Комментарий к статье С. Б. Гашкова «Неравенство Фейера – Эгервари – Сасса для неотрицательных тригонометрических многочленов»

В. М. Тихомиров

В статье С. Б. Гашкова элементарными средствами доказано важное и интересное неравенство. Оно заключается в том, что неотрицательный четный тригонометрический полином в среднем равный единице, не может иметь слишком большие по модулю коэффициенты. Это обстоятельство имеет то же происхождение, что и принцип неопределенности в квантовой механике. Оно и его разнообразные обобщения имеют многочисленные приложения.

В статье имеется ссылка на мою книгу (см. [4] в списке литературы), где это неравенство доказывается методом множителей Лагранжа. Это доказательство с одной стороны настолько просто, а с другой — дает такие богатые возможности для обобщений, что мне представилось разумным привести его здесь. Итак, имеет место

Теорема. *Если тригонометрический полином*

$$x(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \rho_k \cos kt$$

(*с вещественными коэффициентами*) *неотрицателен, то выполнено точное неравенство*:

$$|\rho_1| \leqslant \cos\frac{\pi}{n+2}\,.$$

(Общий результат легко редуцируется к этой теореме — это показано в начале комментируемой статьи.)

Доказательство. Известно, что полином $x(\cdot)$ представи́м в виде квадрата многочлена: $x(t) = |\sum_{k=0}^{n} x_k e^{ikt}|^2,\ x_k \in \mathbb{R}$. Таким образом,

$$x(t) = (\sum_{k=0}^{n} x_k e^{ikt})(\sum_{k=0}^{n} x_k e^{-ikt}) = \sum_{k=0}^{n} x_k^2 + 2\sum_{k=0}^{n-1} x_k x_{k+1}\cos t + \dots,$$

и дело свелось к точному решению экстремальной задачи:

$$-\sum_{k=0}^{n-1} x_k x_{k+1} \to \min, \qquad \sum_{k=0}^{n} x_k^2 = 1.$$

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 9, 2005(76–77)

Решение этой задачи из-за компактности сферы $\sum_{k=0}^{n} x_k^2 = 1$ существует. Применяем правило множителей Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид: $\mathcal{L}(x,\lambda) = -\sum_{k=0}^{n-1} x_k x_{k+1} + \lambda \sum_{k=0}^{n} x_k^2$. Согласно правилу множителей Лагранжа, если x — решение задачи, то найдется множитель Лагранжа λ такой, что $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(x,\lambda) = 0$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Это приводит к системе уравнений:

$$x_1 = 2\lambda x_0, \quad x_{k-1} + x_{k+1} = 2\lambda x_k,\ 1 \leqslant k \leqslant n-1, \quad x_{n-1} = 2\lambda x_n. \tag{1}$$

Значит, $x_k = p_k(\lambda)x_0$, где $p_k(\cdot)$ — многочлен от λ, удовлетворяющий рекуррентным соотношениям:

$$p_k(\lambda) = 2\lambda p_{k-1}(\lambda) - p_{k-2}(\lambda),\ k \geqslant 2, \quad p_0(\lambda) = 1, \quad p_1(\lambda) = 2\lambda. \tag{2}$$

Для математика, знакомого с теориями квадратичных форм и ортогональных полиномов, на этом всё кончается: выписанными соотношениями определяются *полиномы Чебышёва второго рода,* представимые формулами: $p_k(\lambda) = \dfrac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$, где $\lambda = \cos\theta$. При этом, ввиду того, что $p_{n-1}(\lambda) = \lambda p_n(\lambda)$ (таково последнее рекуррентное соотношение), получаем, что $p_{n+1}(\cos\theta) = 0 \Leftrightarrow \sin(n+2)\theta = 0$. Максимум в задаче совпадает с наибольшим корнем этого уравнения. Откуда, значение задачи равно $\cos\dfrac{\pi}{n+2}$. В этом и состоит теорема.

Для тех же, кто сталкивается со всем этим впервые, надо кое-что пояснить.

1. Умножая уравнения (1) соответственно на $x_0, x_1, \ldots, x_n$, складывая и учитывая, что $\sum_{k=0}^{n} x_k^2 = 1$, приходим к тому, что $\sum_{k=0}^{n-1} x_k x_{k+1} = \lambda$, т. е. значение задачи — максимальное число среди множителей Лагранжа, удовлетворяющих уравнениям (1).

2. Решают уравнения в конечных разностях так. Частное решение ищется в виде $p_k(\lambda) = a^k$. Тогда a должно удовлетворять уравнению $a^2 - 2\lambda a + 1$, т. е. $a = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1}$, откуда $a = e^{i\theta}$, где $\lambda = \cos\theta$. Общее решение ищем в виде $p_k(\lambda) = C_1 e^{ik\theta} + C_2 e^{-ik\theta}$. Учитывая граничные условия, получаем, что $p_k(\lambda) = \dfrac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$. Максимальный корень уравнения $p_{n-1}(\lambda) = \lambda p_n(\lambda)$ (таково последнее рекуррентное соотношение) — это корень уравнения $\sin(n+2)\theta = 0$, т. е. $\theta = \dfrac{\pi}{n+2}$, откуда значение задачи равно $\cos\dfrac{\pi}{n+2}$, что и требовалось.

В. М. Тихомиров, механико-математический факультет МГУ