $g(x)/f(x) < 0$, и согласно правилу Бернулли–Лопиталя[17)]

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g''(a)}{f''(a)} < 0,$$

и аналогично $\lim\limits_{x\to a} g(x)/f(x) < 0$, значит функция $g(x)/f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, поэтому согласно теореме[18)] о существовании экстремума

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} g(x)/f(x) = M < 0$$

и достаточно выбрать $|c| < |M|$. Для доказательства второго утверждения достаточно проверить, что при $a < x < b$

$$(g(a) - g(x))/f(x) > c > (g(b) - g(x))/f(x).$$

Применяя правило Лопиталя к обеим дробям имеем

$$\lim_{x\to a} \frac{g(a) - g(x)}{f(x)} = -\frac{g''(a)}{f''(a)} > 0, \quad \lim_{x\to b} \frac{g(b) - g(x)}{f(x)} = -\frac{g''(b)}{f''(b)} < 0,$$

значит функции $(g(a)-g(x))/f(x), (g(b)-g(x))/f(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, поэтому согласно теореме о существовании экстремума

$$\min_{a\leqslant x\leqslant b} \frac{g(a) - g(x)}{f(x)} = M_1 > 0, \quad \max_{a\leqslant x\leqslant b} \frac{g(b) - g(x)}{f(x)} = M_2 < 0,$$

и достаточно выбрать $|c| < \min(M_1, -M_2)$.

---

17) Если $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = \lim\limits_{x\to a} f'(x)/g'(x)$. Можно, конечно, обойтись без правила Лопиталя, используя вместо него теорему о среднем.

18) Непрерывная на отрезке функция имеет на нём максимум и минимум.

Список литературы

[1] Полиа Г., Сеге Г. *Задачи и теоремы из анализа.* М.: Мир, 1978.

[2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Физматлит, 2004.

[3] Бернштейн С. Н. *Экстремальные свойства полиномов и наилучшие приближения непрерывных функций одной вещественной переменной.* М.: ОНТИ, 1937.

[4] Рыжаков И. Ю. *Об одной задаче С. Н. Бернштейна* // ДАН СССР, 1963, 153, №2, С. 282–285.

[5] Вороновская Е. В. *Метод функционалов и его приложения.* Л., 1963.

[6] Гашков С. Б. *О некоторых частных случаях задачи Владимира Маркова в метрике* L_p // Дифференциальные уравнения, гармонический анализ и их приложения. Изд. МГУ, 1987. С. 79–82.

[7] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. *Избранные задачи и теоремы арифметики и алгебры.* М.: Физматлит, 2001.

С. Б. Гашков, механико-математический факультет МГУ