Наш семинар: математические сюжеты

Теорема о высотах треугольника в геометрии Лобачевского как тождество Якоби в алгебре Ли квадратичных форм на симплектической плоскости

В. И. Арнольд*

Теорема о пересечении высот треугольника в одной точке в геометриях Лобачевского и де Ситтера доказывается с помощью изоморфизма между этими геометриями, с одной стороны, и симплектической геометрией и алгеброй Ли бинарных квадратичных форм — с другой.

Плоскость Лобачевского может рассматриваться как проективизация пространства положительно определенных бинарных квадратичных форм [1], если использовать ее модель Клейна в виде круга в пространстве $\mathbb{R}P^2$. Лента Мёбиуса, служащая его дополнением, образует «мир де Ситтера» гиперболических бинарных форм, заданных на той же плоскости (с точностью до умножения на ненулевую константу, как и в предыдущем случае). Метрика в этих пространствах вводится как вторая дифференциальная форма определителя на гиперболоиде форм с определителем соответственно 1 и -1.

Введенная риманова метрика на плоскости Лобачевского и лоренцева псевдориманова метрика в мире де Ситтера инвариантны относительно группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ симплектических линейных отображений плоскости $\{(p,q)\}$. Квадратичные формы $ap^2 + 2bpq + cq^2$ на этой симплектической плоскости образуют трехмерное вещественное пространство относительно координат a, b, c.

*Работа частично поддержана грантом РФФИ 02–01–00655

Действие группы сохраняет определитель квадратичной формы $\Delta = ac - b^2$. Плоскость Лобачевского оказывается проективизацией внутренности конуса $\Delta > 0$, а мир де Ситтера — проективизацией дополнения $\Delta < 0$. Сам конус $\Delta = 0$ является проективной версией абсолюта — окружности, ограничивающей круг в модели Клейна.

Поэтому мы будем рассматривать точки плоскости Лобачевского и мира де Ситтера как «формы» («форма» $[a : b : c]$ — это квадратичная форма $ap^2 + 2bpq + cq^2$, взятая с точностью до постоянного ненулевого множителя).

С другой стороны, точки мира де Ситтера можно интерпретировать как прямые на плоскости Лобачевского (и обратно): две касательные, проведенные из данной де-ситтеровской точки пространства $\mathbb{R}P^2$ к окружности абсолюта, определяют на ней две точки касания; соединяющая их прямая на плоскости Лобачевского ставится в соответствие исходной точке (это проективная двойственность относительно абсолюта).

Точно так же прямые Лобачевского, проходящие через общую точку в круге, могут рассматриваться как точки мира де Ситтера, в каждой из которых пересекаются две касательные к абсолюту в двух точках одной из этих прямых.

Таким образом, совокупности прямых Лобачевского, проходящих через данную точку круга, отвечает кривая в мире де Ситтера. На самом деле это прямая (а именно, проективная прямая в $\mathbb{R}P^2$, не пересекающая круг модели Клейна). Эта прямая проективно двойственна исходной точке круга относительно абсолюта.

Цель настоящей статьи — выразить в этой геометрии квадратичных форм тот факт, что высоты треугольника Лобачевского пересекаются в одной точке[1)].

Пространство квадратичных форм на симплектической плоскости $\mathbb{R}^2$ (с симплектической структурой $\omega = dp \wedge dq$ в координатах Дарбу p, q) является алгеброй Ли относительно скобки Пуассона (поскольку скобка Пуассона двух квадратичных форм является квадратичной формой). Группа $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ действует линейно на пространстве $\mathbb{R}^3$ квадратичных форм, определенных в $\mathbb{R}^2$.

Начнем с интерпретации скобок Пуассона в терминах геометрии плоскости Лобачевского (состоящей из положительно определенных квадратичных «форм») и плоскости де Ситтера (состоящей из гиперболических «форм»). Операция скобки Пуассона $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ инвариантна относительно упомянутого действия группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ на $\mathbb{R}^3$.

Теорема 1. *Скобка Пуассона двух положительно определенных форм является гиперболической формой, которая отвечает прямой, соединяющей точки плоскости Лобачевского, отвечающие исходным формам.*

Таким образом, в данном случае скобка Пуассона — гиперболическая форма.

[1)] Уже много лет назад автор выразил аналогичное свойство высот евклидова треугольника в терминах тождества Якоби в алгебре Ли $\mathrm{SO}(3)$ (векторных произведений в ориентированном евклидовом трехмерном пространстве); в этом рассуждении уже содержалась теорема 4 настоящей статьи.

Доказательство. Нам потребуется явное выражение (1) для скалярного произведения квадратичных форм, полярного относительно уравнения абсолюта $\Delta = 0$, где $\Delta(\xi = ap^2 + 2bpq + cq^2) = ac - b^2$.

Полярное скалярное произведение — это симметричная билинейная форма на пространстве бинарных квадратичных форм, совпадающая с Δ на диагонали:

$$2\tilde{\Delta}(\xi', \xi'') = a'c'' + c'a'' - 2b'b''. \tag{1}$$

Скобка Пуассона эллиптических квадратичных форм $A = \alpha p^2 + \beta q^2$, $B = \gamma p^2 + \delta q^2$ равна гиперболической форме

$$\{A, B\} = 4(\alpha\delta - \beta\gamma)pq. \tag{2}$$

Соответствующая проективная прямая проходит через точки A и B, поскольку из формул (1) и (2) вытекает, что

$$\tilde{\Delta}(A, \{A, B\}) = \tilde{\Delta}(B, \{A, B\}) = 0. \tag{3}$$

Этого достаточно для доказательства теоремы 1, поскольку любые две эллиптические формы можно одновременно диагонализовать в некоторой системе симплектических координат. □

Теорема 2. *Скобка Пуассона положительно определенной формы и гиперболической формы представляется в модели Клейна прямой линией, которая ортогональна прямой, отвечающей исходной гиперболической форме, и проходит через точку, отвечающую исходной положительно определенной форме.*

Доказательство. Снова рассмотрим тождество (2); если форма A — положительно определенная, а форма B — гиперболическая, то нужно взять $\alpha\beta > 0$ и $\gamma\delta < 0$. Этот пример универсален, поскольку из теории собственных векторов мы знаем, что если форма A — положительно определенная, то можно одновременно диагонализовать A и B в некоторой системе симплектических координат.

В данном случае уравнения (3) показывают, что прямая, отвечающая форме $\{A, B\}$, содержит точку A (первое уравнение) и ортогональна прямой B (второе уравнение). Ортогональность легко следует из второго уравнения (3), но она вытекает уже из явного вида скобки Пуассона (2). Это условие ортогональности двух прямых в модели Клейна имеет следующий проективный смысл: каждая из прямых проходит через точку, двойственную второй прямой относительно абсолюта. □

Теорема 3. *Скобка Пуассона двух гиперболических форм отвечает точке пересечения двух проективных прямых, которые им соответствуют.*

Доказательство. Из теории собственных значений пары гиперболических форм вытекает[2)], что эти формы либо одновременно диагонализуются в некотором симплектическом базисе, либо приводятся к следующему виду:

$$A = p^2 - q^2, \quad B = \lambda pq.$$

[2)] Этот факт можно доказать и в геометрии Лобачевского: он означает, что пара пересекающихся прямых определяется углом между ними с точностью до движения плоскости Лобачевского.

В первом случае скобка Пуассона является гиперболической формой, и согласно тождеству (3) соответствующая точка проективной плоскости принадлежит обеим двойственным прямым.

Во втором случае вычисление скобки Пуассона дает

$$\{A, B\} = 2\lambda(p^2 + q^2); \tag{4}$$

это эллиптическая форма и потому она отвечает некоторой точке плоскости Лобачевского в модели Клейна. Эта точка принадлежит прямым, которые двойственны формам A и B, что следует из тождеств (1) и (4):

$$2\tilde{\Delta}(A, \{A, B\}) = 2\lambda - 2\lambda = 0,$$
$$2\tilde{\Delta}(B, \{A, B\}) = -2(\frac{\lambda}{2} \cdot 0) = 0. \qquad \square$$

Теорема 4. *Если три ненулевых вектора в пространстве $\mathbb{R}^3$ удовлетворяют равенству $f + g + h = 0$, то соответствующие им точки проективной плоскости лежат на одной проективной прямой, а соответствующие проективные прямые (в двойственной проективной плоскости) имеют общую точку.*

Доказательство. Если три вектора, представляющие три точки проективной плоскости, удовлетворяют соотношению $f + g + h = 0$, то между *любыми* тремя векторами, представляющими эти точки, имеется линейная зависимость. Этим доказано первое утверждение теоремы. Второе утверждение из него следует, поскольку трем точкам проективной прямой соответствуют при проективной двойственности три прямые, проходящие через точку, двойственную этой прямой. □

Задача. Пусть даны две формы, одна из которых — эллиптическая, а другая — гиперболическая. Найдите геометрическое условие в терминах этих форм, равносильное тому, что точка, отвечающая эллиптической форме, принадлежит прямой, которая отвечает гиперболической форме.

Ответ. Нулевые направления гиперболической формы должны быть взаимно ортогональны в метрике, которая определяется эллиптической формой.

Теорема 5. *Три высоты треугольника в плоскости Лобачевского принадлежат одному пучку (проективные прямые, на которых лежат высоты в модели Клейна, пересекаются в одной точке).*

Доказательство. Пусть A, B, C — *прямые*, на которых лежат стороны треугольника. Точно так же обозначим соответствующие (гиперболические) квадратичные формы. Их скобки Пуассона

$$\{A, B\} = c, \quad \{B, C\} = a, \quad \{C, A\} = b$$

— это эллиптические формы, отвечающие вершинам исходного треугольника (в силу теоремы 3).

Вершины треугольника обозначим a, b, c, причем вершина a лежит против стороны A и т. д.

Рассмотрим высоты этого треугольника. Прямая, проходящая через a и ортогональная стороне $bc = A$, согласно теореме 2 представляет «форму», отвечающую скобке Пуассона от a и A:

$$(\text{высота из } a \text{ в } A) \sim (\{\{B, C\}, A\}).$$

Таким образом, три высоты треугольника (a, b, c) *геометрически представляют три квадратичные формы*:

$$(f, g, h) = (\{\{B, C\}, A\},\ \{\{C, A\}, B\},\ \{\{A, B\}, C\}).$$

Согласно тождеству Якоби (для скобок Пуассона в алгебре Ли квадратичных форм на симплектической плоскости с координатами Дарбу (p, q)), сумма этих трех квадратичных форм равна нулевой форме: $f + g + h = 0$. Применив к этим формам теорему 4, мы заключаем, что три прямые, на которых лежат высоты, имеют общую точку в $\mathbb{R}P^2$, что доказывает теорему 5. □

Если углы треугольника (a, b, c) меньше чем $\pi/2$, то точка пересечения лежит внутри треугольника и, следовательно, принадлежит плоскости Лобачевского как части проективной плоскости[3)].

Легко построить пример треугольника (с углом, превосходящим $2\pi/3$), никакие две высоты которого не пересекаются в плоскости Лобачевского. В этом случае из теоремы 5 вытекает, что существует общая точка пересечения всех трех проективных прямых, содержащих высоты, в мире де Ситтера (или на абсолюте).

Замечание. Из нашей теоремы 5 следует также, что пересекаются в одной точке высоты *треугольников де Ситтера и смешанных треугольников*, у которых часть вершин (и сторон) принадлежит плоскости Лобачевского, а часть — миру де Ситтера (в пограничном случае вершины принадлежат абсолюту, а стороны касаются его).

Чтобы избавиться от упоминания углов в определении высот, можно называть две проективные прямые в модели Клейна ортогональными, если одна (а тогда и каждая) из них содержит точку, двойственную другой. Это совпадает с определением ортогональности на плоскости Лобачевского (если же точка пересечения принадлежит де-ситтеровской части модели Клейна, то получаем определение ортогональности в лоренцевой метрике мира де Ситтера).

Формулируя теорему о пересечении высот для де-ситтеровских или смешанных треугольников, можно устранить упоминание о геометрии Лобачевского, представив наши результаты в виде нескольких фактов элементарной проективной геометрии. С помощью тождества Якоби и других теорем из

[3)] Здесь можно заменить $\pi/2$ на $2\pi/3$ (если все углы меньше чем $2\pi/3$, то высоты треугольника пересекаются внутри круга, представляющего плоскость Лобачевского; если же угол превосходит $2\pi/3$, то существует треугольник с таким углом, высоты которого не имеют общих точек в плоскости Лобачевского).

На границе между этими случаями находятся треугольники с ортоцентром на абсолюте, изометричные треугольникам в модели Клейна с вершинами $\{x, -y, z = ixy/(1 + xy)\}$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ и как следствие $|z| \leqslant 1/2$.

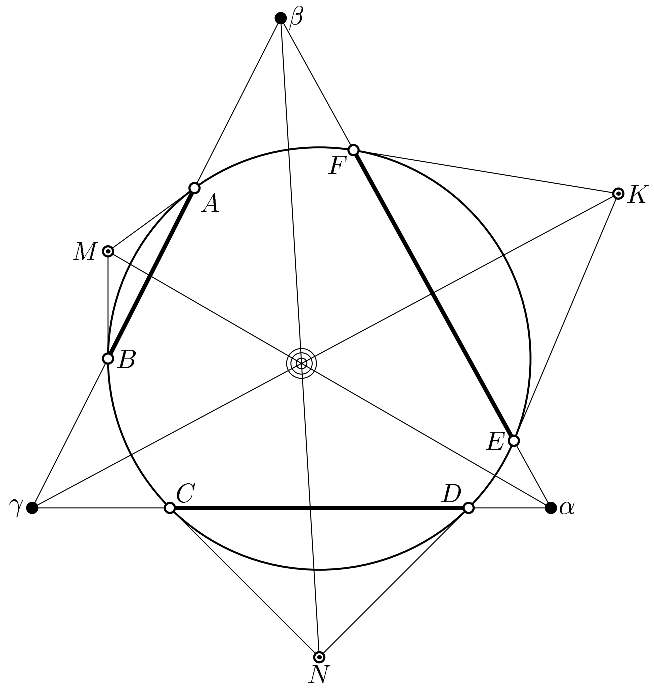

Рис. 1. *Теорема о вписанном шестиугольнике как теорема о пересечении высот в мире де Ситтера*

симплектической алгебры квадратичных форм можно получать новые результаты в проективной геометрии.

Пример. Рассмотрим три непересекающиеся прямые в плоскости Лобачевского $((AB),(CD),(EF))$. В модели Клейна им отвечают три хорды, концы которых расположены на абсолюте в следующем порядке: $(ABCDEF)$, см. рис. 1.

Построим точки пересечения этих прямых:

$$(CD\cap(EF)=\alpha,\quad (EF)\cap(AB)=\beta,\quad (AB)\cap(CD)=\gamma$$

(эти точки лежат внутри де-ситтеровской части проективной плоскости модели Клейна). Рассмотрим также двойственные им точки

$$M=(AB)^\vee,\quad N=(CD)^\vee,\quad K=(EF)^\vee$$

(в точке M пересекаются две прямые, которые касаются абсолюта в концах хорды (AB); аналогично для N и K).

Теорема о вписанном шестиугольнике. *Три прямые* (αM), (βN) *и* (γK) *пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Проективная прямая (αM) содержит высоту де-ситтеровского треугольника (α,β,γ), опущенную из точки α, поскольку точка M

двойственна стороне $(AB) = (\beta\gamma)$. Аналогично, (βN) содержит высоту, опущенную из β, а (γK) — из γ. Поэтому их пересечение в одной точке вытекает из соответствующего свойства высот де-ситтеровского треугольника $(\alpha\beta\gamma)$. $\square$

Следствие. *Три точки* $(\alpha M)^\vee$, $(\beta N)^\vee$ *и* $(\gamma K)^\vee$ *лежат на одной проективной прямой в* $\mathbb{R}P^2$.

Эти точки являются пересечением трех пар прямых: $(KN) \cap (AB)$, $(MK) \cap (CD)$ и $(NM) \cap (EF)$.

Мы видим, что теорема о вписанном шестиугольнике — еще одно геометрическое воплощение симплектического тождества Якоби, принадлежащего математической физике.

Список литературы

[1] Arnold V.I. *Arithmetics of binary quadratic forms, symmetry of their continued fractions and geometry of their de Sitter world* // Bull. of Braz. Math. Soc., New Series, Vol. 34, No 1 (2003), 1-42.

В. И. Арнольд,
CEREMADE, Université Paris-Dauphine,
Математический институт РАН имени В. А. Стеклова, Москва