Problems.Ru и проблемы классификации

П. В. Сергеев И. В. Ященко*

1. Введение

В этой статье мы хотели бы рассказать читателям «Математического Просвещения» о нашем интернет-проекте Problems.Ru[1)]; о тех трудностях, с которыми приходится сталкиваться при реализации столь масштабного плана, и о тех скромных успехах, которых нам всё же удалось достичь. Мы надеемся, что наши коллеги, в свою очередь, поделятся с нами своими знаниями и ценными рекомендациями. Поскольку до сих пор, по крайней мере в русскоязычном секторе всемирной паутины, не существовало сайта, содержащего такое количество обработанных задач, все участники нашего проекта ощущают некоторую нехватку опыта и с радостью прислушаются к вашим советам.

Одним из главных вопросов, вставших при создании Problems.Ru, был вопрос, как хранить и показывать пользователю такое количество задач, чтобы можно было найти то, что нужно, и не заблудиться в огромном количестве параметров. О том, как эта проблема была решена на нашем сайте, мы расскажем ниже.

2. Немного истории

Первым наиболее значимым проектом создания электронной базы задач была система «Задачи», разработанная большим коллективом авторов (М. А. Бузиниер, Р. К. Гордин, А. Я. Канель, С. И. Трифонов, И. Ф. Шарыгин...). В настоящее время эта система интегрирована в состав Problems.Ru . Это был совместный проект московской школы №57 и ДННТМ (филиал Московского Городского Дворца Детского и Юношеского Творчества). Система «Задачи» распространялась на дискетах, с которых потом устанавливалась на компьютер. В дальнейшем система развивалась в МЦНМО и была перенесена на интернет-сайт «Задачи по геометрии», являющийся частью веб-узла Московского Центра Непрерывного Математического Образования (МЦНМО). Локальная, несколько упрощенная для удобства пользования, версия была поставлена во все школы г. Москвы при содействии Департамента образования г. Москвы. В настоящее время имеется ряд интернет-проектов, содержащих задачи по математике и не только. Кроме уже упомянутого сайта МНЦМО, на котором

*Поддержано грантом НШ-2251.2003.1

1)Проект осуществляется при поддержке Департамента образования г. Москвы и АНО «Научно-методический центр „Школа нового поколения“».

размещена самая крупная коллекция задач олимпиад и кружков, важное место занимает питерский проект «Математические олимпиады и олимпиадные задачи» (http://zaba.ru). Много задач также собрано на сайте Кировского Центра по работе с одаренными детьми (http://www.kirov.ru/~sms/). К сожалению, федеральные порталы по естественнонаучному образованию, создаваемые в рамках федеральных программ, уступают всем упомянутым ресурсам по наполнению и посещаемости в сотни раз.

Из электронных проектов, содержащих задачи, не выходящие за рамки школьной программы, наиболее крупным и законченным представляется проект «Все задачи школьной математики», реализованный совместно издательством «Просвещение», издательством «Интерактивная линия» и Институтом Новых технологий. Эта работа была отмена призом «Книга года 2003».

3. О нашем проекте

Что представляет собой проект Problems.Ru? Получить представление об этом проще всего, зайдя на сайт http://www.problems.ru .

В настоящее время здесь опубликовано около 10000 (десяти тысяч) задач по математике, разбитых по темам и расклассифицированных по сложности. Большая часть задач приводится с решениями (или, по крайней мере, с ответами). Задачи рассчитаны на школьников средних и старших классов. Конечно, это не стандартные примеры «из учебника», а задачи, тем или иным образом дополняющие школьную программу. На сайте очень много как «олимпиадных», так и исследовательских задач, относящихся к самым разным разделам математики.

Все задачи взяты либо из открытых источников, либо с разрешения издательств и авторов печатных изданий. В отдельном окне информации о задаче можно увидеть «происхождение» каждой задачи и дополнительную информацию о ней. Все публикуемые материалы (и условия, и решения) выверяются нашими редакторами, которые проставляют сложность и тему в каждом конкретном случае. На сайте также расположен небольшой словарик, в котором приводятся определения и формулировки некоторых теорем, необходимых для решения задач. Словарь пополняется в соответствии с пожеланиями посетителей — можно задать вопрос на сайте, и в течение несколько дней искомая формулировка появится на Problems.Ru.

Разработан специальный интерфейс для составления занятий кружков, проведения олимпиад и т. д. Просмотрев нужные разделы, посетитель отмечает подходящие задачи, вводит свои заголовки (например, «Занятие 7. Принцип крайнего»), дату и т. п. и в «версии для печати» получает готовое задание.

4. Зачем (и кому) всё это нужно?

Проект ставит перед собой следующие цели:

1) *Дать возможность всем желающим познакомиться с интересными задачами по математике.*

На нашем сайте собраны как жемчужины математики (то, что доступно на школьном уровне), так и просто много очень интересных задач из самых разных областей математики. Можно решать задачи, пролистывая разделы по темам, или просматривая задачи из какого-то одного источника (будь то книга по планиметрии или задачи «Математического праздника»).

Конечно, задач в базе великое множество, поэтому мы отбираем самые, на наш взгляд, красивые или поучительные и публикуем их в разделе «задача дня» на титульной странице (каждый день задача там меняется на другую). Мы стараемся, чтобы в этом разделе была представлена вся «классика жанра». Приведем примеры некоторых из таких задач (различной сложности):

Задача 63856. Два пешехода вышли на рассвете. Каждый шел с постоянной скоростью. Один шел из А в В, другой — из В в А. Они встретились в полдень и, не прекращая движения, пришли: один в В в 4 часа вечера, а другой — в А в 9 часов вечера. В котором часу в тот день был рассвет?

Задача 77906. Из двух треугольных пирамид с общим основанием одна лежит внутри другой. Может ли быть сумма ребер внутренней пирамиды больше суммы ребер внешней?

Задача 35241. На координатной плоскости нарисовали параболу — график функции $y = x^2$, а затем стерли оси координат. Как с помощью циркуля и линейки восстановить ось симметрии параболы?

Задача 78148. На плоскости даны четыре прямые, из которых никакие две не параллельны, и никакие три не пересекаются в одной точке. По каждой прямой с постоянной скоростью идет пешеход. Известно, что 1-й встречается со 2-м, с 3-м и с 4-м, а 2-й встречается с 3-м и с 4-м. Доказать, что 3-й пешеход встретится с 4-м.

Задача 35799. Внутри круглого блина радиуса 10 запекли монету радиуса 1. Каким наименьшим числом прямолинейных разрезов можно наверняка задеть монету?

Задача 56846. Медианы треугольника ABC разрезают его на 6 треугольников. Докажите, что центры описанных окружностей этих треугольников лежат на одной окружности.

(Последняя теорема, как нам сообщил Виктор Васильевич Прасолов, была открыта совсем недавно — в 2002 году. Ее автор голландец Floor van Lamoen.)

2) *Помочь учителям и преподавателям математики в проведении факультативов и кружков по математике.*

Интерфейс сайта (в режиме «показывать с решениями») максимально приспособлен для приготовления заданий для занятий кружка или домашних заданий. Можно быстро просмотреть много задач по данной теме (темам) и, отметив понравившееся задачи, распечатать готовое задание. Одновременно можно напечатать и листок, где те же задачи приводятся с решениями и ответами (в помощь преподавателю). Удобно пользоваться сайтом и для поиска нестандартных дополнительных задач по обычным школьным темам — для наиболее сильных учеников.

3) *Дать возможность школьникам, особенно живущим в отдаленных регионах, изучить самые разные разделы математики.*

Часто школьник, живущий далеко от областного центра (впрочем, и в областных центрах положение не лучше) и интересующийся математикой, не может развиваться дальше потому, что нет ни кружков, ни интересных сборников задач. С помощью Problems.Ru такой школьник сможет познакомиться с разными областями математики, заняться решением задач из интересующего его раздела, познакомиться с задачами олимпиад разного уровня.

Конечно, самое главное при изучении математики — решение задач. Ни учебник, ни урок, ни наш проект никогда не заменят (и не стремятся к этому) самостоятельное решение задач. Тем более, не хотелось бы лишить ребенка той радости открытия, которая появляется при решении даже самой простой задачи. Именно поэтому на сайте по умолчанию показываются только тексты условий (решения открываются в отдельном окне). Но и у школьника, и у преподавателя, встречаются ситуации, когда хочется сравнить свое решение с авторским, или узнать, как решаются задачи на такую-то тему. Авторы убеждены, что это существенно необходимый элемент обучения, почему мы и стараемся представлять большую часть задач с решениями или комментариями.

5. Темы и методы

С самого начала перед авторами проекта стал вопрос о рубрикаторе. Было принято принципиальное решение делать классификацию по темам научной, соответствующей (насколько это возможно в данном классе задач) различным разделам математики, а не «научно-популярной». Мы не можем привести в этой статье всё дерево тем, но процитируем ниже небольшой фрагмент:

88. Алгебра и арифметика
    ...
    134. Теория чисел. Делимость
        138. Признаки делимости
            139. Признаки делимости на 2 и 4
            822. Признаки делимости на 5 и 10
            140. Признаки делимости на 3 и 9
            141. Признаки делимости на 11
            142. Признаки делимости (прочее)
        228. Деление с остатком
        836. НОД и НОК
        232. Алгоритм Евклида
        229. Сравнения по модулю. Арифметика остатков
        243. Малая теорема Ферма
        136. Простые числа. Основная теорема арифметики
        960. Китайская теорема об остатках
        963. Арифметические функции
            964. Количество и сумма делителей числа

965. Функция Эйлера
966. Функция Мёбиуса
967. Арифметические функции (прочее)

230. Уравнения в целых числах ()
856. Произведения и факториалы
231. Теория чисел. Делимость (прочее)

...

(Номера тем — внутренние, и пользователю не видны.)

Уже на этом (довольно простом) примере видно, что названия тем могут оказаться не совсем понятными школьнику. Несмотря на то, что некоторые темы снабжены статьями (либо написанными авторами сайта, либо из журнала «Квант»), а различные определения и формулировки находятся в словарике на сайте, мы обдумываем возможность сделать два разных входа на сайт: для преподавателей и для школьников. Во втором случае темы будут более обширные (сгруппированы вместе) и под более простыми названиями. Логично было бы также для этого входа отобрать самые красивые и поучительные задачи. Впрочем, окончательное решение еще не принято.

Как и при любой классификации, неизбежно возникают ситуации, когда в разных разделах возникают очень похожие темы. Например, темы, относящиеся к биссектрисе, у нас находятся как в разделе «Замечательные точки и линии в треугольнике» так и в разделе «Геометрические места точек (ГМТ)». Не всегда очевидно, в какой же именно теме должна быть данная задача. В таких случаях мы часто приписываем задаче обе темы. При этом, конечно, хотелось бы, чтобы количество тем у данной задачи не превосходило двух-трех. В геометрии, к сожалению, это не всегда получается, но классификация геометрических задач это вообще отдельная очень сложная проблема. Вместе с тем, мы планируем сделать подсказки вида «см. также тему такую-то» у схожих тем. Единственным исключением из общей структуры классификатора является раздел «методы», который дает «ортогональное» разбиение всех задач не по областям математики, а по используемым методам решения (таким как индукция, поиск инварианта и т. д.).

На сайте есть возможность поиска задач, относящихся одновременно, например, к теме «Теория чисел. Делимость» и методу «Принцип Дирихле», что, как мы надеемся, делает наш тематический рубрикатор достаточно удобным в использовании.

6. Сложности со сложностью

Начнем с нескольких примеров. Насколько сложны приведённые ниже задачи?

Пример 1. [Задача 60385.] У Нины 7 разных шоколадных конфет, у Коли 9 разных карамелек. Сколькими способами они могут обменяться друг с другом пятью конфетами?

Казалось бы, задача тривиальная, и ответ в ней ($C_7^5 \cdot C_9^5$) фактически и является решением. А если школьник вовсе не знаком ни с сочетаниями, ни с символикой C_n^k, то мало того, что придется всё придумать «с нуля», так еще и непонятно, в какой форме представлять ответ. Придется вычислить само число (2646). Задача окажется совсем не простой.

Пример 2. [Задача 60508.] Докажите, что число $2^{2^n} - 1$ имеет по крайней мере n различных простых делителей.

Если эта задача рассматривается сама по себе, то решить ее довольно сложно, а если она (как и в книге-источнике) идет после задачи о взаимной простоте чисел Ферма, то решение является легким упражнением.

Пример 3. [Задача 60837.] Генерал хочет построить для парада своих солдат в одинаковые квадратные каре (каре, конечно, должно содержать более одного человека), но он не знает сколько солдат (от 1 до 37) находится в лазарете. Докажите, что у генерала может быть такое количество солдат, что он, независимо от заполнения лазарета, сумеет выполнить свое намерение. Например, войско из 9 человек можно поставить в виде квадрата 3×3, а если один человек болен, то в виде двух квадратов 2×2.

Хотелось бы, чтобы читатель прежде, чем читать дальнейший текст, оценил это сам.

Ясно, что если школьник видит эту задача в главе книги (или в задании) под названием «Китайская теорема об остатках», то больших сложностей ее решение не составит. А если школьник вообще никогда об этом не слышал, то задача будет очень сложной, ибо придется доказать эту теорему, пусть и в частном случае (не на много легче, чем в общем). Деление на классы здесь также не поможет: китайскую теорему об остатках в школе вообще не проходят.

Пример 4. [Задача 58329.] Постройте окружность, касающуюся трех данных окружностей.

Если школьник не знает про инверсию (которую в школе не изучают), то решить эту задачу крайне сложно.

Из приведённых примеров видно, что оценивать сложность по какой-то одной шкале очень трудно. В качестве иллюстрации того, что происходит, когда этих шкал несколько, приведем пример из другой области.

В советской (а теперь — российской) школе альпинизма все маршруты на горные вершины оцениваются по единой шкале — от 1Б (сложности 1А нет по определению) до 6Б. Цифра означает категорию, а буква (А или Б) — полукатегорию сложности. Например, маршрут на западную вершину Эльбруса (5642м, Кавказ) по классике имеет сложность 2А, на пик Маяковского (4208 м, Заилийский Алатау) по восточной стене — 4А, на Эверест (8848м, Гималаи, высшая точка планеты) по классике — 5А, маршрут Семилеткина на пик Свободной Кореи (4740м, Киргизский хребет, Тянь-Шань) — 6А. Надеемся, что даже человеку, мало знакомому с альпинизмом, из этих примеров ясно, что определение сложности маршрута дело совсем не простое. И, что более важно, зная только свой личный уровень и только категорию сложности восхождения, часто невозможно понять — будет ли тебе это под силу. Нужна дополнительная информация. Дело в том, что при оценке по единой шкале суммируются следующие факторы: длительность и сложность ледовых участков, скальных участков, протяженность всего маршрута, возможность организации надежной страховки, высота вершины и особые погодные условия (такие, к примеру, как на вершине Серо-Торре, расположенной в «ревущих сороковых» широтах) и т. д. В конце получается какая-то усредненная сложность — 4Б, к примеру. Получается она с помощью сравнения с некоторыми «образцовыми» маршрутами, про которые уже давно решено, что они имеют такую-то сложность.

На Западе же другой подход. Там каждому маршруту приписывается комбинация из различных букв и цифр, оценивающих различные (ледовые, скальные и т. д.) составляющие маршрутов. К тому же, ясное дело, французская шкала отличается от американской, а американская от британской. Например, сложность (чисто скального) маршрута по североамериканской шкале может иметь вид: V, 5.8, A2+. Это означает (цитируем с разрешения сайта Mountain.Ru), что V — маршрут проходится за 1–2 дня; ночевка, как правило, неизбежна, 5.8 — сложность лазания на ключевом участке равна 5.8 по скальной шкале, A2+ — не очень надежные точки страховки, впрочем способные держать массу тела и даже небольшой срыв.

Американские альпинисты уже считают даже эту шкалу недостаточно подробной (например, явно не указана средняя крутизна маршрута).

Обобщим: мы рассмотрели два разных подхода к оценке сложности. На Problems.Ru мы реализовали первый вариант, основанный, прежде всего, на сравнении с некоторыми образцовыми задачами, приведёнными в таблице на сайте. Сложность каждой задачи оценивается как положительное число, с одной значащей цифрой после запятой. Пользователь же видит усредненное значение в виде натурального числа со знаком $+$ или $-$. Например, 3+ означает, что задача имеет сложность чуть выше, чем три. При этом каждый редактор ставит сложность (глядя на таблицу) по своему усмотрению, что не может не добавлять разнообразия. Тем не менее, как было проверено экспериментально, при достаточной квалификации редакторов различия в сложности как правило остаются в рамках замены $+$ на $-$.

К сожалению, нам не удалось придумать никаких четких критериев выставления сложности. Более того, мы не беремся утверждать, что каждая задача, например, сложности 2 для каждого посетителя сайта будет проще, чем каждая задача сложности 3. Но мы надеемся, что большинство посетителей сайта согласится с нами в том, что большая часть задач сложности 2 проще, чем большая[2] часть задач сложности 3.

---

[2] Посетитель считается согласным с нами в оценке сложности 2–3, если из задач сложности 2 можно выделить такое подмножество, содержащее не менее половины задач, и из задач сложности 3 можно выделить такое подмножество, содержащее не менее половины задач, что, по мнению данного посетителя, любая задача первого подмножества проще любой задачи второго подмножества.

Конечно, в отличие от альпинизма, получить травмы, несовместимые с жизнью, при неправильной оценке сложности, в математике нельзя, но испортить олимпиаду или занятие, подобрав задачи не того уровня, очень просто. Хотелось бы этого избежать.

Если читатели «Математического Просвещения» могут нам посоветовать более четкие критерии оценки сложности, то мы обязательно примем их к сведению.

7. Приглашение к сотрудничеству

Всех, заинтересовавшихся нашим проектом, мы приглашаем принять в нём участие.

Хотелось бы расширить диапазон задач, включив информатику, лингвистику, физику, но пока наш коллектив состоит из математиков. В наших дальнейших планах поддержка словарика и поднятие его до уровня полноценного энциклопедического словаря по математике, написание различных статей по темам нашего рубрикатора, помогающих как ученикам, так и учителям, лучше разобраться в данной теме, внесение задач текущих олимпиад и публикация on-line занятий ряда кружков.

И. В. Ященко, МЦНМО, руководитель проекта problems.ru
П. В. Сергеев, школа №57, главный редактор проекта problems.ru