Вокруг критерия Куратовского планарности графов

А. Б. Скопенков *

Повторяя слова,
Лишенные всякого смысла,
Но без напряженья...

Б. Гребенщиков, «Плоскость»

Формулировка критерия Куратовского планарности графов хорошо известна (все необходимые понятия и эта формулировка напоминаются в начале заметки). Доказательства этого критерия, приводимые в большинстве книг, либо длинны, либо трудны. В этой заметке мы приведем простое доказательство критерия Куратовского. Оно принадлежит Юрию Макарычеву [14] (который придумал это доказательство, еще будучи школьником!) и использует некоторые идеи из [20, §5]. На русском языке это доказательство (с некоторыми модификациями) приведено в [5, §1.1]. В настоящей заметке приведено немного более ясное изложение доказательства [5], в котором также устранены мелкие неточности. В приложении «запрещенные подсистемы» приводятся формулировки близких к критерию Куратовского результатов.

Выражаю благодарность М. Н. Вялому, А. А. Заславскому и В. В. Прасолову за полезные замечания и обсуждения, а также Б. Мохару и С. В. Матвееву за предоставленные ссылки.

Напоминание: планарные графы

Графом (точнее, неориентированным графом без петель и кратных ребер) называется конечное множество V, некоторые двухэлементные подмножества (т. е. неупорядоченные пары) которого выделены. Элементы множества V называются *вершинами* графа и обычно изображаются точками (например, на плоскости). Выделенные пары вершин называются *ребрами* графа и обычно изображаются ломаными (или кривыми), соединяющими соответствующие точки. На изображении ломаные могут пересекаться, но точки пересечения (кроме двух концов ребра) не являются вершинами.

*Частично поддержан Стипендией Московского Государственного Университета для молодых преподавателей и ученых, Российским Фондом Фундаментальных Исследований, грантами №02–01–00014 и №01–01–00583, Грантом Президента РФ поддержки научных школ НШ–1988.2003.1 и программой РАН «Современные проблемы теоретической математики».

Графы G_1 и G_2 называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение f множества V_1 вершин графа G_1 на множество V_2 вершин графа G_2, удовлетворяющее условию: вершины $A, B \in V_1$ соединены ребром в том и только в том случае, если вершины $f(A), f(B) \in V_2$ соединены ребром.

Степенью вершины графа называется число выходящих из нее ребер.

Грубо говоря, *подграф* данного графа — это его часть. Формально, граф G называется *подграфом* графа H, если множество вершин графа G содержится в множестве вершин графа H и каждое ребро графа G является ребром графа H. При этом две вершины графа G, соединенные ребром в графе H, не обязательно соединены ребром в графе G.

Путем в графе называется конечная последовательность вершин, в которой ни одна вершина не повторяется и любые две соседние вершины соединены ребром. *Циклом* называется путь, в котором первая и последняя вершины соединены ребром. Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путем. Граф называется *деревом*, если он связен и не содержит циклов.

Операция *подразделения ребра* графа показана на рис. 1. Два графа называются *гомеоморфными*, если от одного можно перейти к другому при помощи операций подразделения ребра и обратных к ним. Или, эквивалентно, если существует граф G, полученный из обоих данных графов операциями подразделения ребра.

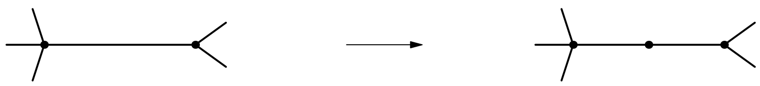


Рис. 1.

Граф называется *планарным*, если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы внутренности ребер (т.е. ребра без их концов) не пересекались и не самопересекались.

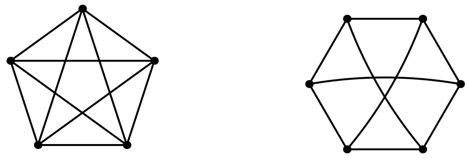
Например, любое дерево и любой граф, образованный вершинами и ребрами некоторого многогранника — планарные.

Ясно, что любой подграф планарного графа планарен. Ясно также, что гомеоморфные графы являются или не являются планарными одновременно.

Еще в XVIII веке Леонард Эйлер доказал, что графы K_5 и $K_{3,3}$ (рис. 2) не являются планарными. Это можно доказать путем небольшого перебора с использованием следующей теоремы [5, §1, Теорема 1.3].

Теорема Жордана. *Замкнутая несамопересекающаяся кривая* (*т.е. цикл*) *делит плоскость ровно на две части.* (*При этом одна часть ограничена, другая неограничена, причем две точки плоскости, не принадлежащие кривой, лежат в одной части тогда и только тогда, когда их можно соединить ломаной, не пересекающей кривой*).

Обсуждение и доказательство этой теоремы см., например, в [1].



K_5 $K_{3,3}$

Рис. 2.

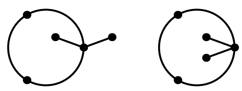


Рис. 3.

Из теоремы Жордана следует, что *любой нарисованный на плоскости без самопересечений граф разбивает плоскость на конечное число связных частей.* Эти части называются *гранями* изображения графа на плоскости. Часто такое изображение называют просто графом, но это неточно, поскольку один и тот же планарный граф можно нарисовать на плоскости разными способами (рис. 3). Более точный термин — *плоский граф.*

Формула Эйлера. *Для (изображения на плоскости) связного планарного графа с V вершинами, E ребрами и F гранями имеем $V - E + F = 2$.*

Доказательство и применения этой теоремы см., например, в [5].

Приведем более изящное (но по сути, аналогичное вышеуказанному) доказательство непланарности графа K_5, основанное на формуле Эйлера. Пусть граф K_5 нарисован на плоскости без самопересечений. Тогда по формуле Эйлера $5 - 10 + F = 2$. Значит, $F = 7$. Построим около каждого ребра графа K_5, нарисованного на плоскости, стрелку вправо и стрелку влево. Тогда число стрелок равно $2E = 20$. Но поскольку граница каждой грани состоит не менее чем из трех ребер, то число стрелок не меньше $3F = 21 > 20$. Противоречие. Основываясь на этой идее, можно доказать непланарность графа $K_{3,3}$ (упражнение).

Доказательство непланарности графа K_5, основанное на понятии коэффициента пересечения, можно найти в [2], [5, §1].

Теорема Куратовского. *Граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графу K_5 или $K_{3,3}$ (рис. 2).*

Эта теорема была объявлена также замечательным советским математиком Львом Семеновичем Понтрягиным (доказательство не опубликовано), а также Фринком и Смитом. Поэтому иногда ее называют теоремой Понтрягина–Куратовского. В 1920-е годы Карл Менгер объявил, что *граф, степень каждой вершины которого равна* 3, *является плоским тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графу $K_{3,3}$.* Читатель может попытаться самостоятельно доказать этот факт (вытекающий из теоремы Куратовского), не опираясь на теорему Куратовского. Кроме теоремы Куратовского, существует много других критериев планарности графов [20]. Огромный интерес к поиску критерия планарности графов объясняется, в частности, наличием одной из величайших математических гипотез — гипотезы четырех красок [5, §1].

1. Простое доказательство критерия Куратовского

Необходимость в теореме Куратовского уже доказана. Приведем доказательство достаточности. Предположим, напротив, что существует непланарный граф, не содержащий подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$. Среди всех таких графов выберем граф G *с минимальным числом ребер*.

Доказательство теоремы Куратовского состоит из следующих трех шагов. Для их формулировки напомним следующие определения. *θ-графом* называется граф, гомеоморфный букве θ (т. е. графу $K_{3,2}$). Утверждение «*граф G содержит подграф, гомеоморфный графу H*» будем сокращенно записывать в виде «$G \supset H$». Операции *удаления ребра* $G \to G - e$, *стягивания ребра* $G \to G/e$ и *удаления вершины* $G \to G - x$ определены на рис. 4.

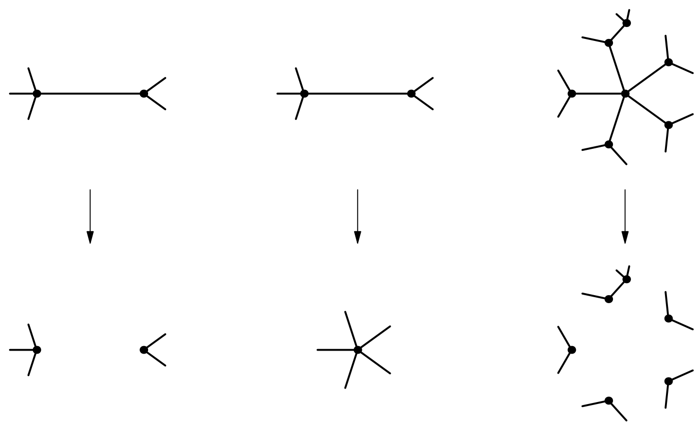


Рис. 4.

Шаг 1 (самый простой). Из каждой вершины графа $G - x - y$ выходит не менее двух ребер.

Шаг 2 (самый важный). Для любого ребра xy графа G выполнено

$$G - x - y \not\supset \theta.$$

Шаг 3 (самый красивый). Граф G изоморфен K_5 или $K_{3,3}$.

Из шага 3 получается противоречие, завершающее доказательство.

Доказательство шага 1. В графе $G - x - y$ нет изолированных вершин, поскольку от изолированной вершины графа $G - x - y$ в графе G отходит не более двух ребер, что невозможно.

В графе $G - x - y$ нет и висячих вершин. Действительно, если p — висячая вершина, то она соединена и с x, и с y, поскольку в графе G из каждой вершины выходит не менее трех ребер. Граф $G - (xy)$ планарен по минимальности графа G. Нарисуем граф $G - (xy)$ на плоскости без самопересечений и «подрисуем» ребро xy вдоль ребер px и py. Получим изображение графа G на плоскости без самопересечений. Противоречие.

Доказательство шага 2. Несложно убедиться, что *граф G/xy планарен.* Действительно, если $G/xy \supset K_{3,3}$, то $G \supset K_{3,3}$, а если $G/xy \supset K_5$, то $G \supset K_5$ или $G \supset K_{3,3}$ (рис. 5). Поэтому планарность графа G/xy следует из минимальности графа G.

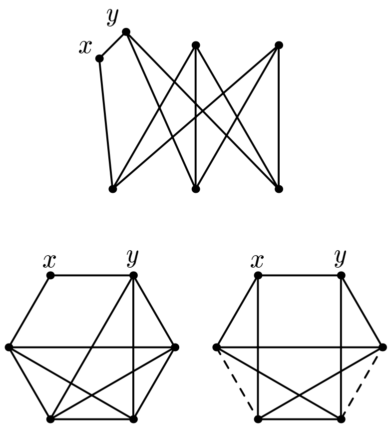


Рис. 5.

Нарисуем без самопересечений на плоскости граф G/xy (рис. 6). Покрасим в белый цвет ребра графа G/xy, выходящие из вершины xy. Изображение графа $G-x-y = G/xy-xy$ на плоскости получается стиранием белых ребер. Покрасим в черный цвет границу B той грани (изображения) графа $G/xy - xy$, которая содержит вершину xy графа G/xy. Заметим, что

граница грани не может содержать θ-подграфа.

(Это утверждение можно вывести из теоремы Жордана. Другое доказательство получается от противного: если граница грани содержит θ-подграф, то можно взять точку внутри этой грани и соединить ее тремя ребрами с тремя точками на трех «дугах» θ-подграфа. Получится изображение графа $K_{3,3}$ на плоскости без самопересечений. Противоречие.)

Поэтому достаточно доказать, что в графе G/xy все ребра либо белые, либо черные. Пусть это не так. Тогда неокрашенные ребра находятся в грани графа $G/xy - xy$, не содержащей вершины xy. Значит, граф B из черных ребер разбивает плоскость не менее чем на две на части. Поэтому найдется цикл C из черных ребер, относительно которого вершина xy лежит (не уменьшая общности) внутри, а некоторое еще не покрашенное ребро — вне.

Покрасим в красный цвет все ребра графа G/xy, лежащие вне цикла C. Оставшиеся ребра графа G/xy покрасим в оранжевый цвет. Заметим, что красные ребра обязательно присутствуют, а оранжевых может не быть.

Построенная раскраска графа G/xy порождает раскраску графа G (ребро xy красится в белый цвет). Граф $G - R$, полученный из графа G удалением красных ребер, можно нарисовать на плоскости без самопересечений (рис. 7), так как G — минимальный непланарный. Можно считать, что на этом рисунке

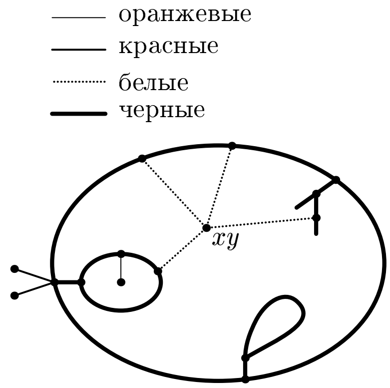


Рис. 6.

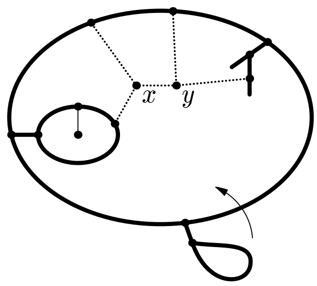


Рис. 7.

белые ребра лежат внутри черного цикла C. Поскольку объединение B черных ребер — граница грани, то оно не содержит θ-подграфа. Значит, каждая компонента связности графа $B - C$ пересекается с C не более чем по одной точке. Поэтому можно перекинуть каждую компоненту связности графа $B - C$ (вместе с оранжевыми ребрами) внутрь цикла C. Будем считать далее, что $B - C$ и все оранжевые ребра лежат внутри цикла C. Нарисовав красные ребра вне C, как для изображения графа G/xy (рис. 6), получим вложение графа G в плоскость. Полученное противоречие доказывает, что $G - x - y$ есть граница грани и поэтому не содержит θ-подграфа.

Доказательство шага 3. Из шагов 1 и 2 следует, что граф $G - x - y$ представляет собой одно или несколько «деревьев», «вершинами» которых служат циклы; при этом из каждой вершины выходит не менее двух ребер (рис. 8). Поэтому в графе $G - x - y$ существует «висячий» цикл, т. е. цикл C, имеющий с остальным графом только одну общую вершину v. В этом цикле C есть еще по крайней мере две вершины p и q. Так как в графе G нет вершин, из которых выходит менее трех ребер, то каждая из этих вершин p и q соединена либо с x, либо с y. Поэтому в объединении цикла C и ребер, соединяющих вершины x, y, p, q, можно выделить θ-подграф. Значит, по шагу 2 каждое ребро графа $G - x - y$ имеет конец на цикле C. Поскольку граф $G - x - y$ не содержит висячих вершин, то он совпадает с циклом C.

Поскольку в графе G из каждой вершины выходит не менее трех ребер, то любая вершина цикла $G - x - y$ соединена либо с x, либо с y.

Если вершина u цикла $G - x - y$ соединена с x и не соединена с y, то соседняя с u вершина v цикла не соединена с x (поскольку в противном случае граф $G - vx$ планарен по минимальности графа G, значит, мы можем добавить ребро vx к вложенному в плоскость графу $G - vx$ и получить вложение в плоскость графа G). Поэтому либо

– любая вершина цикла $G - x - y$ соединена в G и с x, и с y, либо

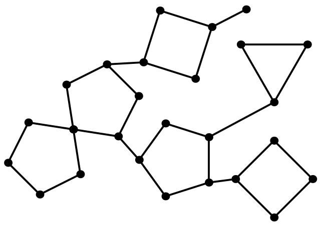


Рис. 8.

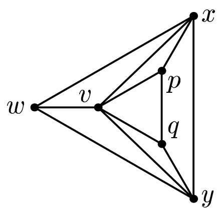


Рис. 9.

– вершины цикла $G-x-y$, соединенные с x и соединенные с y, чередуются вдоль этого цикла.

В первом случае $G=K_5$, во втором $G=K_{3,3}$. □

Заметим, что в доказательстве из [5, 1.1] имеются следующие неточности. На с. 23 не доказано, что «граф F разбивает плоскость не более чем на две части» — ведь граница грани может разбивать плоскость более чем на две части (рис. 8). На с. 24 не доказано, что «любая вершина цикла C_1 соединена ребром с вершиной x или с вершиной y» — ведь эта вершина цикла C_1 может соединяться с другими вершинами графа $G-x-y$. На с. 25 не доказано, что «тогда граф G имеет такой вид, как на рис. 11» — ведь вершины цикла C могут соединяться ребрами и с x, и с y. В конце доказательства леммы 3 из [14] не объяснено, почему G является 3-призмой, а не подграфом графа на рис. 9. Все указанные неточности несущественны и легко устраняются (см. доказательство в настоящей заметке).

Задача. Придумайте алгоритм распознавания планарности графа, основанный на приведённом доказательстве, и оцените его сложность. Для этого может пригодиться следующее изменение приведённого доказательства, не содержащее предположения о противном и поэтому не включающее работы с несуществующими объектами. Граф, полученный из графа G произвольной последовательностью операций удаления ребра или вершины или стягивания ребра, называется *минором* графа G. Ясно, что минор планарного графа планарен. Можно доказывать теорему Куратовского в эквивалентной формулировке, полученной из следующего факта: *граф не содержит подграфа, гомеоморфного K_5 или $K_{3,3}$ $\Leftrightarrow$ граф не имеет минора, изоморфного K_5 или $K_{3,3}$*. Пусть G — *непланарный граф, любой минор которого планарен.* Достаточно доказать, что G изоморфен K_5 или $K_{3,3}$, что делается аналогично приведённым выше рассуждениям.

Приложение: запрещенные подсистемы

Если некоторая подсистема системы N не реализуема в другой системе M, то и N не реализуема в M. Естественная идея — попытаться найти список «запрещенных» систем $N_1,\dots,N_k$, не реализуемых в M, со следующим свойством:

для того, чтобы система N была реализуема в M необходимо и достаточно, чтобы N не содержала ни одной из этих «запрещенных» подсистем.

Классический пример теоремы такого рода — теорема Куратовского. В терминах запрещеных подсистем можно также описать много других классов графов (или более общих обьектов).

Например, так можно описать графы, вложимые в данное 2-многообразие [17]. Однако список запрещенных подграфов для вложимости графа в лист Мёбиуса содержит целых 103 графа [11]. Даже существование такого конечного списка для произвольного 2-многообразия имеет очень длинное доказательство [7, 17]. Поэтому интересны и другие способы проверки вложимости графов в плоскость и другие 2-многообразия.

Так же можно описать графы и даже пеановские континуумы, *базисно* вложимые в $\mathbb{R}^2$ [13, 19].

Приведем формулировки некоторых других результатов (доказательства оставляем читателю в качестве задач). Те формулировки, в которых встречаются неизвестные читателю объекты, он может игнорировать.

Теорема Шартрана – Харари. *Граф G можно нарисовать на плоскости без самопересечений так, чтобы он был границей некоторой* одной *грани, тогда и только тогда, когда G не содержит θ-подграфа.*

Назовем несамопересекающийся цикл C в связном графе G *граничным*, если существует изображение без самопересечений графа G на плоскости, при котором цикл C изображается границей некоторой грани. Следующий результат можно вывести из теоремы Куратовского.

Относительная версия теоремы Куратовского. *Цикл C является граничным тогда и только тогда, когда граф G планарен и цикл C не содержится в подграфе графа G, как на рис.* 10 *или* 11.

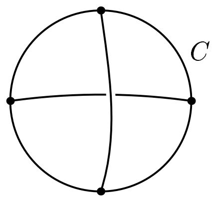


Рис. 10.

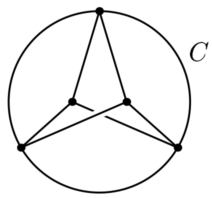


Рис. 11.

А вот следующий результат проще доказывать, не используя теорему Куратовского.

Теорема о 8 и θ. *Пусть в графе G для каждой вершины указан циклический порядок выходящих из нее ребер. Граф G с указанными циклическими порядками можно изобразить без самопересечений на плоскости так, чтобы для каждой вершины обход выходящих из нее ребер по часовой стрелке совпадал бы с указанным циклическим порядком, тогда и только тогда, когда G не содержит «восьмерки» или «буквы θ», циклические порядки на которых заданы рис.* 12.

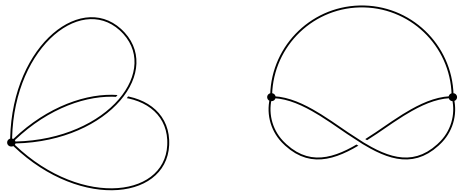


Рис. 12.

Два вложения (т. е. изображения без самопересечений) f, g одного и того же графа в плоскость называются *изотопными*, если одно можно так непрерывно продеформировать в другое, чтобы в процессе деформации мы всё время имели бы вложение (формальное определение см., например, в [4, 5]).

Теорема Маклейна – Эдкиссона. *Два вложения связного графа в плоскость изотопны тогда и только тогда, когда их сужения на любой несамопересекающийся цикл и на любой триод изотопны* (*т. е. не таковы, как на рис.* 13) [16].

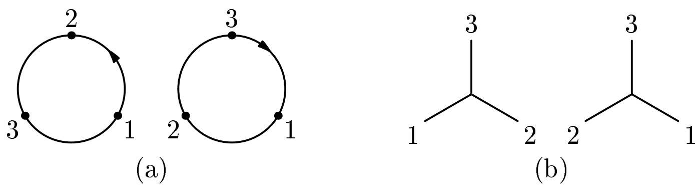


Рис. 13.

Эту теорему удобно сначала доказать для деревьев, а потом свести общий случай к случаю деревьев путем выделения максимального дерева. Теорема Маклейна – Эдкиссона справедлива также для полиэдра или даже пеановского континуума G.

Теорема Маклейна – Эдкиссона (без утверждения в скобках) справедлива для вложений в сферу, тор и другие *ориентируемые* 2-многообразия (доказательство аналогично). Заметим, что любая изотопия графа на 2-многообразии объемлема [С. В. Матвеев, частное сообщение].

Теорема Баэра – Эпштейна. *Две замкнутые несамопересекающиеся кривые на* 2*-многообразии гомотопны тогда и только тогда, когда они изотопны* [10].

Теорема Баэра – Эпштейна сводит вопрос о классификации вложений окружности в 2-многообразие N (и, тем самым, произвольного графа в ориентируемое 2-многообразие) к вопросу о реализуемости элементов $\pi_1(N)$ вложенными окружностями. Но последний вопрос очень сложен.

Задача. (a) Сформулируйте и докажите аналог этой теоремы для вложений в сферу.

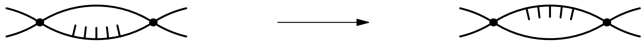


Рис. 14.

(b) Приведем другое описание вложений графов в плоскость с точностью до изотопии. Граф называется (вершинно) *k-связным*, если он остается связным после удаления любой $k-1$ вершины и распадается после удаления некоторых k вершин. Докажите следующие *теоремы Уитни* [21].

Любое вложение произвольного трехсвязного графа в сферу может быть получено из любого другого композицией изотопии и осевых симметрий.

Любое вложение двусвязного графа в сферу может быть получено из любого другого композицией изотопии и «переворачиваний блоков» (рис. 14).

Определите операции, при помощи которых можно получить любое вложение 1-связного ($\Leftrightarrow$ связного) графа в сферу из любого другого. Сделайте то же и для 0-связного ($\Leftrightarrow$ произвольного) графа. Таким образом получится описание всех вложений графа в сферу (с точностью до изотопности).

Полиэдр (синоним: тело симплициального комплекса) — это многомерный аналог графа. Формальное определение см., например, в [5, §8]. Уже двумерные полиэдры — интересные и сложные объекты, про которые имеется несколько знаменитых и очень трудных нерешенных проблем [4]. Поэтому удивительно, что имеется следующий результат.

Теорема Халина – Юнга. *Полиэдр вложим в сферу S^2 тогда и только тогда, когда он не содержит графов K_5, $K_{3,3}$ или «зонтика» U^2 (рис.* 2 *и* 15*)* [12, 15].

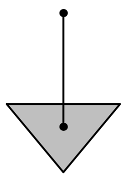


Рис. 15.

В этом результате интересна лишь часть «тогда» и лишь для двумерных полиэдров. Она может быть несложно доказана по следующему плану. Пусть связный 2-полиэдр $N \not\cong S^2$ не содержит K_5, $K_{3,3}$ или U^2. Рассмотрим объединение $\bar{N}$ двумерных граней 2-полиэдра N. Поскольку каждый из графов K_5 и $K_{3,3}$ вложим и в тор, и в лист Мёбиуса, то $\bar{N}$ есть несвязное объединение дисков. Заменим каждый диск на «колесо». Полученный граф планарен. По вложению этого графа в плоскость легко построить вложение полиэдра N в плоскость. Это доказательство (видимо, являющееся фольклорным) проще представленного в [12] и тем более в [15].

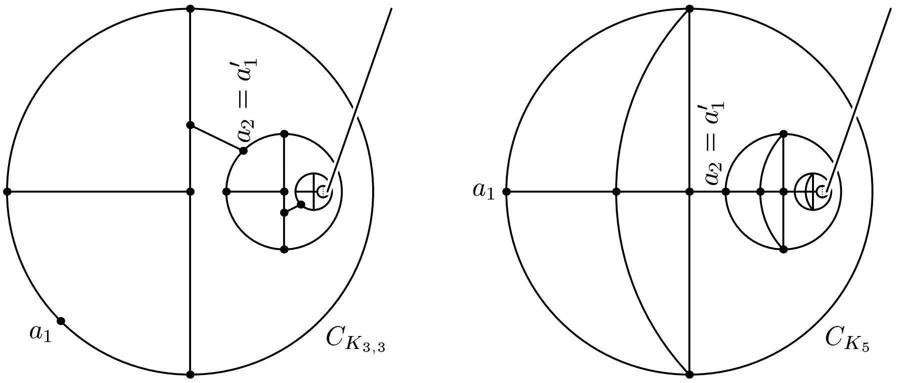


Рис. 16.

В терминах запрещенных подсистем можно также описать «компактно бесконечные графы» (т. е. локально связные континуумы), вложимые в плоскость. *Континуум* — компактное связное метрическое пространство. Континуумы естественно появляются при изучении динамических систем (даже гладких!). Континуум называется *локально связным* (или континуумом Пеано), если для любых его точки x и ее окрестности U существует такая меньшая окрестность V точки x, что любые две точки из V соединяются некоторым путем, целиком лежащим в U (или, эквивалентно, если он является непрерывным образом дуги). Локально связные континуумы могут быть очень сложно устроены [3]. Поэтому удивительно, что имеется следующий результат.

Теорема Клэйтора. *Локально связный континуум вложим в сферу S^2 тогда и только тогда, когда он не содержит континуумов K_5, $K_{3,3}$, C_{K_5} и $C_{K_{3,3}}$* (*рис.* 16) [8, 9].

Построение локально связных континуумов C_{K_5} и $C_{K_{3,3}}$. Возьмем ребро ab графа K_5 и отметим на нём новую вершину a'. Пусть $P = K_5 - (aa')$. Пусть P_n копия графа P. Обозначим через a_n и a'_n вершины графа P_n, соответствующие a и a'. Тогда

$$C_{K_5} = (P_1 \bigcup_{a'_1=a_2} P_2 \bigcup_{a'_2=a_3} P_3 \dots) \bigcup_{x=0} I,$$

где $\{P_n\}$ — последовательность графов на плоскости со стремящимися к нулю диаметрами, сходящаяся к точке $x \notin \sqcup_{n=1}^{\infty} P_n$. Точно так же можно определить континуум $C_{K_{3,3}}$, взяв вначале $K_{3,3}$ вместо K_5.

Доказательство невложимости в теореме Клэйтора. Докажем невложимость континуума C_{K_5} (доказательство невложимости континуума $C_{K_{3,3}}$ аналогично). Пусть, напротив, $f : C_{K_5} \to \mathbb{R}^2$ — вложение. Для окружности $C \subset C_{K_5}$ и подмножества $X \subset C_{K_5} - C$ обозначим через $C * X$ утверждение

«fX *лежит вне* fC».

Пусть S_n — окружность в P_n, составленная из ребер, не содержащих вершин a_n и a'_n. Так как S_n сходится к $x = 0$, то $S_n * 1$ для достаточно большого n. Так как fI — путь между $f0$ и $f1$, лежащий вне fS_n, то $S_n * 0$. Так как S_n сходится к $x = 0$, то $S_n * S_m$ и $S_m * S_l$ для достаточно больших $m < l$. Но тогда $S_m * \{a_m, a'_m\}$, а это противоречит тому факту, что для любого вложения $g : P \to \mathbb{R}^2$ точки ga и ga' лежат по разные стороны от образа gS. $\square$

Отметим, что в теореме Куратовского можно заменить $\mathbb{R}^2$ на S^2, а в теореме Маклейна–Эдкиссона — нет.

Заметим, что не существует конечного списка запрещенных полиэдров для вложимости 2-мерного полиэдра в $\mathbb{R}^3$ или n-мерного полиэдра в $\mathbb{R}^{2n}$, где $n \geqslant 2$ [18]. Поэтому приходится рассматривать другие препятствия к вложимости. Интересно, что одно из самых полезных препятствий строится с помощью *конфигурационного пространства* упорядоченных пар различных точек данного пространства [6].

Список литературы

[1] Аносов Д. В. *Отображения окружности, векторные поля и их применения.* М.: МЦНМО, 2003.

[2] Болтянский В. Г., Ефремович В. А. *Наглядная топология.* М.: Наука, 1982.

[3] Куратовский К. *Топология.* М.: Мир, 1969. Т. 1, 2.

[4] Матвеев С. В., Фоменко А. Т. *Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии.* М.: Наука, 1990.

[5] Прасолов В. В. *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии.* М.: МЦНМО, 2004.

[6] Реповш Д., Скопенков А. *Новые результаты о вложениях полиэдров и многообразий в евклидовы пространства* // УМН, 1999. Т. 54, №6. С. 61–109.

[7] Archdeacon D., Huneke P. *A Kuratowski theorem for non-orientable surfaces* // J. Comb. Th., Ser. B, 1989. Vol. 46. P. 173–231.

[8] Claytor S. *Topological immersions of peanian continua in a spherical surface* // Ann. of Math., 1934. Vol. 35. P. 809–835.

[9] Claytor S. *Peanian continua not embeddable in a spherical surface* // Ann. of Math., 1937. Vol. 38. P. 631–646.

[10] Epstein D. B. A. *Curves on 2-manifolds and isotopies* // Acta Math., 1966. Vol. 38. P. 83–107.

[11] Glover H. H., Huneke J. P., Wang C. S. 103 *graphs that are irreducible for the projective plane* // J. Comb. Th., 1979. Vol. 27, no 3. P. 332–370.

[12] Halin R., Jung H. A. *Karakterisierung der Komplexe der Ebene und der 2-Sphäre* // Arch. Math., 1964. Vol. 15. P. 466–469.

[13] Kurlin V. A. *Basic embeddings into products of graphs* // Topol. Appl., 2000. Vol 102. P. 113–137.

[14] Makarychev Yu. *A short proof of Kuratowski's graph planarity criterion* // J. of Graph Theory, 1997. Vol. 25. P. 129–131.

[15] Mardešić S., Segal J. *ε-mappings and generalized manifolds* // Michigan Math. J., 1967. Vol. 14. P. 171–182.

[16] McLane S., Adkisson V. W. *Extensions of homeomorphisms on the spheres* // Michig. Lect. Topol. Ann Arbor, 1941. P. 223–230.

[17] Robertson N., Seymour P. D. *Graph minors VIII, A Kuratowski graph theorem for general surfaces* // J. Comb. Theory, ser. B, 1990. Vol 48. P. 255–288.

[18] Sarkaria K. S. *Kuratowski complexes* // Topology, 1991. Vol. 30. P. 67–76.

[19] Skopenkov A. *A description of continua basically embeddable in $\mathbb{R}^2$* // Topol. Appl., 1995. Vol. 65. P. 29–48.

[20] Thomassen C. *Kuratowski's theorem* // J. Graph. Theory, 1981. Vol. 5. P. 225–242.

[21] Whitney H. *Planar graphs* // Fund. Math., 1933. Vol. 21. P. 73–84.

А. Б. Скопенков, механико-математический факультет МГУ,
Независимый Московский Университет
E-mail: `skopenko@mccme.ru`