Новое доказательство теоремы Морли

А. Конн

Уже 22 года я пользуюсь гостеприимством IHES (Институт Высших Научных Исследований в Бюр-сюр-Иветт под Парижем). Здесь я узнал бо́льшую часть того, что я знаю о математике, главным образом благодаря непринужденным беседам за ланчем с гостями и постоянными сотрудниками.

Впервые оказавшись в IHES, я был слишком поглощен своими собственными исследованиями и стеснялся того, что очень мало понимаю в этих беседах. Деннис Салливан позаботился обо мне и преподал мне экспресс-курс геометрии, который навсегда изменил стиль моего мышления.

Здесь же, благодаря физикам, я осознал справедливость высказывания Ж. Адамара о глубине математических концепций, пришедших из физики:

> «Бесконечно плодотворно лишь то, что проистекает из природы вещей, а не то, что проистекает из собственных размышлений (хотя так часто именно это оказывает на математика наивысшее влияние).»

* * * * * *

Чтобы передать хотя бы отчасти характерный для IHES дух дружеского соревнования, я выбрал один пример застольного разговора, который случился этой весной и привел меня к забавному новому результату.

Примерно в 1899 г. Ф. Морли доказал замечательную теорему из евклидовой геометрии треугольника:

> «В треугольнике ABC попарные пересечения α, β, γ трисектрис его углов являются вершинами правильного треугольника.»
> (См. рис. 1.)

(Кто-то упомянул эту теорему за ланчем и ошибочно приписал ее Наполеону. Бонапарт и в самом деле изучал в молодости математику, и к тому же, наряду с изучением английского языка, он учил математике сына Лас-Каза во время ссылки на о. Св. Елены.)

Я тогда услышал про теорему Морли в первый раз. Вернувшись домой, я стал над ней размышлять, следуя одному из советов Литллвуда — искать доказательства не в книгах, а в собственной голове. Помимо чистой любознательности, мною двигал очевидный честолюбивый мотив: эта теорема — одно из тех немногих достижений Бонапарта, в которых я способен с ним сравниться. После нескольких безуспешных попыток я внезапно понял, что пересечения последовательных трисектрис являются неподвижными точками вращений g_i вокруг

A New Proof of Morley's Theorem. Publ. I.H.E.S., 1998. P. 43–46. (Volume for the 40th birthday). Публикуется с любезного разрешения автора. Перевод М. Н. Вялого.

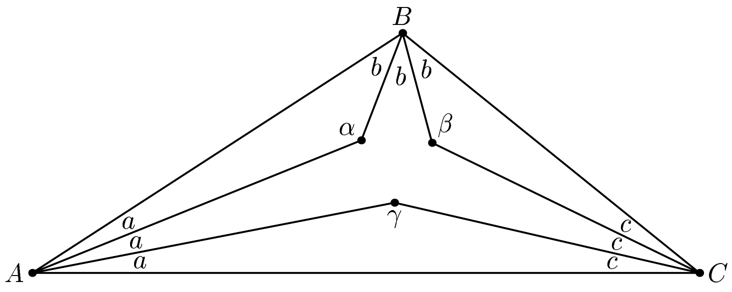

Рис. 1.

вершин треугольника (на две трети величин соответствующих углов треугольника). Далее естественно было попытаться выразить поворотную симметрию g правильного треугольника как элемент группы Γ, порожденной тремя вращениями g_i. Поскольку легко построить пример (в сферической геометрии), который показывает, что теорема Морли не выполняется в неевклидовой геометрии, конструкция должна использовать какие-то специфические свойства группы евклидовых движений.

Так что я потратил некоторое время, пытаясь найти формулу, выражающую g через g_i, благо в группе Γ легко построить множество элементов порядка 3, например $g_1g_2g_3$ (любой поворот на угол $2\pi/n$, $n \geqslant 2$, является элементом порядка n). И лишь после долгих усилий я осознал, что все они напрасны (см. ниже замечание 2), а правильная группа — аффинная группа прямой, а не группа движений плоскости.

Итак, содержанием данной заметки является концептуальное доказательство теоремы Морли как теоретико-группового свойства действия аффинной группы прямой. Оно справедливо для любого (коммутативного) поля k произвольной характеристики (хотя в характеристике 3 условию теоремы невозможно удовлетворить).

Пусть k — поле, а G — аффинная группа над k, другими словами, это группа матриц размера 2×2 и вида $g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, где $a \in k$, $a \neq 0$, $b \in k$. Построим морфизм δ из G в мультипликативную группу k^* ненулевых элементов k по правилу

$$\delta(g) = a \in k^*. \tag{1}$$

Подгруппа $T = \operatorname{Ker}\delta$ — это группа сдвигов, т. е. аддитивная группа k. Каждый элемент $g \in G$ определяет отображение

$$g(x) = ax + b, \quad x \in k, \tag{2}$$

которое при $a \neq 1$ имеет ровно одну неподвижную точку

$$\operatorname{fix}(g) = \frac{b}{1-a}\,. \tag{3}$$

Докажем следующий простой факт.

Теорема. *Пусть* $g_1, g_2, g_3 \in G$ *таковы, что* g_1g_2, g_2g_3, g_3g_1 *и* $g_1g_2g_3$ *не являются сдвигами. Обозначим* $j = \delta(g_1g_2g_3)$. *Следующие два условия эквивалентны*:

(a) $g_1^3g_2^3g_3^3 = 1$.

(b) $j^3 = 1$ *и* $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$, *где* $\alpha = \operatorname{fix}(g_1g_2)$, $\beta = \operatorname{fix}(g_2g_3)$, $\gamma = \operatorname{fix}(g_3g_1)$.

Доказательство. Обозначим $g_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Равенство $g_1^3g_2^3g_3^3 = 1$ равносильно тому, что $\delta(g_1^3g_2^3g_3^3) = 1$ и $b = 0$, где b — компонента, отвечающая сдвигу в $g_1^3g_2^3g_3^3$. Первое условие — то же самое, что $j^3 = 1$. Заметим, что $j \neq 1$ по условию теоремы. Для второго получаем

$$b = (a_1^2 + a_1 + 1)b_1 + a_1^3(a_2^2 + a_2 + 1)b_2 + (a_1a_2)^3(a_3^2 + a_3 + 1)b_3, \tag{4}$$

а после простых преобразований с учетом $a_1a_2a_3 = j$

$$b = -ja_1^2a_2(a_1 - j)(a_2 - j)(a_3 - j)(\alpha + j\beta + j^2\gamma), \tag{5}$$

где α, β, γ — неподвижные точки

$$\alpha = \frac{a_1b_2 + b_1}{1 - a_1a_2}\,, \quad \beta = \frac{a_2b_3 + b_2}{1 - a_2a_3}\,, \quad \gamma = \frac{a_3b_1 + b_3}{1 - a_3a_1}\,. \tag{6}$$

Осталось заметить, что $a_k - j \neq 0$, так как по условию теоремы попарные произведения элементов g_i не являются сдвигами.

Итак, в любой характеристике условия (a) и (b) эквивалентны.

Следствие. *Теорема Морли.*

Доказательство. Пусть $k = \mathbb{C}$, а g_1 — поворот с центром в A на угол $2a$, где$\angle BAC = 3a$, и аналогично определим g_2, g_3. Каждый g_i^3 можно представить как композицию симметрий относительно пары последовательных сторон треугольника. Поэтому $g_1^3g_2^3g_3^3 = 1$. По аналогичной причине точки $\alpha = \operatorname{fix}(g_1g_2)$, $\beta = \operatorname{fix}(g_2g_3)$, $\gamma = \operatorname{fix}(g_3g_1)$ являются пересечениями трисектрис. Из доказанной выше теоремы получаем $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$, $j^3 = 1$, что является одной из классических характеризаций правильного треугольника.

Замечание 1. Не изменяя значений кубов g_1^3, g_2^3, g_3^3, можно умножить каждое g_i на кубический корень из единицы. Это дает 18 вариантов теоремы Морли с невырожденными правильными треугольниками.

Замечание 2. Покажем, что в общем случае поворот g, переставляющий циклически точки α, β, γ, не принадлежит порожденной элементами g_1, g_2, g_3 подгруппе Γ группы G. При условиях теоремы можно считать, что в поле k есть нетривиальный кубический корень из единицы, $j^3 = 1$, так что характеристика поля не равна 3. Таким образом, поворот g выражается как

$$g = \begin{bmatrix} j & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad 3b = (1 - j)(\alpha + \beta + \gamma). \tag{7}$$

Для каждого элемента $g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ группы Γ, порожденной g_1, g_2, g_3, можно найти такие полиномы Лорана P_i от переменных a_j, что

$$b = b_1 P_1 + b_2 P_2 + b_3 P_3. \tag{8}$$

Выражая b_i через введенные выше α, β, γ

$$\begin{aligned} b_1 &= (1+j)^{-1}(a_3^{-1}(a_3 - j)\alpha - (a_1 - j)\beta + a_1(a_2 - j)\gamma), \\ b_2 &= (1+j)^{-1}(a_2(a_3 - j)\alpha + a_1^{-1}(a_1 - j)\beta - (a_2 - j)\gamma), \\ b_3 &= (1+j)^{-1}(-(a_3 - j)\alpha + a_3(a_1 - j)\beta + a_2^{-1}(a_2 - j)\gamma), \end{aligned} \tag{9}$$

получаем такие полиномы Лорана Q_i, что

$$b = (a_3 - j)\alpha Q_1 + (a_1 - j)\beta Q_2 + (a_2 - j)\gamma Q_3. \tag{10}$$

Поэтому можно считать, что мы нашли такие полиномы Лорана Q_i, что для всех $a_1, a_2, a_3 \in k^*$, для которых $a_1 a_2 a_3 = j$, и для всех $\alpha, \beta, \gamma \in k$, для которых $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$, выполняется следующее тождество

$$(1 - j)(\alpha + \beta + \gamma) = 3\big((a_3 - j)\alpha Q_1 + (a_1 - j)\beta Q_2 + (a_2 - j)\gamma Q_3\big). \tag{11}$$

Выберем теперь $a_1 = j$, $a_2 = j$, $a_3 = j^2$, $\alpha = 0$, $\beta = -j$, $\gamma = 1$ и придем к противоречию. Отсюда следует, что в общем случае $g \notin \Gamma$.

A. Connes,
Collège de France, Paris,
IHÉS, 91440 Bures-sur-Yvette, France