Неравенство Фейера – Эгервари – Сасса для неотрицательных тригонометрических многочленов

С. Б. Гашков

Действительным тригонометрическим многочленом степени n называется функция вида

$$t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx + b_k \cos kx,$$

где a_k, b_k — действительные числа, называемые его коэффициентами, $a_n^2 + b_n^2 > 0$. Нулевой коэффициент традиционно записывается в виде $a_0/2$. Так как согласно формулам Эйлера $\exp ikx = \cos kx + i \sin kx$, и $a_k \sin kx + b_k \cos kx = \mathrm{Re}((b_k - ia_k) \exp ikx)$, где Re означает действительную часть комплексного числа, i — мнимую единицу, то тригонометрический многочлен можно записать в более краткой комплексной форме

$$t_n(x) = \mathrm{Re} \sum_{k=0}^{n} c_k \exp ikx, \quad c_k = b_k - ia_k,\ k = 1, \ldots, n,\ c_0 = \frac{a_0}{2}\,.$$

Действительный тригонометрический многочлен $t_n(x)$ называется неотрицательным, если для любого действительного x значение $t_n(x) \geqslant 0$. Для его коэффициентов справедливо неравенство Фейера – Эгервари – Сасса (см. [1–3])

$$|c_h| \leqslant 2|c_0| \cos \frac{\pi}{\lfloor \frac{n}{h} \rfloor + 2} = |a_0| \cos \frac{\pi}{\lfloor \frac{n}{h} \rfloor + 2}\,, \quad h = 1, \ldots, n,$$

где символ $\lfloor a \rfloor$ означает целую часть числа a. Это неравенство имеет применения в теории приближений (см. [4]). Доказывается оно в [2–4] применением представления неотрицательного тригонометрического многочлена $t_n(x)$ в форме Фейера [1]

$$t_n(x) = \left| \sum_{k=0}^{n} y_k \exp ikx \right|^2$$

и последующим решением полученной экстремальной задачи, либо с помощью одной матричной задачи о собственных значениях ([2, 3]), либо применением метода множителей Лагранжа ([4]).

Далее мы приведем два простых и элементарных доказательства этого неравенства, использующие только простейшие свойства комплексных чисел (краткое изложение см. [5]).

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 9, 2005(69–75)

Сначала сведем общий случай к случаю $h = 1$, рассматривая вместо многочлена $t_n(x)$ его усреднение, а именно многочлен

$$\frac{1}{h}\sum_{l=1}^{h} t_n\left(\frac{x+2\pi l}{h}\right) = \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{\lfloor n/h\rfloor} c_{hk}\exp ikx.$$

Для доказательства этого тождества достаточно, меняя порядок суммирования, заметить, что

$$\sum_{l=1}^{h} t_n\left(\frac{x+2\pi l}{h}\right) = \sum_{l=1}^{h}\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n} c_k\exp\left(\frac{ik(x+2\pi l)}{h}\right) =$$
$$= \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=1}^{h} c_k\exp\left(\frac{ik(x+2\pi l)}{h}\right),$$

где при k, кратном h, в силу равенства $\exp(2\pi kli/h) = \exp 2\pi mi = 1$ имеем

$$\sum_{l=1}^{h} c_k\exp\left(\frac{ik(x+2\pi l)}{h}\right) = c_k\exp\left(\frac{ikx}{h}\right)\sum_{l=1}^{h}\exp\left(\frac{2\pi kli}{h}\right) = c_k h\exp\left(\frac{ikx}{h}\right),$$

а при k не кратном h, применяя формулу суммирования геометрической прогрессии, имеем

$$\sum_{l=1}^{h}\exp\left(\frac{2\pi kli}{h}\right) = \sum_{l=0}^{h-1}\exp\left(\frac{2\pi kli}{h}\right) = \frac{\exp 2\pi ki - 1}{\exp(2\pi ki/h) - 1} = 0.$$

Так как усредненный многочлен очевидно неотрицателен, применяя к нему частный случай $h = 1$ доказываемого неравенства, получаем общий случай этого неравенства. Поэтому далее остается доказать для неотрицательного тригонометрического многочлена $t_n(x)$ неравенство

$$|c_1| \leqslant |a_0|\cos\frac{\pi}{n+2}\,.$$

Применяя к $t_n(x)$ указанное выше усреднение при $h = n+1$, замечаем, что

$$\frac{1}{n+1}\sum_{l=1}^{n+1} t_n\left(\frac{x+2\pi l}{n+1}\right) = c_0 = \frac{a_0}{2} \geqslant 0,$$

причем равенство возможно лишь когда $t_n(x)$ тождественно равно нулю, т. е. когда $c_k = 0, k = 0, \ldots, n$, поэтому указанное неравенство можно переписать в виде

$$|c_1| \leqslant a_0\cos\frac{\pi}{n+2}\,.$$

Выберем x_0 так, чтобы $c_1\exp ix_0 = |c_1|$ и вместо $t_n(x)$ возьмем неотрицательный тригонометрический многочлен $(t_n(x_0+x)+t_n(x_0-x)/(2a_0)$, тогда из равенства

$$\frac{t_n(x_0+x)+t_n(x_0-x)}{2a_0} =$$

$$= \frac{1}{2a_0} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k \exp\left(ik(x_0 + x)\right) + \sum_{k=0}^{n} c_k \exp\left(ik(x_0 - x)\right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2a_0} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Re}(c_k(\exp\left(ik(x + x_0)\right) + \exp\left(ik(x_0 - x)\right))) =$$

$$= \frac{1}{2a_0} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Re}(c_k \exp\left(ikx_0\right)(\exp ikx + \exp\left(-ikx\right)) =$$

$$= \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Re}(c_k \exp\left(ikx_0\right)) \cos kx = \frac{1}{2} + \frac{|c_1|}{a_0} \cos x + \sum_{k=2}^{n} d_k \cos kx$$

следует, что $t_n(x)$ становится четным действительным тригонометрическим многочленом, и для доказательства общего неравенства Фейера – Эгервари – Сасса достаточно доказать для неотрицательного четного многочлена $t_n(x) = = 1/2 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \cos kx$ неравенство $|b_1| \leqslant \cos \pi/(n+2)$. Согласно теореме Фейера [1] (см. также [3])

$$t_n(x) = \left| \sum_{k=0}^{n} y_k \exp ikx \right|^2,$$

где y_k, $k = 0, \ldots, n$ — действительные числа. Так как комплексно-сопряженное число к $\sum\limits_{k=0}^{n} y_k \exp ikx$ есть $\sum\limits_{k=0}^{n} y_k \exp\left(-ikx\right)$, то

$$\left| \sum_{k=0}^{n} y_k \exp ikx \right|^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} y_k \exp ikx \right) \left(\sum_{k=0}^{n} y_k \exp\left(-ikx\right) \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} y_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (\exp ikx + \exp\left(-ikx\right)) \sum_{l=k}^{n} y_l y_{l-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} y_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (2\cos kx) \sum_{l=k}^{n} y_l y_{l-k} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} b_k \cos kx,$$

откуда, приравнивая коэффициенты в обоих частях равенства, имеем

$$\sum_{k=0}^{n} y_k^2 = \frac{1}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} y_k y_{k-1} = \frac{b_1}{2}.$$

Положим для краткости

$$\alpha = \frac{\pi}{n+2}, \quad \sigma_k = \sqrt{\frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin k\alpha}}, \ k = 1, \ldots, n,$$

тогда

$$\sigma_k^2 + \sigma_{k-1}^{-2} = \frac{\sin(k+1)\alpha + \sin(k-1)\alpha}{\sin k\alpha} = 2\cos\alpha = \sigma_1^2,$$

поэтому справедливо тождество

$$\sum_{k=0}^{n} y_k^2 - \frac{1}{\cos\alpha}\sum_{k=1}^{n} y_k y_{k-1} = \frac{1}{2\cos\alpha}\sum_{k=1}^{n}\left(\sigma_k y_{k-1} - \frac{y_k}{\sigma_k}\right)^2,$$

в котором легко убедиться раскрытием скобок. Из тождества, очевидно, следует нужное нам неравенство

$$\frac{1}{2} = \sum_{k=0}^{n} y_k^2 \geqslant \frac{1}{\cos\alpha}\sum_{k=1}^{n} y_k y_{k-1} = \frac{b_1}{2\cos\alpha}\,.$$

В равенство оно обращается лишь когда $\sigma_k y_{k-1} = y_k/\sigma_k$, т. е. когда

$$\frac{y_k}{y_{k-1}} = \sigma_k^2 = \frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin k\alpha}\,,$$

другими словами, при условии коллинеарности векторов

$$(y_0,\ldots,y_n),\ (\sin\alpha,\ldots,\sin(n+1)\alpha).$$

Можно проверить, что тригонометрический многочлен

$$\frac{1}{n+2}\left|\sum_{k=0}^{n}\sin((k+1)\alpha)\exp\left(ikx\right)\right|^2 = \sum_{k=0}^{n} b_k\cos kx, \quad b_0 = \frac{1}{2},\ b_1 = \cos\alpha,$$

так как

$$\sum_{k=1}^{n+1}\sin^2 k\alpha = \frac{n+1}{2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\cos 2k\alpha}{2} = \frac{n+2}{2}$$

в силу тождества

$$1 + \sum_{k=1}^{n}\cos 2k\alpha = \sum_{k=0}^{n+1}\cos 2k\alpha = \mathrm{Re}\sum_{k=0}^{n+1}\exp 2k\alpha = \mathrm{Re}\,\frac{\exp\left(2(n+2)\alpha\right)-1}{\exp\left(2\alpha\right)-1} = 0.$$

Заметим еще, что доказанное неравенство

$$\left(\cos\frac{\pi}{n+2}\right)\sum_{k=0}^{n} y_k^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} y_k y_{k-1}$$

равносильно неравенству Фана – Таусски – Тодда

$$\sum_{k=0}^{n+1} y_k^2 \leqslant \frac{1}{2 - 2\cos\dfrac{\pi}{n+2}}\sum_{k=1}^{n+1}(y_k - y_{k-1})^2,$$

где $y_0 = y_{n+1} = 0$, которое является дискретным аналогом неравенства Виртингера (см. [6]).

Покажем теперь, как можно доказать неравенство, не пользуясь теоремой Фейера. Для этого достаточно подобрать положительные коэффициенты β_k, $k = 0,\ldots,n-1$, так, чтобы для любого комплексного тригонометрического многочлена $t_n(x) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \exp ikx$ выполнялось при $\alpha = \pi/(n+2)$ и некотором действительном γ тождество

$$\sum_{l=0}^{n-1} \beta_l t_n(x + 2l\alpha) = 1 + \frac{c_1 \exp\left(i(x+\gamma)\right)}{\cos\alpha}\,.$$

Тогда для действительного тригонометрического многочлена будет выполняться тождество

$$\sum_{l=0}^{n-1} \beta_l t_n(x + 2l\alpha) = 1 + \frac{\operatorname{Re}(c_1 \exp i\gamma \exp ix)}{\cos\alpha}\,.$$

Если применить его к неотрицательному тригонометрическому многочлену, то двучлен $1 + \operatorname{Re}(c_1 \exp i(x+\gamma))/\cos\alpha$ также будет неотрицательным. Выберем действительное x^* так, чтобы $\operatorname{Re}(c_1 \exp i(x^*+\gamma)) = -|c_1|$. Тогда

$$1 + \frac{\operatorname{Re} c_1 \exp\left(i(x^*+\gamma)\right)}{\cos\alpha} = 1 - \frac{|c_1|}{\cos\alpha} \geqslant 0,$$

откуда и следует нужное нам неравенство $|c_1| \leqslant \cos\alpha$.

Остается выбрать коэффициенты и доказать тождество. Рассмотрим числовую последовательность γ_k, определяемую начальными условиями $\gamma_{-1} = 0$, $\gamma_0 = 1$ и рекуррентными соотношениями $\gamma_{k-1} + \gamma_{k+1} - 2\gamma_k \cos 2\alpha = 1$, $\alpha = \pi/(n+2)$. Очевидно $\gamma_1 = 1 + 2\cos 2\alpha \geqslant 0$. Решая рекуррентное соотношение, можно найти, что

$$\gamma_k = A \sin 2k\alpha + B\cos 2k\alpha + C,$$
$$A = \frac{1+2\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha},\ C = \frac{1}{2-2\cos 2\alpha},\ B = 1 - 2C.$$

Но проще непосредственно проверить, пользуясь формулами

$$\sin 2(k-1)\alpha + \sin 2(k+1)\alpha = 2\sin 2k\alpha \cos 2\alpha,$$
$$\cos 2(k-1)\alpha + \cos 2(k+1)\alpha = 2\cos 2k\alpha \cos 2\alpha,$$
$$\gamma_0 = B + C = 1,$$
$$\gamma_{-1} = -\frac{1}{2} - \cos 2\alpha + (1-C)\cos 2\alpha + C = -\frac{1}{2} + C(1-\cos 2\alpha) = 0,$$

что так определенная последовательность удовлетворяет указанным выше начальным условиям и рекуррентным соотношениям. Очевидно в силу периодичности, что $\gamma_{n+1} = \gamma_{-1} = 0, \gamma_{n+2} = \gamma_0 = 1$, откуда с помощью рекуррентной формулы находим, что $\gamma_n = 0, \gamma_{n-1} = 1$, поэтому в силу равенств $\gamma_{-1} = \gamma_n, \gamma_0 = \gamma_{n-1}$ и симметричности рекуррентного соотношения относительно замены k на $n-1-k$ имеем равенство $\gamma_k = \gamma_{n-1-k}, k = 0, \ldots, n-1$. Так как $\gamma_0 = 1, \gamma_1 \geqslant 0$, то при $n \leqslant 3$ очевидно $\gamma_k \geqslant 0, k = 0, \ldots, n-1$. Проверим это при $n \geqslant 4$. Так как при $0 \leqslant k \leqslant (n-1)/2$ очевидно $0 \leqslant 2k\alpha < \pi, 0 \leqslant 2\alpha \leqslant \pi/3$, $\sin 2k\alpha > 0$, $\cos 2\alpha \geqslant 1/2$, поэтому $A \geqslant 0$, $C \geqslant 1$, $B \leqslant 0$, следовательно $A\sin 2k\alpha \geqslant 0$, и в силу монотонности $C + B\cos 2k\alpha \geqslant C + B = 1$, откуда имеем $\gamma_k \geqslant 1, k = 0, \ldots, n-1$ при $n \geqslant 4$. Рассмотрим многочлен

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k z^k.$$

Непосредственно из рекуррентных соотношений следует, что

$$(z^2 - 2z\cos 2\alpha + 1)p(z) = z^{n+1} + \ldots + z + 1,$$

так как $\gamma_n = \gamma_{n+1} = \gamma_{-1} = \gamma_{-2} = 0$. Поэтому

$$p(z) = \frac{z^{n+1} + \ldots + z + 1}{z^2 - 2z\cos 2\alpha + 1} = \frac{z^{n+2} - 1}{(z-1)(z^2 - 2z\cos 2\alpha + 1)} =$$

$$= \frac{z^{n+2} - 1}{(z-1)(z - \exp 2\alpha i)(z - \exp(-2\alpha i))},$$

а так как

$$z^{n+2} - 1 = \prod_{k=0}^{n+1} (z - \exp 2k\alpha i),$$

то

$$p(z) = \frac{z^{n+2} - 1}{(z-1)(z - \exp 2\alpha i)(z - \exp(-2\alpha i))} = \prod_{k=2}^{n} (z - \exp 2k\alpha i).$$

Поэтому

$$\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k = p(1) = \frac{n+2}{2 - 2\cos 2\alpha} = \frac{n+2}{4\sin^2\alpha},$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \exp 2k\alpha i\right| = |p(\exp 2\alpha i)| =$$

$$= \left|\prod_{k=2}^{n} (\exp 2\alpha i - \exp 2k\alpha i)\right| = \left|\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \exp 2k\alpha i)\right|,$$

а так как

$$\prod_{k=1}^{n-1} (z - \exp 2k\alpha i) = \frac{z^{n+2} - 1}{(z-1)(z - \exp 2n\alpha i)(z - \exp(2(n+1)\alpha i)} =$$

$$= \frac{z^{n+1} + \ldots + z + 1}{(z - \exp 2n\alpha i)(z - \exp 2(n+1)\alpha i)},$$

то

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \exp 2k\alpha i\right| = \left|\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \exp 2k\alpha i)\right| =$$

$$= \left|\frac{n+2}{(1 - \exp 2n\alpha i)(1 - \exp 2(n+1)\alpha i)}\right| = \frac{n+2}{8\sin^2\alpha\cos\alpha}$$

в силу равенств

$$|(\exp 2xi - 1)| = \sqrt{(\cos 2x - 1)^2 + \sin^2 2x} = \sqrt{4\sin^4 x + 4\sin^2 x\cos^2 x} =$$

$$= \sqrt{4\sin^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x)} = 2|\sin x|,$$

$$|(1 - \exp 2n\alpha i)(1 - \exp 2(n+1)\alpha i)| = |(\exp 4\alpha i - 1)(\exp 2\alpha i - 1)| =$$

$$= 4 \sin 2\alpha \sin \alpha = 8 \sin^2 \alpha \cos \alpha,$$

откуда следует, что при некотором действительном γ

$$\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \exp 2k\alpha i = \frac{(n+2) \exp i\gamma}{8 \sin^2 \alpha \cos \alpha}.$$

Далее, при $l = 2, \ldots, n$ имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \exp 2lk\alpha i = p(\exp 2l\alpha i) =$$

$$= \frac{(\exp 2l\alpha i)^{n+2} - 1}{(\exp 2l\alpha i - 1)(\exp 2l\alpha i - \exp 2\alpha i)(\exp 2l\alpha i - \exp(-2\alpha i))} = 0,$$

и поэтому для комплексного тригонометрического многочлена $t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \exp ikx$ справедливо тождество

$$\sum_{l=0}^{n-1} \gamma_l t_n(x + 2l\alpha) = \sum_{l=0}^{n-1} \gamma_l \sum_{k=0}^{n} c_k \exp ik(x + 2l\alpha) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_k \exp ikx \sum_{l=0}^{n-1} \gamma_l \exp 2kl\alpha i = \frac{n+2}{4 \sin^2 \alpha} \left(c_0 + \frac{c_1 \exp i(x+\gamma)}{2 \cos \alpha} \right).$$

Полагая $\beta_k = 8\gamma_k \sin^2 \alpha / (n+2)$, получаем обещанное тождество

$$\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k t_n(x + 2k\alpha) = 2c_0 + \frac{c_1 \exp(i\gamma) \exp(ix)}{\cos \alpha}, \ \beta_k > 0, \ k = 0, \ldots, n-1.$$

Список литературы

[1] Fejer L. *Ueber trigonometrische Polynome* // J. fuer die reine und angew. Math., 1915. Bd. 146. S. 53–82.

[2] Egervary E., Szasz O. *Einige Extremalprobleme im Bereiche der trigonometrischen Polynome* // Math.Zeitschr., 1928. Bd. 27. S. 641–652.

[3] Полиа Г., Сеге Г. *Задачи и теоремы из анализа.* М.: Наука, 1978.

[4] Тихомиров В. М. *Некоторые вопросы теории приближений.* М.: Изд. МГУ, 1976.

[5] Гашков С. Б. *О некоторых частных случаях задачи Владимира Маркова в метрике L_p* // Дифференциальные уравнения, гармонический анализ и их приложения. М.: Изд. МГУ, 1987. С. 79–82.

[6] Беккенбах Э., Беллман Р. *Неравенства.* М.: Мир, 1965.