Об описанных окружностях чевианных и педальных треугольников и некоторых кривых, связанных с треугольником

Е. Д. Куланин

Покажем, что для любой точки окружности Эйлера произвольного треугольника существует семейство окружностей, проходящих через эту точку, аналогичное «семейству Фейербаха» из одноименной статьи Л. А. Емельянова и Т. Л. Емельяновой в №6 «Математического просвещения».

Гипербола, действительная и мнимая полуоси которой равны, называется *равносторонней.* Асимптоты равносторонней гиперболы взаимно перпендикулярны, поэтому их можно принять за оси прямоугольной системы координат, в которой ее уравнение запишется в виде $xy = k$. Таким образом, обычная школьная гипербола, совпадающая с графиком обратно пропорциональной зависимости $y = k/x$, является равносторонней. Пара перпендикулярных прямых также является равносторонней гиперболой.

Если коника (кривая второго порядка) задана уравнением $Q(x, y) = 0$, где

$$Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f,$$

то она является равносторонней гиперболой тогда и только тогда, когда $a+c = 0$.

Из теоремы о пучке коник, проходящих через четыре точки [4], следует, что в общем случае есть ровно одна равносторонняя гипербола, проходящая через четыре заданные точки.

Исключением являются четверки точек, образованные вершинами треугольника и его ортоцентром, и четверки точек, лежащие на одной прямой. Любая коника, проходящая через вершины треугольника и его ортоцентр, является равносторонней гиперболой. Справедливо и обратное:

Предложение 1. *Ортоцентр любого треугольника, вписанного в равностороннюю гиперболу, лежит на этой же гиперболе.*

Подробнее об этих фактах см. [1, с. 149].

Пусть D — точка в плоскости треугольника ABC, A_1, B_1, C_1 — пересечения прямых DA, DB, DC с прямыми BC, CA, AB соответственно. Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 называются *чевианами.* Будем называть треугольник $A_1B_1C_1$ *чевианным треугольником* точки D относительно треугольника ABC, а окружность, описанную около чевианного треугольника, — *чевианной.*

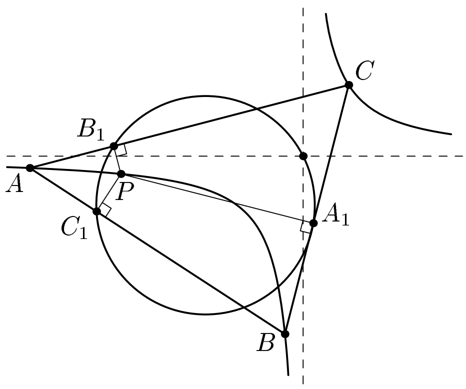

Рис. 1.

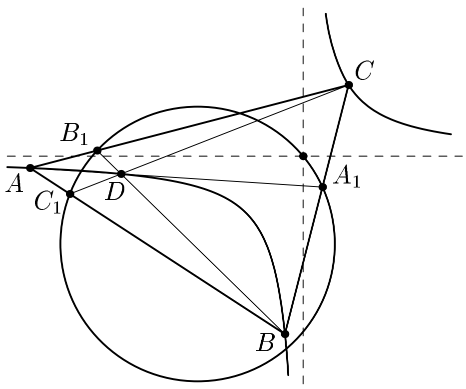

Рис. 2.

Пусть P — точка в плоскости треугольника ABC, A_1, B_1, C_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC, CA, AB соответственно. Тогда треугольник $A_1B_1C_1$ называется *педальным треугольником* точки P относительно треугольника ABC. Если точка P совпадает с одной из вершин треугольника ABC, то педальный треугольник этой точки вырождается в высоту, проходящую через эту вершину. Для точек описанной окружности педальный треугольник также вырождается: основания перпендикуляров лежат на одной прямой, которая называется *прямой Симсона.*

Окружность, описанную около педального треугольника, будем называть *педальной.*

Равносторонние гиперболы, описанные около треугольника, оказываются связанными с педальными и чевианными окружностями (см. рис. 1 и рис. 2).

Теорема 1. *Пусть P — произвольная точка равносторонней гиперболы, отличная от точек A, B, C той же гиперболы. Тогда педальная окружность точки P относительно треугольника ABC проходит через центр этой гиперболы.*

Теорема 2. *Пусть A, B, C, D — точки на равносторонней гиперболе. Тогда чевианная окружность точки D относительно треугольника ABC проходит через центр этой гиперболы.*

В следующих двух разделах мы докажем теоремы 1 и 2.

1. Окружности, описанные около педального треугольника

В этом разделе мы доказываем теорему 1. Следующий хорошо известный факт читателю предлагается проверить самостоятельно.

Упражнение 1. Обозначим через AH_1, BH_2, CH_3 высоты непрямоугольного треугольника ABC. Докажите, что треугольники AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2

подобны треугольнику ABC с коэффициентами подобия $|\cos\angle A|$, $|\cos\angle B|$, $|\cos\angle C|$ соответственно.

Лемма 1. *Центры всех равносторонних гипербол, проходящих через вершины треугольника ABC, лежат на окружности Эйлера (окружности девяти точек) этого треугольника.*

Доказательство. Приведем доказательство, принадлежащее А. Акопяну.

Пусть D — четвертая (кроме A, B, C) точка пересечения гиперболы и описанной около треугольника ABC окружности, A', B', C', D' — ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB, ABC, которые по предложению 1 лежат на той же гиперболе. Обозначим через R радиус описанной около треугольника ABC окружности. Используя упражнение 1, получаем

$$CD' = 2R\big|\cos\angle BCA\big| = 2R\big|\cos\angle BDA\big| = DC'.$$

Так как $CD' \parallel DC'$, то $CDC'D'$ — параллелограмм, т. е. $C'D' \parallel CD$ и $C'D' = CD$. Следовательно, четырехугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ центрально симметричны. Их центр симметрии является центром гиперболы. При этом он совпадает с серединой отрезка DD' и, значит, лежит на окружности Эйлера треугольника ABC (а также треугольников BCD, CDA и DAB). □

Из леммы 1 вытекает

Следствие 1. *Для любых четырех точек, ни одна из которых не совпадает с ортоцентром треугольника с вершинами в трех остальных точках, окружности Эйлера четырех треугольников с вершинами в любых трех из этих четырех точек имеют общую точку.*

Лемма 2. *Отрезок, соединяющий середину одной из сторон треугольника с основанием высоты, лежащей на другой его стороне, виден из одной из двух остальных середин сторон под углом, равным тому углу треугольника, на сторонах которого лежат эта последняя середина и основание высоты.*

Доказательство. Отрезок H_2M_1 является медианой прямоугольного треугольника BH_2C, проведенной из вершины прямого угла H_2 (рис. 3), поэтому

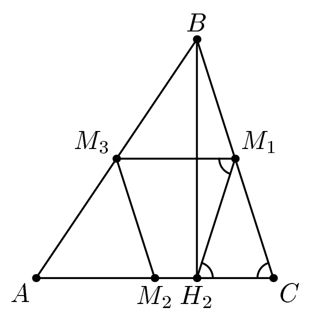

Рис. 3.

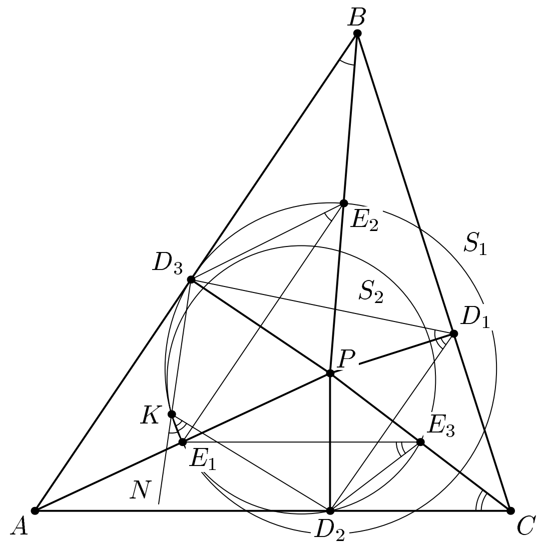

Рис. 4.

$H_2M_1 = CM_1$ и $\angle M_1H_2C = \angle M_1CH_2$, но $M_1M_3 \parallel AC$ как средняя линия треугольника ABC, откуда получаем $\angle M_3M_1H_2 = \angle M_1H_2C = \angle M_1CH_2 = \angle ACB$, что и требовалось. □

Теорема 3. *Пусть P — точка, отличная от центра описанной окружности и ортоцентра треугольника ABC. Тогда педальная окружность точки P проходит через точку пересечения окружностей Эйлера треугольников ABC, APB, BPC, CPA.*

Доказательство. Обозначим через E_1, E_2, E_3 середины отрезков AP, BP, CP, а через D_1, D_2, D_3 — проекции точки P на стороны BC, CA, AB соответственно (рис. 4). Пусть K — вторая точка пересечения окружностей Эйлера S_1 и S_2 треугольников APB и APC (отличная от E_1). Поскольку у четырех окружностей Эйлера, о которых идет речь в теореме, согласно следствию 1 есть общая точка, то это точка K. Поэтому достаточно показать, что точка K лежит на описанной окружности $D_1D_2D_3$. Рассмотрим угол NKD_2, смежный с углом D_2KD_3, и докажем, что $\angle NKD_2 = \angle D_2D_1D_3$. Тогда

$$\angle D_2D_1D_3 + \angle D_2KD_3 = \angle D_2D_1D_3 + 180^\circ - \angle NKD_2 = 180^\circ,$$

а это и означает, что точки K, D_1, D_2, D_3 лежат на одной окружности. Действительно, $\angle NKD_2 = \angle NKE_1 + \angle E_1KD_2$, но $\angle NKE_1 = \angle D_3E_2E_1$, поскольку четырехугольник $D_3E_2E_1K$ вписан в окружность S_1, а $\angle E_1KD_2 = \angle E_1E_3D_2$, как вписанные, опирающиеся на дугу E_1D_2 окружности S_2. В свою очередь по лемме 2 имеем $\angle D_3E_2E_1 = \angle ABP = \angle D_3BP$, $\angle E_1E_3D_2 = \angle ACP = \angle D_2CP$. Так как $\angle PD_1B = \angle PD_3B = 90^\circ$, то около четырехугольника D_1BD_3P можно описать окружность, откуда получаем, что $\angle D_3BP = \angle D_3D_1P$. Аналогично,

$\angle D_2CP = \angle D_2D_1P$. Итак,

$$\angle NKD_2 = \angle NKE_1 + \angle E_1KD_2 = \angle D_3E_2E_1 + \angle E_1E_3D_2 = \\ = \angle D_3BP + \angle D_2CP = \angle D_3D_1P + \angle D_2D_1P = \angle D_2D_1D_3,$$

что и требовалось. Другие случаи взаимного расположения точек A, B, C и P рассматриваются аналогично. □

Так как точка пересечения окружностей Эйлера треугольников ABC, BPC, CPA совпадает с центром равносторонней гиперболы, проведенной через точки A, B, C, P, то из теоремы 3 вытекает теорема 1.

Отметим еще одно следствие теорем 1 и 2.

Следствие 2. *Одна из точек пересечения чевианной и педальной окружностей произвольной точки P, отличной от вершин треугольника ABC, лежит на окружности Эйлера этого треугольника.*

Доказательство. Проведем через точки A, B, C и P равностороннюю гиперболу Γ_P. Тогда по теореме 2 чевианная окружность точки P проходит через центр K гиперболы Γ_P, лежащий на окружности Эйлера треугольника ABC, а согласно теореме 1 педальная окружность точки P также проходит через центр K этой гиперболы. □

2. Окружности, описанные около чевианного треугольника

Автору было известно только аналитическое доказательство теоремы 2. А. Заславскому и А. Акопяну удалось придумать геометрическое доказательство этой теоремы, которое приводится ниже.

Лемма 3. *Пусть даны два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. A', B', C' — точки пересечения, соответственно, B_1C_1 и B_2C_2, C_1A_1 и C_2A_2, A_1B_1 и A_2B_2. Если треугольник $A'B'C'$ перспективен как треугольнику $A_1B_1C_1$, так и треугольнику $A_2B_2C_2$ (с центрами перспективы D_1 и D_2), то точки A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2 лежат на одной конике.*

Доказательство. Рассмотрим проективное преобразование, переводящее четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ в квадрат. Точка A' лежит на пересечении прямых B_1C_1 и A_1D_1, точка C' — на пересечении прямых A_1B_1 и D_1C_1. Поэтому точки A' и C' при этом преобразовании переходят в бесконечно удаленные точки, соответствующие перпендикулярным направлениям, а четырехугольник $A_2B_2C_2D_2$ переходит в прямоугольник со сторонами, параллельными сторонам квадрата. Кроме того, центром как квадрата, так и прямоугольника будет образ точки B'. Очевидно, что коника, проходящая через вершины квадрата и одну вершину прямоугольника, проходит и через три остальные вершины прямоугольника. □

Теорема 4. *Пусть дан треугольник ABC и точка P, отличная от его ортоцентра. Тогда центры вписанной и вневписанных окружностей чевианного* *треугольника P относительно ABC лежат на равносторонней гиперболе, проходящей через A, B, C, P.*

Доказательство. Пусть $A'B'C'$ — чевианный треугольник точки P, I — центр его вписанной окружности, I_1, I_2, I_3 — центры вневписанных окружностей. Тогда треугольники ABC и $I_1I_2I_3$ удовлетворяют условиям леммы — они перспективны треугольнику $A'B'C'$ с центрами перспективы P и I соответственно. Следовательно, точки A, B, C, P, I_1, I_2, I_3, I лежат на одной конике. Эта коника является равносторонней гиперболой, поскольку I — ортоцентр треугольника $I_1I_2I_3$, □

Доказательство теоремы 2. По теореме 4 центры вневписанных окружностей чевианного треугольника I_1, I_2, I_3 лежат на гиперболе. Так как чевианная окружность является окружностью Эйлера треугольника $I_1I_2I_3$ (вершины чевианного треугольника — основания высот треугольника $I_1I_2I_3$), то по лемме 1 она проходит через центр гиперболы. □

3. Еще раз о семействе Фейербаха

Покажем теперь, как из теоремы 2 следует результат о «семействе Фейербаха», полученный Л. Емельяновым и Т. Емельяновой. Проведем через вершины A, B, C треугольника ABC и центр I вписанной в него окружности равностороннюю гиперболу Γ_I. Обозначим через J точку Жергонна, а через N — точку Нагеля, т. е. точку пересечения чевиан, основаниями которых служат точки касания вневписанных окружностей со сторонами (а не с продолжениями сторон) треугольника ABC. Напомним, что для точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой, выражение $(AC/BC) : (AD/BD)$ называется двойным отношением и обозначается $(ABCD)$. При этом отношение AC/BC считается положительным, если точка C лежит на отрезке AB, и отрицательным в противном случае. Говорят, что точки A, B, C, D образуют гармоническую четверку, если их двойное отношение равно -1. Проведем из вершины A треугольника ABC биссектрисы AL и AL_1 внутреннего и внешнего углов при вершине A соответственно. Тогда точки B, C, L, L_1 образуют гармоническую четверку. В самом деле, по свойствам биссектрис внутреннего и внешнего угла треугольника $BL/LC = AB/BC$, $BL_1/L_1C = -AB/AC$, откуда $(ABCD) = -1$.

Пусть I — центр вписанной, а I_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC треугольника ABC, L — основание биссектрисы AL, I'_a, I' и A' — прямоугольные проекции точек I_a, I, A на сторону BC. В треугольнике ABL отрезки AI и AI_a являются биссектрисами внутреннего и внешнего углов при вершине A, поэтому четверка A, L, I, I_a — гармоническая. Так как при параллельном проектировании двойное отношение сохраняется, то точки A', L, I', I'_a также образуют гармоническую четверку, а соответствующие лучи AA', AL, AI', AI'_a — гармонический пучок. Ясно, что на сторонах CA и AB треугольника ABC располагаются еще две аналогичные гармонические четверки, которым соответствуют гармонические пучки лучей, исходящих из вершин B и C. Это означает, что ортоцентр H и точки I, J, N проектируются из каждой вершины треугольника ABC четырьмя лучами, образующими гармонический пучок. Поэтому точки H, I, J, N лежат на кривой второго порядка, проходящей через вершины треугольника ABC.

Но любая кривая второго порядка, которая проходит через вершины треугольника и его ортоцентр, является равносторонней гиперболой, т. е. совпадает в данном случае с гиперболой Γ_I. Таким образом, мы доказали, что точки J и N лежат на гиперболе Γ_I. Тогда описанная окружность чевианного треугольника точки J, совпадающая с вписанной окружностью треугольника ABC, проходит по теореме 2 через центр гиперболы Γ_I, лежащий согласно лемме 1 на окружности Эйлера треугольника ABC. Но по теореме Фейербаха вписанная окружность касается окружности Эйлера, т. е. имеет с ней единственную общую точку F, поэтому центр гиперболы Γ_I совпадает с точкой Фейербаха F.

Итак, описанная окружность чевианного треугольника любой точки, лежащей на Γ_I, проходит через точку F. В частности, окружность, описанная около оснований биссектрис треугольника ABC, проходит через F. Поскольку точка Нагеля N лежит на Γ_I, то точки касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника ABC и точка F также лежат на одной окружности, которую мы будем обозначать через S_I.

Лемма 4. *Рассмотрим треугольник ABC, вписанный в равностороннюю гиперболу Γ. Пусть X — точка пересечения касательных к гиперболе Γ, проведенных в вершинах A и C треугольника ABC, Y — в вершинах A и C, и Z — в вершинах A и B; P — произвольная точка гиперболы Γ, отличная от A, B, C; $P_1 = AP \cap BC$, $P_2 = BP \cap AC$, $P_3 = CP \cap AB$. Тогда прямые P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2 проходят через точки X, Y, Z соответственно.*

Доказательство. Рассмотрим вырожденный вписанный шестиугольник $BBACCP$. Тогда $X = BB \cap CC$, $P_3 = BA \cap CP$, $P_2 = AC \cap PB$ и по теореме Паскаля точки X, P_3, P_2 лежат на одной прямой. Аналогично показывается, что прямые P_3P_1 и P_1P_2 проходят через точки Y и Z соответственно. $\square$

Так как ортоцентр треугольника ABC лежит на любой равносторонней гиперболе, описанной около треугольника ABC, то прямые, содержащие стороны его ортоцентрического треугольника, проходят через точки X, Y, Z. Другими словами, точки X, Y, Z лежат на прямых, содержащих стороны ортоцентрического треугольника и для их определения достаточно найти точки пересечения прямых, содержащих стороны чевианного треугольника точки P, с соответствующими прямыми, содержащими стороны ортоцентрического треугольника ABC.

Легко видеть, что в случае $\Gamma = \Gamma_I$ точки X, Y, Z совпадают с полюсами A_{00}, B_{00}, C_{00} из статьи Емельяновых.

Лемма 5. *Если равносторонние гиперболы, описанные около треугольника ABC, имеют общий центр, то они совпадают.*

Доказательство. Пусть D — точка, симметричная одной из вершин треугольника ABC относительно общего центра гипербол и отличная от ортоцентра ABC. Тогда равносторонние гиперболы Γ_1 и Γ_2 имеют 4 общие точки A, B,

C, D, ни одна из которых не является ортоцентром треугольника с вершинами в трех остальных, и поэтому совпадают. □

Теорема 5. *Пусть P — точка, отличная от вершин A, B, C треугольника ABC; AP_1, BP_2, CP_3 — чевианы, пересекающиеся в точке P; H_1, H_2, H_3 — основания высот AH_1, BH_2, CH_3 треугольника ABC; $X = P_2P_3 \cap H_2H_3$, $Y = P_1P_3 \cap H_1H_3$, $Z = P_1P_2 \cap H_1H_2$; Γ_P — равносторонняя гипербола, проведенная через точки A, B, C, P; AT_1, BT_2, CT_3 — чевианы, пересекающиеся в точке T, причем прямые T_2T_3, T_1T_3, T_1T_2 проходят через точки X, Y, Z соответственно. Тогда точка T лежит на гиперболе Γ_P.*

Доказательство. Проведем через точки A, B, C, T равностороннюю гиперболу Γ_T. По лемме 4 точки X, Y, Z совпадают с точками пересечения соответствующих касательных к гиперболам Γ_P и Γ_T в вершинах A, B, C треугольника ABC, т.е. гиперболы Γ_P и Γ_T имеют общие касательные в точках A, B, C. Обозначим через M_1, M_2, M_3 середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC. Тогда прямые M_1X, M_2Y, M_3Z пересекаются в центре гипербол Γ_P и Γ_T. Так как гиперболы Γ_P и Γ_T имеют общий центр, то по лемме 5 они совпадают. Таким образом, точка T лежит на гиперболе Γ_P. □

Следствие 3. *В случае, когда точка P из теоремы 5 совпадает с центром I вписанной окружности треугольника ABC, все точки T, удовлетворяющие условию теоремы 5, лежат на равносторонней гиперболе Γ_I с центром в точке Фейербаха F треугольника ABC.*

Заметим, что в следствии 3 говорится о тех точках T, описанная окружность чевианного треугольника которых принадлежит «семейству Фейербаха» из статьи Емельяновых.

Обозначим через I_a, I_b, I_c центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, CA, AB треугольника ABC, а через F_a, F_b, F_c — точки касания вневписанных окружностей с центрами I_a, I_b, I_c с окружностью Эйлера треугольника ABC.

Следствие 4. *Если точка P из теоремы 5 совпадает соответственно с точками I_a, I_b, I_c, то все точки T, удовлетворяющие условиям теоремы 5, лежат соответственно на равносторонних гиперболах $\Gamma_{I_a}, \Gamma_{I_b}, \Gamma_{I_c}$ с центрами в точках F_a, F_b, F_c.*

Пусть A_a, B_a, C_a — точки касания вневписанной окружности с центром I_a треугольника ABC с прямыми BC, CA, AB соответственно. Аналогично определим A_b, B_b, C_b и A_c, B_c, C_c, и пусть A_I, B_I, C_I — точки касания вписанной окружности I с этими же прямыми в той же последовательности. Как было показано выше, точки A_a, B_b, C_c и F лежат на одной окружности S_I.

Задача 1. Докажите, что каждая из следующих трех четверок точек: A_I, B_c, C_b, F_a; A_c, B_I, C_a, F_b; A_b, B_a, C_I, F_c лежит на одной окружности.

Обозначим эти окружности через S_a, S_b, S_c соответственно. Будем в дальнейшем называть окружности S_I, S_a, S_b, S_c окружностями четырех точек треугольника ABC. Из полученных результатов следует

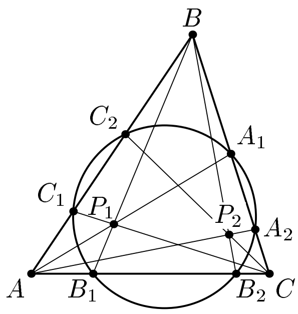

Рис. 5.

Теорема 6. *Шестнадцать точек касания вписанной и трех вневписанных окружностей треугольника с прямыми, содержащими стороны этого треугольника, и его окружностью Эйлера лежат на четырех других окружностях по четыре точки на каждой окружности.*

Задача 2. Докажите, что каждая из следующих шести четверок точек: A_a, A_I, F_a, F; A_b, A_c, F_b, F_c; B_b, B_I, F_b, F; B_c, B_a, F_c, F_a; C_c, C_I, F_c, F; C_a, C_b, F_a, F_b лежит на одной окружности.

Задача 3. Докажите, что точки касания вписанной и трех вневписанных окружностей прямоугольного треугольника с его сторонами, продолжениями сторон и окружностью Эйлера лежат на двух окружностях, по восемь точек на каждой окружности, причем центры этих окружностей совпадают с серединами полуокружностей, на которые делит гипотенуза описанную окружность этого треугольника.

4. Теорема Фейербаха и чевианные окружности

При доказательстве того, что центр гиперболы Γ_I совпадает с точкой Фейербаха F, мы использовали теорему Фейербаха. Покажем, что на самом деле теорему Фейербаха можно вывести из теоремы 2. Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 6. *Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — чевианы треугольника ABC, A_2, B_2, C_2 — вторые точки пересечения окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, соответственно со сторонами BC, CA, AB треугольника ABC* (рис. 5). *Тогда отрезки AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке, т. е. также являются чевианами треугольника ABC.*

Доказательство. Поскольку AA_1, BB_1, CC_1 — чевианы треугольника ABC, то по теореме Чевы

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1, \tag{1}$$

и, так как произведения секущих, проведенных к окружности из одной точки, на их внешние части равны, то $AC_2 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AB_1$, $BA_2 \cdot BA_1 = BC_2 \cdot BC_1$, $CB_2 \cdot CB_1 = CA_2 \cdot CA_1$. Перемножив почленно эти равенства, получим

$$AC_2 \cdot AC_1 \cdot BA_2 \cdot BA_1 \cdot CB_2 \cdot CB_1 = AB_2 \cdot AB_1 \cdot BC_2 \cdot BC_1 \cdot CA_2 \cdot CA_1$$

или

$$\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1,$$

откуда, учитывая (1), найдем, что

$$\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} = 1,$$

т. е. по теореме, обратной теореме Чевы, отрезки AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке. □

Итак, в общем случае чевианная окружность треугольника является чевианной окружностью двух точек. Через вершины треугольника и каждую из этих точек можно провести единственную равностороннюю гиперболу. Согласно теореме 2 общая чевианная окружность этих точек проходит через центры проведенных гипербол, лежащие на окружности Эйлера треугольника, и поэтому имеет с окружностью Эйлера две общие точки.

Поскольку вписанная и три вневписанные окружности являются чевианными окружностями одной точки, то каждая из этих окружностей имеет с окружностью Эйлера треугольника единственную общую точку, т. е. касается окружности Эйлера.

5. Изогональное сопряжение

Прямые, проходящие через вершину данного угла и симметричные относительно биссектрисы этого угла, называются *изогональными относительно этого угла.*

Теорема 7. *Пусть P — точка, не лежащая на описанной окружности треугольника ABC. Тогда прямые, изогональные соответственно прямым PA, PB, PC относительно углов A, B, C этого треугольника, пересекаются в одной точке P'.*

Доказательство. Пусть $A_1B_1C_1$ — педальный треугольник точки P, не лежащей на описанной окружности треугольника ABC (рис. 6), P_1, P_2, P_3 — точки, симметричные P относительно середин сторон B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 соответственно. Тогда треугольник $P_1P_2P_3$ гомотетичен серединному треугольнику треугольника $A_1B_1C_1$ с центром гомотетии в точке P и коэффициентом гомотетии, равным 2. Следовательно треугольник $P_1P_2P_3$ равен треугольнику $A_1B_1C_1$, причем стороны этих треугольников соответственно параллельны. Далее, поскольку четырехугольники $PB_1P_1C_1$, $PC_1P_2A_1$, $PA_1P_3B_1$ являются параллелограммами, то P_1, P_2, P_3 — ортоцентры треугольников AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 соответственно (рис. 7). Поэтому $AP_1 \perp B_1C_1$, $BP_2 \perp C_1A_1$, $CP_3 \perp A_1B_1$. Но $B_1C_1 \parallel P_2P_3$, $C_1A_1 \parallel P_1P_3$, $A_1B_1 \parallel P_1P_2$, откуда вытекает, что $AP_1 \perp P_2P_3$, $BP_2 \perp P_1P_3$, $CP_3 \perp P_1P_2$. Таким образом, прямые AP_1, BP_2, CP_3 содержат

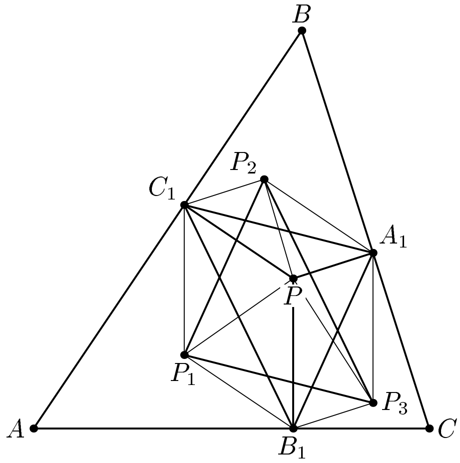

Рис. 6.

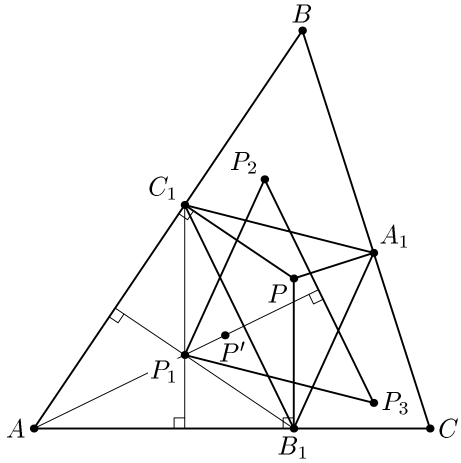

Рис. 7.

высоты треугольника $P_1P_2P_3$ и, следовательно, пересекаются в точке P' — ортоцентре треугольника $P_1P_2P_3$. Поскольку $\angle PA_1B = \angle PC_1B = 90°$, то BP — диаметр описанной окружности треугольника BC_1A_1, а, как легко убедиться, прямые, содержащие высоту и диаметр описанной окружности треугольника и выходящие из вершины одного и того же угла треугольника, изогональны относительно этого угла. Естественно, что то же самое справедливо для углов A и C треугольника ABC. □

Точки P и P' называются *изогонально сопряженными* точками относительно треугольника ABC или просто изогональными точками. Точки описанной окружности треугольника оказываются изогонально сопряженными бесконечно удаленным точкам.

ТЕОРЕМА 8. *Пусть точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC. Тогда прямые, изогональные прямым PA, PB, PC относительно углов A, B, C, параллельны. Верно и обратное: прямые, изогональные параллельным прямым, проходящим через вершины треугольника, пересекаются в одной точке, лежащей на описанной окружности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через AP_1, BP_2, CP_3 прямые, изогональные прямым AP, BP, CP соответственно (см. рис. 8). Изогональность влечет равенства углов

$$\angle CAP = \angle BAP_1,\ \angle CBP = \angle ABP_2,\ \angle BCP = \angle ACP_3,\ \angle BAP = \angle CAP_1\ .$$

Углы $\angle CAP$ и $\angle CBP$ опираются на дугу PC и потому равны. Аналогично, $\angle BAP = \angle BCP$. Поэтому $\angle P_2BA = \angle P_1AB$, $\angle P_1AC = \angle P_3CA$, что и означает параллельность прямых AP_1, BP_2, CP_3.

Доказательство обратного утверждения аналогично. □

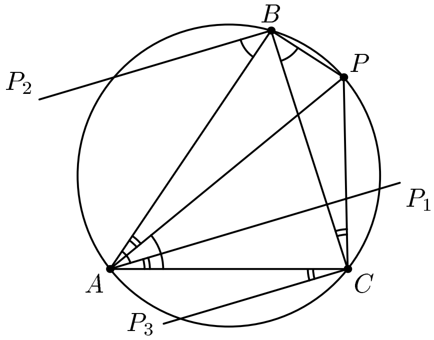

Рис. 8.

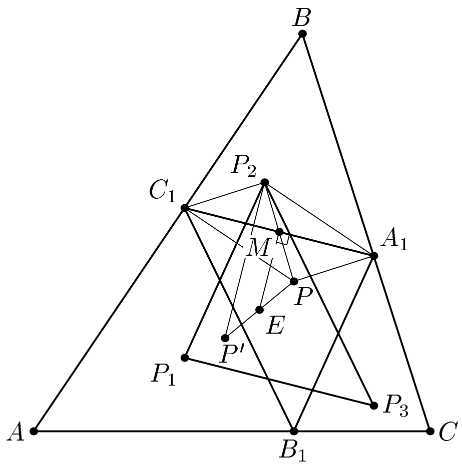

Рис. 9.

Теорема 9. *Пусть P и P' — точки, изогонально сопряженные относительно треугольника ABC, а $A_1B_1C_1$ и $A_1'B_1'C_1'$ — педальные треугольники этих точек. Тогда вершины треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_1'B_1'C_1'$ лежат на одной окружности.*

Доказательство. Докажем, что точка E — середина отрезка PP' — является центром описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$. Поскольку $(P')' = P$, то отсюда будет следовать утверждение теоремы.

Используем те же обозначения, что и в доказательстве предыдущей теоремы. Обозначим через M середину A_1C_1. Так как четырехугольник $PA_1P_2C_1$ — параллелограмм (см. рис. 9), то M — середина отрезка PP_2, но $P_2P' \perp P_1P_3$ и $P_1P_3 \parallel A_1C_1$, поэтому серединный перпендикуляр к A_1C_1 совпадает со средней линией треугольника $P'PP_2$, т. е. точка E лежит на серединном перпендикуляре к отрезку A_1C_1.

Аналогично показывается, что E лежит на серединных перпендикулярах к A_1B_1 и B_1C_1 и, таким образом, совпадает с центром описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$. □

Легко видеть, что центр O описанной окружности треугольника и точка H пересечения его высот изогонально сопряжены. Поэтому из теоремы 9 получаем, что середины сторон произвольного треугольника и основания его высот лежат на одной окружности (окружности Эйлера).

Подобные треугольники AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2 являются уменьшенными копиями треугольника ABC (см. упр. 1), поэтому можно рассматривать точки, одинаково расположенные относительно треугольников ABC, AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2.

Теорема 10. *Пусть A_1, B_1, C_1 — проекции точки P на стороны (или продолжения сторон) BC, CA, AB треугольника ABC; P_1, P_2, P_3 — точки, симметричные P относительно середин сторон B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$; H_1, H_2, H_3 — основания высот AH_1, BH_2, CH_3 треугольника ABC. Тогда точки P, P_1, P_2, P_3 одинаково расположены по отношению к треугольникам ABC, AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2 соответственно.*

Доказательство. Поскольку при симметрии относительно биссектрисы угла B треугольник BH_3H_1 переходит в треугольник, гомотетичный треугольнику ABC с коэффициентом гомотетии равным $\cos\angle ABC = \cos\beta$, то одинаково расположенные точки треугольников ABC и BH_3H_1 лежат на прямых, изогональных относительно угла B. Ранее было показано (см. доказательство теоремы 7), что прямые BP и BP_2 изогональны, а P_2 — ортоцентр треугольника BC_1A_1. С другой стороны, PB — диаметр описанной окружности треугольника BC_1A_1. Применяя результат упражнения 1 к треугольнику BC_1A_1, приходим к выводу, что BP_2 — диаметр окружности, описанной около треугольника, подобного BC_1A_1 с коэффициентом подобия $\cos\beta$. Значит, $PB = BP_2\cos\beta$, и точки P и P_2 одинаково расположены относительно треугольников ABC и BH_3H_1. □

Комбинируя предыдущие теоремы, получаем такое следствие.

Следствие 5. *Пусть H_1, H_2, H_3 — основания высот AH_1, BH_2, CH_3 треугольника ABC; точки P, P_1, P_2, P_3 одинаково расположены по отношению к треугольникам ABC, AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2 соответственно. Тогда треугольник $P_1P_2P_3$ равен педальному треугольнику $A_1B_1C_1$ точки P относительно треугольника ABC, причем стороны треугольников $P_1P_2P_3$ и $A_1B_1C_1$ соответственно параллельны.*

Перейдем к доказательству следующего важного утверждения.

Теорема 11. *Пусть P — произвольная точка в плоскости треугольника ABC, не лежащая на его описанной окружности; AH_1, BH_2, CH_3 — его высоты, пересекающиеся в точке H; E_1, E_2, E_3 — середины отрезков AH, BH, CH; P_1, P_2, P_3 — точки, одинаково расположенные с P относительно треугольников AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2, ABC соответственно. Тогда прямые E_1P_1, E_2P_2, E_3P_3 пересекаются в такой точке K окружности Эйлера треугольника ABC,*

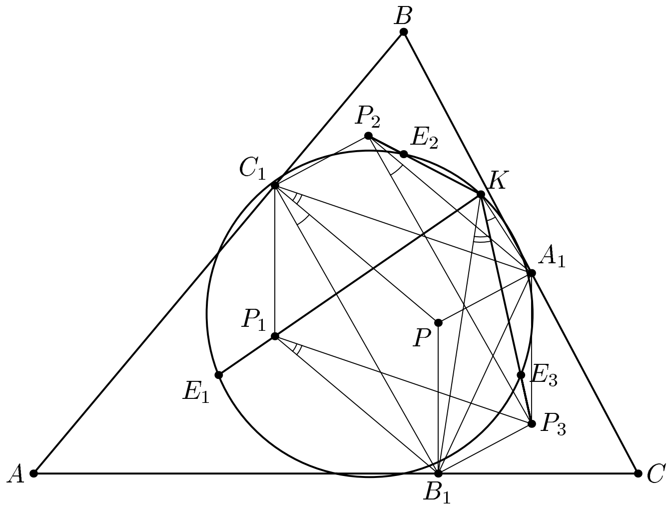

Рис. 10.

через которую проходит описанная окружность педального треугольника точки P относительно треугольника ABC.

Доказательство. Обозначим центр описанной окружности треугольника ABC через O. Точки E_1, E_2, E_3 являются центрами описанных окружностей треугольников $T_1 = AH_2H_3$, $T_2 = BH_3H_1$, $T_3 = CH_1H_2$ соответственно. Поэтому прямые E_iP_i одинаково расположены с прямой OP относительно треугольников T_i, ABC соответственно. Значит, они изогональны прямым ℓ_i, проходящим через E_i параллельно OP. (Напомним, что подобие, совмещающее треугольники ABC и, скажем, T_1, является композицией гомотетии с центром в A и отражения относительно биссектрисы угла A.) По теореме 8 получаем, что прямые E_iP_i проходят через точку K на описанной окружности треугольника $E_1E_2E_3$, т.е. на окружности Эйлера треугольника ABC.

Обозначим через A_1, B_1, C_1 проекции точки P на стороны BC, CA, AB треугольника ABC, $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$. Так как P_2 и P_3 — ортоцентры треугольников A_1BC_1 и B_1CA_1 (см. теорему 10 и доказательство теоремы 7), то $\angle P_2A_1P_3 = 180^\circ - \angle P_2A_1B - \angle P_3A_1C = 180^\circ - (90^\circ - \beta) - (90^\circ - \gamma) = \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$. Далее, $\angle P_2KP_3 = \angle E_2KE_3 = 180^\circ - \alpha = \angle P_2A_1P_3$ (напомним, что треугольник $E_1E_2E_3$ гомотетичен треугольнику ABC с центром гомотетии H, поэтому $\angle E_2E_1E_3 = \angle BAC = \alpha$). Из равенства углов P_2KP_3 и $P_2A_1P_3$ следует, что точки P_2, K, A_1, P_3 лежат на одной окружности. Аналогично показывается, что точки P_3, B_1, P_1, K также лежат на одной окружности.

Теперь можно найти угол B_1KA_1: $\angle B_1KA_1 = \angle B_1KP_3 + P_3KA_1$, но $\angle B_1KP_3 = \angle B_1P_1P_3$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу P_3A_1 окружности $B_1P_1KP_3$, а $\angle P_3KA_1 = \angle P_3P_2A_1$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу P_3A_1 окружности $A_1P_3P_2K$. Как известно из доказательства теоремы 7, четырехугольники $P_1C_1PB_1$, $P_1C_1A_1P_3$, $B_1C_1P_2P_3$, $C_1P_2A_1P$ являются параллелограммами, поэтому $\angle B_1P_1P_3 = \angle PC_1A_1$ и $\angle P_3P_2A_1 = \angle B_1C_1P$ как углы с соответственно параллельными сторонами.

Итак, окончательно получаем $\angle B_1KA_1 = \angle B_1KP_3 + \angle P_3KA_1 = \angle B_1P_1P_3 + \angle P_3P_2A_1 = \angle PC_1A_1 + \angle B_1C_1P = \angle B_1C_1A_1$, т. е. $\angle B_1KA_1 = \angle B_1C_1A_1$ и поэтому точка K лежит на описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$. $\square$

Замечание 1. Доказательство существенным образом опирается на рис. 10. Точки K и C_1 могут находиться по разные стороны от прямой A_1B_1. В этом случае аналогичными рассуждениями можно доказать, что $\angle A_1C_1B_1 + \angle A_1KB_1 = 180°$.

Замечание 2. Теорему 11 можно переформулировать следующим образом: Пусть P — произвольная точка в плоскости треугольника ABC; AH_1, AH_2, AH_3 — его высоты, пересекающиеся в точке H; E_1, E_2, E_3 — середины отрезков AH, BH, CH; O — центр описанной окружности треугольника ABC; ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 — прямые, параллельные прямой OP и проходящие через точки E_1, E_2, E_3 соответственно; ℓ'_1, ℓ'_2, ℓ'_3 — прямые, изогональные ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 относительно треугольника $E_1E_2E_3$. Тогда прямые ℓ'_1, ℓ'_2, ℓ'_3 пересекаются в такой точке K окружности Эйлера треугольника ABC, через которую проходит описанная окружность педального треугольника точки P относительно треугольника ABC.

Упражнение 2. Докажите теорему 11 для тупоугольного и прямоугольного треугольников.

Поскольку для всех точек P, лежащих на фиксированной прямой, проходящей через центр O описанной окружности треугольника ABC, точка K окружности Эйлера этого треугольника будет одной и той же, то из теоремы 11 вытекает

Следствие 6. *Пусть ℓ — прямая, проходящая через центр O описанной окружности треугольника ABC. Тогда описанные окружности педальных треугольников всех точек P, лежащих на прямой ℓ, имеют общую точку K, принадлежащую окружности Эйлера треугольника ABC.*

Из доказательства теоремы 11 следует также, что различным прямым, проходящим через центр описанной окружности, будут соответствовать различные точки окружности Эйлера.

6. Теорема Фейербаха и педальные окружности

Как уже говорилось, педальные треугольники точки P и изогонально сопряженной ей точки P' имеют общую описанную окружность (теорема 9). Из этого факта и теоремы 11 следует, что эта описанная окружность пересекает окружность Эйлера треугольника ABC в двух точках K и K', причем K — это точка пересечения прямых E_1P_1, E_2P_2, E_3P_3, а K' — точка пересечения прямых $E_1P'_1$, $E_2P'_2$, $E_3P'_3$ (P_1, P_2, P_3 — точки, одинаково расположенные с P, а P'_1, P'_2, P'_3 — с P' относительно треугольников AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2, ABC).

Если прямая PP' проходит через центр O описанной окружности треугольника ABC, то, как ясно из сказанного выше, точки пересечения K и K' общей описанной окружности педальных треугольников изогонально сопряженных точек P и P' будут совпадать, т. е. описанная окружность педальных треугольников точек P и P' будет касаться окружности Эйлера треугольника ABC. Таким образом, имеет место

Следствие 7. *Пусть P и P' — изогональные относительно треугольника ABC точки такие, что прямая PP' проходит через центр O описанной окружности треугольника ABC. Тогда общая педальная окружность точек P и P' касается окружности Эйлера треугольника ABC.*

Пусть I — центр вписанной окружности треугольника, тогда педальная окружность точки I совпадает со вписанной окружностью этого треугольника. Поскольку точка I изогонально сопряжена самой себе, то из наших рассуждений следует, что вписанная окружность треугольника касается окружности Эйлера этого треугольника (предположение о наличии второй точки пересечения вписанной окружности с окружностью Эйлера приводит к противоречию, так как в этом случае должна существовать точка I, изогонально сопряженная с I и отличная от I).

Аналогично, центры вневписанных окружностей I_a, I_b, I_c являются изогонально самосопряженными точками и поэтому вневписанные окружности также касаются окружности Эйлера данного треугольника.

Итак, нами доказана еще раз теорема Фейербаха.

Геометрическое место точек P таких, что прямая PP', где P' — точка, изогональная P, проходит через центр описанной окружности треугольника, называется кубикой Мак-Кэя этого треугольника ([5, c.575]). Поэтому обобщение теоремы Фейербаха можно сформулировать следующим образом: педальная окружность любой точки кубики Мак-Кэя данного треугольника касается окружности Эйлера этого треугольника.

7. Изогональный образ прямой, проходящей через центр описанной окружности треугольника

Вспомнив, что изогональные точки P и P' имеют общую педальную окружность (теорема 9), и учитывая следствие 6 и теорему 1, получим еще одно утверждение.

Теорема 12. *Изогональным образом прямой ℓ, проходящей через центр описанной окружности треугольника ABC и не содержащей его вершин, является равносторонняя гипербола, описанная около этого треугольника, причем асимптотами этой гиперболы являются прямые Симсона точек пересечения прямой ℓ с описанной окружностью треугольника ABC.*

Доказательство. Рассмотрим точку P на прямой ℓ и изогонально сопряженную ей точку P'. Проведем через P', A, B, C равностороннюю гиперболу Г. Центр этой гиперболы лежит на окружности Эйлера и на общей педальной окружности точек P и P'. У этих двух окружностей есть, вообще говоря, две общие точки, одна из которых, назовем ее K, лежит на всех педальных окружностях точек прямой OP, а вторая (K') — на всех педальных окружностях точек прямой OP'. Центр гиперболы Γ совпадает с K (если двигать точку по гиперболе, то K' будет меняться).

Повторив это рассуждение для любой другой точки P на прямой ℓ и применив лемму 5, получаем утверждение теоремы. □

СЛЕДСТВИЕ 8. *Геометрическим местом точек P, педальная окружность которых проходит через точку K окружности Эйлера треугольника ABC, является объединение равносторонней гиперболы с центром в точке K, описанной около треугольника ABC, но без точек A, B, C, и прямой ℓ, изогональной этой гиперболе.*

Из следствия 8 вытекает, что к «семейству Фейербаха» из статьи Емельяновых можно добавить семейство педальных окружностей точек P, лежащих либо на равносторонней гиперболе Γ_I, проходящей через центр I вписанной окружности треугольника ABC и имеющей своим центром точку Фейербаха F, либо на прямой OI, где O — центр описанной окружности треугольника ABC. Аналогичные факты справедливы и для других точек Фейербаха F_a, F_b, F_c (точки касания со вневписанными окружностями).

На равносторонней гиперболе Γ_I, описанной около ABC, лежат, кроме вершин A, B, C, центр вписанной окружности I, точка Жергонна J, точка Нагеля N и естественно ортоцентр H. Выбирая любые 4 точки из указанных 7 (кроме тривиальной комбинации A, B, C, H) и рассматривая чевианные и педальные окружности одной из этих 4 точек по отношению к треугольнику с вершинами в трех остальных, получим с учетом следствия 2, что эти окружности пройдут через точку Фейербаха F, совпадающую с центром гиперболы Γ_I. Аналогичные факты справедливы и для остальных точек Фейербаха F_a, F_b, F_c.

Рассмотрим теперь равностороннюю гиперболу Γ_O, являющуюся изогональным образом прямой Эйлера OH треугольника ABC. Эта гипербола проходит через центр O описанной окружности треугольника ABC и точку L, изогональную точке пересечения медиан треугольника ABC. Как известно (см. [5, 7]), точка L называется точкой Лемуана. Для нахождения центра этой гиперболы используем следующую теорему В. Тебо из сборника «Избранные задачи из журнала American Mathematical Monthly» [2, с.81].

ТЕОРЕМА. *Пусть AH_1, BH_2, CH_3 — высоты треугольника ABC. Тогда прямые Эйлера треугольников AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2 пересекаются в такой точке T окружности Эйлера треугольника ABC, для которой один из отрезков TH_1, TH_2, TH_3 равен сумме двух остальных.*

Обобщение теоремы Тебо приведено в [3].

Будем называть точку пересечения прямых Эйлера треугольников AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2 точкой Тебо треугольника треугольника ABC. Из следствия 6 вытекает, что описанные окружности педальных треугольников всех точек P, лежащих на прямой Эйлера, проходят через точку Тебо треугольника ABC, так что она является центром гиперболы Γ_O. Так как точка пересечения медиан G

треугольника лежит на его прямой Эйлера, то описанная окружность педального треугольника точки G проходит через точку Тебо этого треугольника.

Чевианные и педальные окружности всех точек, лежащих на Γ_O, а также педальные окружности всех точек, лежащих на прямой Эйлера OH треугольника ABC, проходят через точку Тебо. На гиперболе Γ_O лежат точки A, B, C, H, O, L. Поэтому, в частности, чевианная окружность точки O, а также чевианная и педальная окружности точки Лемуана L проходят через точку Тебо. Если начертить равностороннюю гиперболу и из любой ее точки как из центра провести окружность, пересекающую эту гиперболу в четырех точках, то для полученных четырех треугольников с вершинами в указанных точках центр гиперболы будет точкой Тебо.

8. Заключительные замечания

Аналогия между педальными и чевианными треугольниками, которая прослеживается в приведённых выше результатах, не имеет удовлетворительного объяснения. Дело усугубляется еще и тем, что эта аналогия неполна. В частности, вопрос о касании чевианных окружностей с окружностью Эйлера оказывается намного сложнее вопроса о касании педальных окружностей и окружности Эйлера. В последнем случае ответ дает кубика Мак-Кэя. Аналогичное множество для чевианных окружностей устроено гораздо сложнее.

Геометрическое место точек P, чевианная окружность которых проходит через точку K окружности Эйлера ABC, состоит из равносторонней гиперболы Γ с центром в точке K, из которой удалены точки A, B, C, и некоторой кривой L, которую описывает вторая точка P' с той же самой чевианной окружностью, что и P (см. лемму 6), в то время как точка P пробегает гиперболу Γ. Назовем эту кривую L *чевианным образом гиперболы*.

Вопрос о существовании чевианных окружностей, касающихся окружности Эйлера треугольника ABC, сводится к вопросу о существовании равносторонних гипербол, описанных около треугольника ABC и проходящих через обе точки P и P', т. е. о пересечении гиперболы и ее чевианного образа.

Обозначим через M множество точек, чевианная окружность каждой из которых касается окружности Эйлера данного треугольника. Это множество непусто для любого треугольника, поскольку центры вписанной и вневписанных окружностей принадлежат M. С другой стороны, компьютерные эксперименты показывают, что существуют треугольники, множество M которых содержит некоторые дополнительные точки.

Результаты компьютерных экспериментов приводят также к предположению, что если M является кривой, то ее асимптоты — прямые, содержащие медианы треугольника ABC.

Автор выражает благодарность М. Н. Вялому за улучшение изложения и структуры статьи, а также А. Заславскому и А. Акопяну — за предоставленное ими геометрическое доказательство теоремы 2.

Список литературы

[1] Глаголев Н. А. *Проективная геометрия.* М.: Высшая школа, 1963.

[2] *Избранные задачи из журнала «American Mathematical Monthly»*. М.: Мир, 1977.

[3] Куланин Е. Д. *О прямых Эйлера и окружности девяти точек* // Приложение «Математика» к газете «Первое сентября», №43, 2000.

[4] Прасолов В. В. *Теорема о пучке коник, проходящих через четыре точки* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 1. 1997. С. 109–114.

[5] Прасолов В. В. *Задачи по планиметрии.* М.: МНЦМО, 2001.

[6] Куланин Е. Д. *Об одном свойстве точек Фейербаха* // Приложение «Математика» к газете «Первое сентября», №10, 1997.

[7] Зетель С. И. *Новая геометрия треугольника.* М.: Учпедгиз, 1940.

Е. Д. Куланин, Московский городской психолого-педагогический университет
e-mail: `lucas03@mail.ru`