Рамсеевская теория узлов и зацеплений

В. В. Прасолов М. Б. Скопенков

Теорема Рамсея [8] заключается в следующем. Пусть r-элементные подмножества некоторого N-элементного множества S разбиты на два подмножества α и β. Тогда для любых данных чисел $p \geqslant r$ и $q \geqslant r$ найдется число $n(p,q,r)$ (зависящее только от p, q и r), которое обладает следующим свойством: если $N \geqslant n(p,q,r)$, то либо существует p-элементное подмножество A в S, у которого все r-элементные подмножества лежат в α, либо существует q-элементное подмножество B в S, у которого все r-элементные подмножества лежат в β.

Например, известная задача о том, что в любой компании из 6 человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых, показывает, что в качестве $n(3,3,2)$ можно взять число 6. Действительно, мы разбиваем 2-элементные подмножества следующим образом: к α относим пары знакомых, а к β относим пары незнакомых, и получаем требуемое.

Различные обобщения теоремы Рамсея составляют так называемую теорию Рамсея; этой теории посвящена книга [4].

Примером теоремы рамсеевского типа является следующее утверждение. «Для каждого натурального числа n можно выбрать число N (зависящее только от n) так, что среди любых N точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой, можно выбрать n точек, являющихся вершинами выпуклого многоугольника.» (Это — задача 22.7 из книги [1]; по ходу решения этой задачи доказывается теорема Рамсея.)

В последние годы стали появляться теоремы рамсеевского типа в теории узлов и зацеплений. (Узлы и зацепления были темой номера 3-го выпуска «Математического просвещения»; к нему можно обратиться за необходимыми определениями.) Первая теорема такого типа, доказанная независимо Заксом [9] и Конвеем и Гордоном [3], обсуждалась в предыдущем выпуске «Математического просвещения» в статье [2]. Напомним ее формулировку: «Для любого вложения графа K_6 в трехмерное пространство в нём найдется пара зацепленных циклов.» Конвей и Гордон доказали также, что для любого вложения графа K_7 в трехмерное пространство в нём найдется нетривиальный узел. (Здесь и далее используются следующие стандартные обозначения: K_n — граф с n вершинами, любые две из которых соединены ребром, так называемый *полный* граф с n вершинами; $K_{m,n}$ — граф с n вершинами одного цвета и m вершинами другого цвета, причем любые две вершины разного цвета соединены ребром.) Пример применения этих теорем приведён в статье [10].

В нашей статье обсуждаются следующие две более общие теоремы рамсеевского типа о возможности вписать данный узел (зацепление) в произвольный

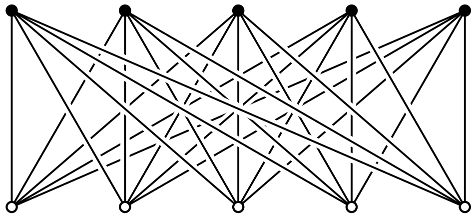

Рис. 1. *Положительный набор точек*

набор точек в пространстве, который содержит достаточно много точек в общем положении (это означает, что никакие 4 точки не лежат в одной плоскости). Будем говорить, что данный узел *вписан* в данное множество точек в трехмерном пространстве, если существует замкнутая ломаная с вершинами в данных точках, представляющая данный узел. Для зацеплений определение аналогично.

Теорема 1. (*Негами* [6, 7]) *Для любого узла (зацепления) можно выбрать натуральное число N так, что в любое множество из N точек в общем положении в пространстве $\mathbb{R}^3$ можно вписать данный узел (зацепление).*

Можно также рассматривать множества точек, раскрашенных в два цвета, и при этом рассматривать только ломаные, все звенья которых имеют разноцветные вершины. В такой ситуации верно следующее утверждение.

Теорема 2. (*Миёчи* [5]) *Для любого узла (зацепления) можно выбрать натуральное число N так, что в любое множество N красных и N синих точек в общем положении можно вписать данный узел (зацепление).*

Теорема Негами очевидным образом следует из теоремы Миёчи. Но, как это часто бывает, удобнее доказывать именно теорему Миёчи. В этом доказательстве важную роль играет понятие *положительного* набора точек. Чтобы определить это понятие, мы фиксируем плоскость, на которую все проекции данного набора точек различны и при этом все точки набора лежат выше этой плоскости, и будем рассматривать проекции отрезков, соединяющих данные точки, а для пересекающихся отрезков будем отмечать, какой из них проходит выше. Набор из n красных точек и n синих точек (в общем положении) называют положительным, если для любых двух синих точек B_1, B_2 и любых двух красных точек R_1, R_2 проекции отрезков B_1R_1 и B_2R_2 или проекции отрезков B_1R_2 и B_2R_1 пересекаются во внутренней точке, причем при движении от синего конца к красному по отрезку, который проходит выше, синий конец нижнего отрезка остается слева (рис. 1).

Схема доказательства следующая. Сначала доказываем, что для любого n можно выбрать $N = R(n)$ так, что из любого набора N синих и N красных точек можно выбрать n синих и n красных точек, образующих положительный (или отрицательный) набор. Затем доказываем, что положительный набор точек можно перевести (так, чтобы в процессе движения точек соединяющие их отрезки не пересекались во внутренних точках) в стандартное положение, для которого есть две скрещивающиеся прямые, синяя и красная, и все синие точки лежат на синей прямой, а все красные точки — на красной. Наконец, доказываем *лемму о двух спицах*[1]: для любого узла (зацепления) можно выбрать число n так, что данный узел (зацепление) можно вписать в множество из n красных точек на красной прямой и n синих точек на синей прямой.

1. Выбор положительного подмножества точек

Назовем набор n красных и n синих точек в пространстве в общем положении *нейтральным*, если проекции на выделенную плоскость любых двух отрезков с разноцветными концами не пересекаются (во внутренних точках).

Легко видеть, что если $n \geqslant 3$, то набор точек не может быть нейтральным. Действительно, предположим, что на плоскости заданы синие точки B_1, B_2, B_3 и красные точки R_1, R_2, R_3 (в общем положении) так, что отрезки с разноцветными концами не пересекаются во внутренних точках. Тогда $R_1B_1R_2B_2R_3B_3$ — замкнутая несамопересекающаяся ломаная. Легко видеть, что по крайней мере две из диагоналей R_1B_2, R_2B_3 и R_3B_1 лежат внутри этой ломаной. Действительно, пусть, например, диагональ R_1B_2 внешняя. Тогда все данные точки лежат по одну сторону от прямой R_1B_2, а в таком случае диагонали R_2B_3 и R_3B_1 внутренние. Эти внутренние диагонали пересекаются, поскольку точки R_2 и B_3 лежат по разные стороны от прямой R_3B_1. Приходим к противоречию.

Таким образом, достаточно доказать, что *для любого n можно выбрать число $R(n)$ так, что любой набор $R(n)$ синих и $R(n)$ красных точек общего положения содержит либо положительный, либо отрицательный, либо нейтральный набор n синих и n красных точек*. Для этого нам нужен небольшой экскурс в рамсеевскую теорию графов.

Теорема 3. *Для любых m_1, m_2, m_3 и n_1, n_2, n_3 можно выбрать число $R = R(m_1, n_1, m_2, n_2, m_3, n_3)$ так, что для любой раскраски треугольников с вершинами в $R - 1$ синих и R красных точках цветами* 1, 2, 3 *для некоторого цвета i можно выделить m_i красных точек и n_i синих точек так, что все треугольники с вершинами в выделенных точках имеют цвет i.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся более простые утверждения о раскрасках графов, которые мы сейчас докажем.

Теорема 4. а) *Для любых m и n можно выбрать число $R = R(m, n)$ так, что для любой раскраски ребер полного графа K_R в два цвета можно выделить либо подграф K_m с ребрами первого цвета, либо подграф K_n с ребрами второго цвета.*

б) *Для любых l, m и n можно выбрать число $R = R(l, m, n)$ так, что для любой раскраски ребер полного графа K_R в три цвета можно выделить либо подграф K_l с ребрами первого цвета, либо подграф K_m с вершинами второго цвета, либо подграф K_n с вершинами третьего цвета.*

[1] Об этой лемме мы узнали от И. Дынникова.

Доказательство. а) Ясно, что в качестве $R(m,2)$ можно взять m, поскольку либо все рёбра первого цвета, либо есть хотя бы одно ребро второго цвета. Аналогично в качестве $R(2,n)$ можно взять n. Если же $m,n>2$, то

$$R(m,n) \leqslant R(m-1,n)+R(m,n-1)+1.$$

Действительно, рассмотрим полный граф с $R(m-1,n)+R(m,n-1)+1$ вершинами и выделим в нём вершину A. Из нее выходит $R(m-1,n)+R(m,n-1)$ ребер, поэтому из нее выходит либо $R(m-1,n)$ ребер первого цвета, либо $R(m,n-1)$ ребер второго цвета. Пусть для определенности из вершины A выходит $R(m-1,n)$ ребер первого цвета. Тогда в полном графе с вершинами в концах этих ребер (отличных от A) можно выделить либо полный подграф с $m-1$ вершинами, все рёбра которого имеют первый цвет, либо полный подграф с n вершинами, все рёбра которого имеют второй цвет. Во втором случае мы уже получили требуемое, а в первом случае к выделенным $m-1$ вершинам нужно добавить вершину A.

б) Прежде всего заметим, что $R(2,m,n)=R(m,n)$, поскольку либо есть ребро первого цвета, либо все рёбра имеют второй или третий цвет. Далее, если $l,m,n>2$, то

$$R(l,m,n) \leqslant R(l-1,m,n)+R(l,m-1,n)+R(l,m,n-1).$$

Это доказывается точно так же, как и утверждение а).

Теперь мы готовы к доказательству теоремы 3. Применим индукцию по $\sum n_i + \sum m_i$. Если $m_i=1$ или $n_i=0$, то доказывать нечего, поскольку i-е множество рассматриваемых треугольников пусто. Докажем теперь, что

$$R(m_1,n_1,m_2,n_2,m_3,n_3) \leqslant R(l,m,n)+1,$$

где $R(l,m,n)$ — число из теоремы 4б) для $l=R(m_1,n_1-1,m_2,n_2,m_3,n_3)$, $m=R(m_1,n_1,m_2,n_2-1,m_3,n_3)$ и $n=R(m_1,n_1,m_2,n_2,m_3,n_3-1)$. Действительно, рассмотрим полный граф с вершинами в красных точках и окрасим каждое его ребро R_iR_j одним из трех цветов в соответствии с цветом треугольника $B_1R_iR_j$, где B_1 — фиксированная синяя вершина. К этому графу можно применить теорему 4б). В результате получим, например, что можно выделить $R(m_1,n_1-1,m_2,n_2,m_3,n_3)$ красных вершин так, что все соединяющие их рёбра окрашены первым цветом. Выберем произвольно еще столько же синих точек, отличных от B_1. По предположению индукции возможны три варианта:

1) можно выбрать m_1 красных точек и n_1-1 синих так, что все треугольники с вершинами в выбранных точках имеют первый цвет;

2) можно выбрать m_2 красных точек и n_2 синих так, что все треугольники с вершинами в выбранных точках имеют второй цвет;

3) можно выбрать m_3 красных точек и n_3 синих так, что все треугольники с вершинами в выбранных точках имеют третий цвет.

В первом случае к выбранным точкам добавляем точку B_1, а в двух остальных сразу же получаем требуемое.

Теперь мы уже можем доказать сформулированное на с. 110 утверждение: для любого n можно выбрать число $R(n)$ так, что любой набор $R(n)$ синих и

$R(n)$ красных точек общего положения содержит либо положительный, либо отрицательный, либо нейтральный набор n синих и n красных точек. Для этого покрасим каждый тетраэдр вида $B_1B_2R_1R_2$ в один из трех цветов в соответствии с тем, положительна, отрицательна или нейтральна четверка B_1, B_2, R_1, R_2. Нужно доказать, что для каждого n можно выбрать число $R(n)$ так, что при любой такой раскраске можно выделить n синих и n красных точек так, что все тетраэдры с вершинами в выделенных точках окрашены одним цветом. Это доказывается аналогично теореме 3.

2. Стандартный вид положительного набора точек

Докажем, что любой положительный набор n красных и n синих точек можно перевести в стандартное положение (так, чтобы в процессе движения точек соединяющие их отрезки не пересекались во внутренних точках). Для этого мы сначала последовательно докажем некоторые свойства положительных наборов точек.

1) Все проекции синих точек лежат по одну сторону от проекции любой прямой, соединяющей пару красных точек.

Предположим, что проекции синих точек B_1 и B_2 лежат по разные стороны от проекции прямой, соединяющей красные точки R_1 и R_2. Тогда проекции отрезков B_1R_1 и B_2R_2 не пересекаются и проекции отрезков B_1R_2 и B_2R_1 тоже не пересекаются. Это противоречит определению положительного набора точек.

Будем говорить, что $R_1 > R_2$, если при движении от R_1 к R_2 проекции всех синих точек остаются справа.

2) Если $R_1 > R_2$ и $R_2 > R_3$, то $R_1 > R_3$.

Предположим, что $R_1 > R_2 > R_3 > R_1$, и придем к противоречию. По предположению при обходе проекции треугольника $R_1R_2R_3$ все синие точки остаются справа. Легко проверить, что это возможно лишь в том случае, когда обход происходит по часовой стрелке и при этом проекции всех синих точек расположены внутри треугольника $R_1R_2R_3$. Синих точек у нас столько же, сколько красных, поэтому есть по крайней мере две синие точки. Проведем через их проекции прямую. Проекции двух из красных точек R_1, R_2, R_3 лежат по разные стороны от этой прямой, и мы получаем противоречие, как и при доказательстве свойства 1.

3) Пусть проекции отрезков R_1B_1 и R_2B_2 пересекаются, причем отрезок R_1B_1 лежит выше (ниже) отрезка R_2B_2. Тогда $R_1 > R_2$ $(R_1 < R_2)$.

Пусть отрезок R_1B_1 лежит выше отрезка R_2B_2. Рассматриваемый набор точек положителен, поэтому при движении от B_1 к R_1 проекция точки B_2 остается слева. Значит, при движении от R_1 к R_2 точка B_2 остается справа, т. е. $R_1 > R_2$. Случай, когда отрезок R_1B_1 лежит ниже отрезка R_2B_2, рассматривается аналогично.

4) Красные и синие отрезки можно занумеровать так, что если $i < j$ и $k \neq l$, то либо проекции отрезков R_iB_k и R_jB_l не пересекаются, либо отрезок R_iB_k лежит выше отрезка R_jB_l.

Согласно свойству 2 красные точки можно занумеровать так, что $R_1 > R_2 > \dots > R_n$. Свойство 3 показывает, что эта нумерация — искомая.

Воспользовавшись свойством 4, положительный набор точек легко привести к стандартному виду. Занумеруем красные точки так, как указано в этом свойстве. Отрезки с концом R_1 лежат выше всех других отрезков, поэтому точку R_1 можно поднять сколь угодно высоко (над плоскостью проекции). Затем точку R_2 можно поднять намного выше всех точек, кроме первой, и т. д. При этом можно позаботиться о том, чтобы точки $R_3, \dots, R_n$ попали на прямую R_1R_2 (эту прямую можно выбрать заранее, направив ее почти вертикально).

Красные точки теперь расположены так, как нужно. После этого остается повторить то же самое для синих точек.

3. Лемма о двух спицах

Доказательство леммы о двух спицах начнем с того, что выберем для данного узла диаграмму, которая представляет собой ломаную со звеньями двух направлений — горизонтального и вертикального. Этого легко добиться, аппроксимируя гладкую кривую ломаной с горизонтальными и вертикальными звеньями.

Затем каждый перекресток, на котором горизонтальное звено проходит ниже вертикального, преобразуем так, как показано на рис. 2. После этого мы получим диаграмму с вертикальными и горизонтальными звеньями, у которой на всех перекрестках горизонтальные звенья проходят над вертикальными.

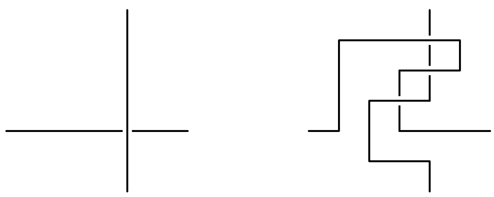

Рис. 2. *Преобразование перекрестка*

Малым шевелением диаграммы можно добиться, чтобы никакие два горизонтальных звена диаграммы не лежали на одной прямой и никакие два вертикальных звена тоже не лежали на одной прямой.

Полученному «прямоугольному» представлению узла сопоставим узел на двух спицах следующим образом. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — координаты вертикальных звеньев, а $y_1, \dots, y_n$ — координаты горизонтальных звеньев (рис. 3а). (Количество горизонтальных звеньев, как и количество вертикальных звеньев, в два раза меньше количества вершин.) Проведем горизонтальную прямую и вертикальную прямую так, чтобы вертикальная прямая проходила выше (рис. 3б). На горизонтальной прямой отметим точки с координатами $x_1, \dots, x_n$, а на вертикальной прямой — точки с координатами $y_1, \dots, y_n$. Пару точек на разных

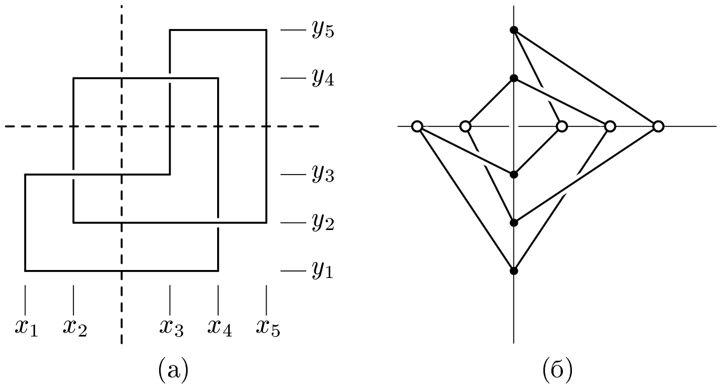

Рис. 3. *Узел на двух спицах*

прямых мы соединяем отрезком, если существует вершина диаграммы с координатами (x_i, y_j). Всего получаем $2n$ отрезков: из каждой отмеченной точки выходят два отрезка.

Остается показать, что полученный в результате узел, натянутый на две спицы, — это исходный узел. Это легко сделать, если рассмотреть полуплоскости, проходящие через вертикальную прямую и отмеченные точки на горизонтальной прямой (вместе эти полуплоскости похожи на страницы раскрытой книги). Мы можем свободно деформировать отрезки в каждой полуплоскости, и это позволяет получить прямоугольное представление узла. Действительно, сначала в каждой рассматриваемой полуплоскости продеформируем соответствующую пару звеньев так, как показано на рис. 4. Затем уберем отрезки, которые проходятся дважды (рис. 5).

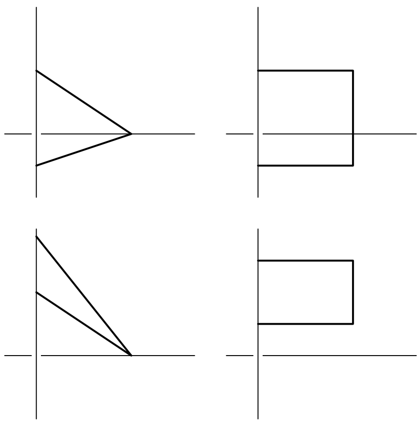

Рис. 4. *Деформация пары звеньев*

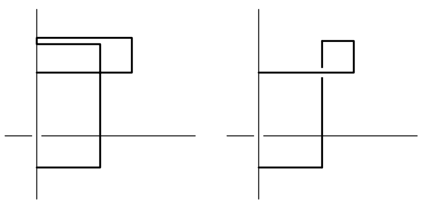

Рис. 5. *Лишние отрезки*

Список литературы

[1] Прасолов В. В. *Задачи по планиметрии*. М.: МЦНМО, 2001.

[2] Прасолов В. В. *Прямоугольники на прямой и вложения листа Мёбиуса* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 8. 2004. С. 127–131.

[3] Conway J. H., Gordon C. McA. *Knots and links in spatial graphs* // J. Graph Theory, 1983. Vol. 7. P. 445–453.

[4] Graham R. L., Rothschild B. L., Spencer J. H. *Ramsey theory*. Wiley, 1980.

[5] Miyauchi M. S. *Topological Ramsey theorem for complete bipartite graphs* // J. Comb. Theory, Ser. B, 1994. Vol. 62. P. 164–179.

[6] Negami S. *Ramsey theorems for knots, links and spatial graphs* // Trans. Amer. Math. Soc., 1991. Vol. 324. P. 527–541.

[7] Negami S. *Ramsey-type theorem for spatial graphs* // J. Comb. Theory, Ser. B, 1998. Vol. 72. P. 53–62.

[8] Ramsey F. P. *On a problem of formal logic* // Proc. London Math. Soc., 2nd series, 1930. Vol. 30. P. 264–286.

[9] Sachs H. *On a spatial analogue of Kuratowski's theorem on planar graphs — an open problem* // Lecture Notes Math., vol. 1018. Springer, 1982. P. 231–240.

[10] Skopenkov M. *Embedding products of graphs into Euclidean spaces* // Fund. Math., 2003. Vol. 179. P. 191–198.

Прасолов Виктор Васильевич. Независимый московский университет.
E-mail: `prasolov@mccme.ru`
Homepage: `www.mccme.ru/prasolov`
Скопенков Михаил Борисович, студент 5 курса мехмата МГУ.
E-mail: `stepank@mccme.ru`