Кратчайшие пути по поверхности параллелепипеда

М. Н. Вялый

Мы рассматриваем прямоугольные параллелепипеды. Длины ребер параллелепипеда будут обозначаться $c \geqslant b \geqslant a$.

Длину кратчайшего пути по поверхности параллелепипеда, соединяющего две точки, будем называть *расстоянием* между точками.

В осеннем туре 25-го Турнира Городов была предложена задача (автор — С. В. Маркелов):

> *Верно ли, что самой удаленной от вершины параллелепипеда точкой является центрально симметричная ей вершина?*

Ответ зависит от значений a, b, c и нетрудно привести примеры, когда он отрицателен. Ниже мы даем ответ на этот вопрос для всех возможных значений a, b, c.

Отметим два очевидных свойства кратчайших путей:

(а) если точки лежат на одной грани параллелепипеда, то и кратчайший путь между ними лежит в этой грани (поскольку он является и кратчайшим путем в пространстве между этими точками);

(б) кратчайший путь не проходит дважды через одну и ту же грань (участок пути между двумя частями пути по грани можно заменить на отрезок внутри грани и уменьшить длину пути).

Геодезическим назовем путь, каждая достаточно малая часть которого — кратчайший путь между ее концами. Очевидно, что кратчайший путь является геодезическим. Ясно также, что любой геодезический путь по поверхности параллелепипеда является ломаной.

Геодезический путь может заканчиваться в вершине параллелепипеда, но вершина параллелепипеда не может быть внутренней точкой геодезического пути. Действительно, любые две грани параллелепипеда, которым принадлежит данная вершина, имеют общее ребро. Остальное ясно из рис. 1.

Таким образом, геодезический путь можно продолжать до тех пор, пока (и если) он не попадет в одну из вершин параллелепипеда. При переходе через ребро геодезический путь нужно продолжать так, чтобы на развертке он был прямым (см. рис. 2). *Комбинаторным типом* геодезического пути назовем последовательность ребер параллелепипеда, которые пересекает этот путь. Геодезический путь восстанавливается однозначно по комбинаторному типу, начальной и конечной точкам (после развертки граней, через которые проходит этот путь, в одну плоскость, он становится отрезком прямой).

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 9, 2005(203–206)

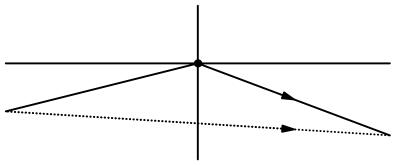

Рис. 1.

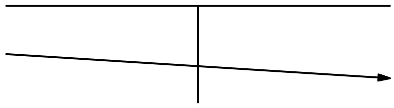

Рис. 2.

Рассмотрим грань F параллелепипеда и кратчайшие пути из точки X в точки грани F. Из свойства (б) следует, что таких путей конечное число. Разворачивая кратчайшие пути в плоскость грани F в соответствии с их комбинаторными типами, получим множество образов точки X: $X_1, \ldots, X_n$.

Напомним, что *диаграммой Вороного* множества точек $X_1, \ldots, X_n$ называется разбиение плоскости на области близости: область Вороного V_j состоит из таких точек x, для которых точка X_j — ближайшая. Границы областей диаграммы Вороного конечного числа точек — прямолинейные отрезки или лучи, лежащие на серединных перпендикулярах к некоторым парам этих точек.

В точку Y, которая является внутренней точкой области Вороного V_j диаграммы Вороного множества образов точки X, ведет единственный кратчайший путь из X (на развертке ему соответствует отрезок X_jY), а в точки границы диаграммы Вороного, отличные от вершин параллелепипеда, ведет по крайней мере два кратчайших пути (в точку Y, которая лежит на границе областей V_j, V_k, ведут два кратчайших пути, которым на развертке соответствуют отрезки X_jY, X_kY).

Назовем точку на поверхности параллелепипеда *дальней* от X, если в нее ведет более одного кратчайшего пути из X. Мы показали, что точки на границах диаграмм Вороного граней параллелепипеда являются дальними от X. Обратное очевидно по построению. Заметим, что самая удаленная от X точка обязательно лежит на границе диаграммы Вороного и потому будет дальней от X (для точки Y, лежащей внутри области V_j, можно продолжить отрезок X_jY внутри области V_j).

Лемма 135. *Пусть две грани параллелепипеда имеют общее ребро VW, а точка X лежит на одной из этих граней, причем $\angle XVW \geqslant 45°$. Тогда в окрестности вершины V множество дальних точек состоит из интервала VY, причем $\angle XVY = 135°$.*

Доказательство. См. рис. 3. В малой окрестности V геодезические пути через ребро VW конкурируют только с путями, проходящими через третью грань, содержащую V. Если развернуть эту третью грань вверх от правой грани, то слева от нее будет грань, содержащая вершину X. Геодезический путь, идущий через три грани, при такой развертке изображается отрезком, начинающимся в точке X', которая получается из X поворотом на $90°$. Точка V лежит на серединном перпендикуляре к отрезку XX', так что если VY лежит на серединном перпендикуляре, то $\angle XVY = 135°$. □

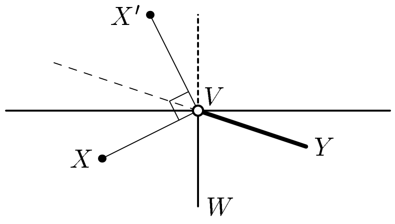

Рис. 3.

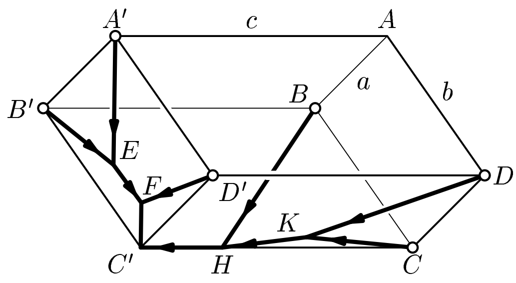

Рис. 4.

Обозначим вершины и длины ребер как показано на рис. 4 (напомним, что $c \geqslant b \geqslant a$). На этом же рисунке изображено множество точек, дальних от вершины A.

Все вершины, кроме C', лежат в одной грани с вершиной A. Поэтому направления отрезков дальних точек, выходящих из этих вершин, определяются по лемме 135. По этим направлениям находим точки E, K; направления отрезков EF (KH) определяются из условия равенства длин путей типов $(BB', B'C')$ и $(A'D')$ (соответственно, (DD') и $(BC), (CC')$). Отрезок HC' также состоит из дальних точек, так как в его точки ведут кратчайшие пути типов (DD') и (BB').

Корректность построенной диаграммы можно проверить, рассмотрев по очереди все области, на которые она разбивает грани параллелепипеда. Например, в точки области $BB'C'H$ ведут кратчайшие пути типа (BB'). Действительно, пути, проходящие через ребро BC, длиннее, так как длины путей типов (BB') и BC равны на отрезке BH. Пути типа (DD', CC'), проходящие через отрезок HC', длиннее, так как длины путей типов (DD') и (BB') равны на отрезке $C'H$. Пути, приходящие на рассматриваемую грань через ребро $B'C'$, длиннее, так как их отделяет от этой грани ломаная $B'EFC'$ (на звеньях этой ломаной равны длины путей типа $(BB', B'C')$ и путей, которые попадают на грань $A'B'C'D'$ через три оставшиеся стороны этой грани).

Аналогично проверяется корректность всех остальных областей.

Теперь найдем самую удаленную точку от вершины A. На всех отрезках множества дальних точек, за исключением ломаной EFC', направление возрастания расстояния определяется из рисунка и изображено на нём стрелками. Развернув кратчайшие пути, ведущие к точкам отрезка EF, как показано на рис. 5, видим, что направление возрастания расстояния — от E к F. Итак, наиболее удаленной точкой от вершины A будет либо C', либо F (расстояние от точки до прямой — выпуклая функция).

Развертка путей, ведущих к отрезку $C'F$, показывает, что $\angle FC'D' = 45°$. Осталось выполнить несложные вычисления. Введем систему координат с началом в C' (рис. 5), ось абсцисс которой направлена по лучу $C'D'$, а ось ординат — по лучу $C'B'$. Точки отрезка $C'F$ имеют координаты (t, t), точка F соответствует значению $t(F) = a(c-b)/(2c)$ (проверку этого факта оставляем читателю для самостоятельного упражнения).

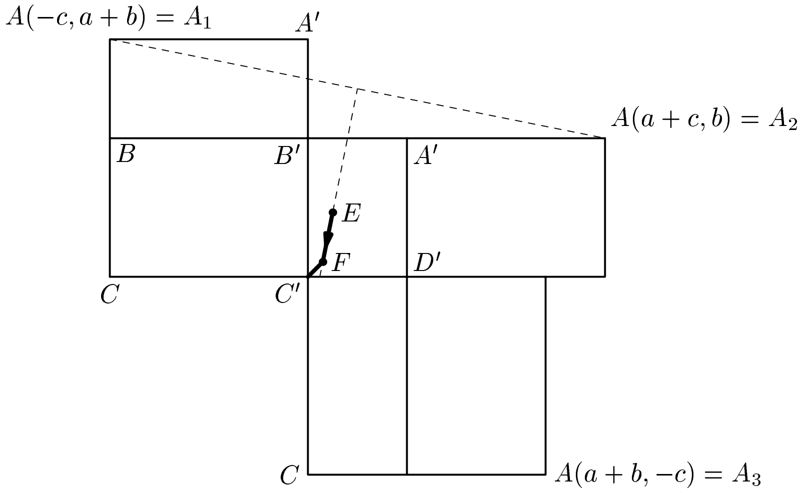

Рис. 5.

Разность квадратов расстояний равна

$$|A_1F|^2 - |A_1C'|^2 = 2t^2 + 2(c-a-b)t.$$

Поэтому вершина C' (центрально симметричная вершине A) будет самой удаленной от вершины A при выполнении условия

$$c \leqslant a + b - \frac{a(c-b)}{2c}\,.$$

Заметим также, что если $c > a + b$, то самой удаленной точкой от вершины A заведомо будет точка F. (В этом случае расстояние монотонно растет при движении от C' к F.) При условии

$$0 < c - a - b < \frac{a(c-b)}{c}$$

функция расстояния от A имеет два локальных максимума: в точках F и C' и седловую точку на отрезке $C'F$.

В заключение — несколько задач.

1. (С. В. Маркелов) Может ли кратчайший путь между двумя вершинами на поверхности параллелепипеда проходить по 4 граням? по 5 граням? по всем граням? (Кратчайший путь из вершины A проходит не более, чем по трем граням.)

2. (А. Шень) Какое максимальное количество различных кратчайших путей может вести из точки на грани параллелепипеда в точку на противоположной грани?

3. Чему равен диаметр прямоугольного параллелепипеда в зависимости от длин ребер a, b, c?

Автор благодарит А. А. Заславского за ценные обсуждения и С. А. Дориченко за помощь в подготовке данной заметки.