Решения задач из предыдущих выпусков

6.2. Условие. Дана матрица ортогонального преобразования (a_{ij}) размера 3×3, причем все $a_{ij} \neq 0$. Пусть $B = (b_{ij}) = (a_{ij}^{-1})$. Докажите, что $\det B = 0$.

Решение. Заметим, что

$$\prod_{i,j=1}^{3} a_{ij} \cdot \det B = \begin{vmatrix} a_{12}a_{13} & a_{11}a_{13} & a_{11}a_{12} \\ a_{22}a_{23} & a_{21}a_{23} & a_{21}a_{22} \\ a_{32}a_{33} & a_{31}a_{33} & a_{31}a_{32} \end{vmatrix},$$

а у этой матрицы сумма строк равна нулю, поскольку столбцы матрицы A ортогональны. Значит, определитель равен нулю, что и требовалось.

(*В. В. Доценко*)

6.3. Условие. Докажите, что система уравнений с n параметрами $a_1, \ldots, a_n$

$$\begin{cases} a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0, \\ a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_1x_1^n + \ldots + a_nx_n^n = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда сумма некоторых из a_i равна нулю.

Решение. Мы приведем даже два решения. Заметим сначала, что если сумма некоторых a_i равна нулю, то ненулевое решение, очевидно, есть: положим соответствующие x_i равными единице, а остальные — нулю. Поэтому интересно лишь доказательство обратного утверждения. Итак, пусть система имеет ненулевое решение.

Первое решение. («Линейные системы»[1]) Рассмотрим систему как линейную относительно a_i. Ее определитель получается из *определителя Вандермонда* умножением на $x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$. Если этот определитель не равен нулю, то относительно a_i наша система имеет лишь нулевое решение, т. е. все a_i равны нулю, что даже больше, чем требовалось. В противном случае либо среди x_i есть нули, либо некоторые из x_i равны между собой. В каждом из этих случаев несколько первых уравнений образуют аналогичную систему меньшего порядка, коэффициенты в которой — некоторые из a_i (в первом из этих случаев) или суммы параметров a_i (во втором случае; чтобы в этом убедиться, надо сгруппировать равные между собой x_i), и можно вести индукцию по n.

[1]См. обзор А. А. Кириллова «Инвариантные операторы над геометрическими величинами», ВИНИТИ, 1980, с. 11–12; там этот результат приводится со ссылкой на Р. У. Биглова.

Второе решение. («Теорема Виета») Пусть σ_k — k-ая элементарная симметрическая функция от $x_1, \dots, x_n$. Умножим l-ое уравнение на $(-1)^{n-l}\sigma_{n-l}$ ($l = 1, \dots, n-1$) и сложим все уравнения: $\sum_{k=1}^{n} a_k(x_k^n + \sum_{l=1}^{n-1}(-1)^{n-l}\sigma_{n-l}x_k^l) = 0$.

Воспользуемся теоремой Виета:

$$(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \ldots + (-1)^k \sigma_k x^{n-k} + \ldots + (-1)^n \sigma_n.$$

Она позволяет преобразовать полученное равенство к очень простому виду: $(-1)^n(a_1 + \ldots + a_n)\sigma_n = 0$ (нужно подставить в выписанный многочлен $x = x_k$, умножить на a_k и сложить). Это означает, что либо сумма всех a_i равна нулю (отлично!), либо $0 = \sigma_n = x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$. А если одна из переменных равна нулю, то первые $n-1$ уравнений образуют аналогичную систему меньшего порядка (снова индукция). (*В. В. Доценко*)

6.4. Условие. а) Можно ли разбить пространство на окружности? А плоскость?

б) Можно ли покрыть плоскость окружностями так, чтобы любая точка была покрыта ровно три раза? А два раза?

Решение. а) Пространство можно разбить на окружности. Приведем явную конструкцию, принадлежащую Д. Фомину. Ясно, что полноторие T на окружности разбивается (внутри окружность, на которую нанизаны все остальные). Пусть T — полноторие; S' — окружность, проходящая через центр T так, что центр O окружности S' не содержится в T, а радиус S' больше внешнего радиуса полнотория T; T' — новое полноторие, получающееся из T вращением вдоль оси $\vec{\ell}$, проходящей через O и перпендикулярной плоскости окружности S'. Ясно, что $T \cup S$ дополняется окружностями до T'. Итерируя эту конструкцию, легко получить семейство полноторий $T^{(k)}$, $T^{(k+1)} = T^{(k)'}$, заполняющее всё пространство. Получится требуемое разбиение.

Докажем, что плоскость разбить на окружности нельзя. Предположим противное. Построим последовательность P_i вложенных окружностей разбиения, радиусы которых стремятся к нулю. Первую окружность P_0 выберем произвольно. Окружность P_{i+1} проходит через центр окружности P_i. Поскольку окружности разбиения не пересекаются, радиус следующей окружности в построенной последовательности по крайней мере вдвое меньше радиуса предыдущей. Очевидно, что P_i лежит внутри P_k при $i > k$. Поэтому есть ровно одна общая точка у кругов, ограниченных окружностями P_i. Окружность разбиения, проходящая через эту точку, пересекает все окружности P_k при достаточно большом k, что противоречит условию.

б) Приведем пример такого покрытия плоскости окружностями, что каждая точка покрыта ровно 2 раза. Этот пример принадлежит Н. Б. Васильеву. Он строится в два шага. Вначале возьмем все окружности единичного диаметра, лежащие в полосе единичной ширины. Легко видеть, что через каждую внутреннюю точку полосы проходит ровно 2 окружности, а через каждую граничную — ровно одна. Теперь закончим построение, добавляя окружности, которые получаются параллельными сдвигами на целые расстояния в направлении, перпендикулярном полосе.

Докажем существование такого покрытия плоскости окружностями, что каждая точка покрыта ровно 3 раза. Назовем множество окружностей *правильным*, если любая точка плоскости покрыта не более чем тремя окружностями из этого множества.

Лемма 1. Пусть имеется правильное множеств окружностей P, содержащее менее континуума окружностей. Тогда для любой точки A можно дополнить P конечным (от 0 до 3) числом окружностей так, чтобы полученная система окружностей осталась правильной, а через A проходило бы ровно три окружности.

Доказательство. Точек пересечения окружностей из P менее континуума, так как окружности пересекаются не более чем в двух точках. Через A и любую точку, покрытую тремя окружностями из P, проходит не более двух окружностей единичного радиуса. Значит, всего таких окружностей менее континуума. А всего окружностей единичного радиуса — континуум. Значит, можно, сохраняя правильность множества окружностей, добавить окружность, проходящую через A. Повторяя эту процедуру нужное число раз, получаем искомое расширение системы окружностей.

Возьмем первый ординал мощности континуума C. Перенумеруем с помощью C точки плоскости, окружности, пары окружностей и тройки окружностей. Для каждого ординала $\alpha \leqslant C$ определим трансфинитной индукцией правильное множество окружностей P_α. Для начального ординала 0 полагаем $P_0 = \varnothing$. Если $\alpha = \beta + 1$ — непредельный ординал, то P_α будет получаться из P_β применением леммы относительно точки p_β, соответствующей β. Для определенности считаем, что в P_α включается C-минимальный набор окружностей, удовлетворяющий условию леммы. Если же α — предельный ординал, $\alpha = \bigcup_{i\in I} \alpha_i$, то $P_\alpha = \bigcup_{i\in I} P_{\alpha_i}$.

Множество окружностей P_C дает искомое покрытие плоскости.

Замечание. Данная конструкция позволяет также решить пункт а), а также решать аналогичные задачи (например, построить систему прямых на плоскости, никакие две из которых не параллельны, а каждая точка покрыта ровно 2004 прямыми). Остается открытым вопрос, можно ли предъявить конструкцию, не использующую аксиому выбора (или, что то же самое, трансфинитную индукцию).

(*А. Я. Канель*)

6.11. Условие. Рассматриваются слова из букв русского алфавита. Слова вида sut и $suut$ имеют одинаковый смысл (здесь s, u, t — произвольные слова, возможно, пустые). Докажите, что количество различных смыслов конечно.

Решение. Данную задачу можно переформулировать так: *идемпотентная конечно-порожденная полугруппа конечна.*

Полугруппа P называется *конечно-порожденной*, если существует такое конечное множество элементов $\{a_1, \ldots, a_s\} \subseteq P$, что любой другой элемент представляется в виде произведения этих элементов (они могут идти в произвольном порядке, и каждый элемент может встречаться несколько раз). Полугруппа P *идемпотентна*, если каждый элемент $a \in P$ *идемпотентен*, т. е. $a^2 = a$.

Введем отношения порядка и эквивалентности:

$$s \leqslant v, \text{ если для любых } t_1, t_2 \ st_1 = st_2 \ \Rightarrow \ vt_1 = vt_2; \tag{$\leqslant$}$$

$$s \sim v, \text{ если } s \leqslant v \text{ и } v \leqslant s. \tag{$\sim$}$$

Через Λ будем обозначать пустое слово (единичный элемент полугруппы).

Приведем некоторые свойства введенных отношений.

Лемма 1. а) $s \leqslant us$; б) $auas \sim uas$; в) $s \sim t \ \Leftrightarrow \ st = s$.

Доказательство. Утверждение а) очевидно. Неравенство $uas \leqslant auas$ следует из а). С другой стороны,

$$auas \leqslant uauas = (ua)^2 s = uas,$$

поэтому $auas \sim uas$. Осталось проверить в): $t\Lambda = t^2 = tt$, откуда $s^2 = s = s\Lambda = st$.

Будем доказывать утверждение задачи индукцией по числу образующих, т. е. букв алфавита. Можно показать, число классов эквивалентности конечно. Для одной образующей оно очевидно. Пусть утверждение задачи выполнено для идемпотентных полугрупп с n образующими. Рассмотрим теперь идемпотентную полугруппу с $n+1$ образующей.

Сопоставим каждому классу эквивалентности в P его представителя, имеющего минимальную длину. Пусть a — самая левая буква представителя v. Тогда в силу п. б) леммы 1 буква a в слове v больше не встречается. Поэтому классов эквивалентности конечное число: представитель каждого класса может быть получен дописыванием к произвольной букве a_0 элемента подполугруппы, порожденной образующими $a_1, \ldots, a_n$, а их — конечное число по предположению индукции.

Докажем, что любое достаточное длинное слово в P можно *сократить*, т. е. указать слово меньшей длины, которое задает тот же элемент полугруппы P. Слово заведомо сократимо, если в нем рядом написаны два подслова, относящиеся к одному классу эквивалентности (см. лемму 1, пункт в).

Построим по слову граф, вершинами которого являются позиции слова, а ребру, соединяющему две позиции, сопоставлен класс эквивалентности подслова, концы которого находятся в этих двух позициях. Получили раскрашенный полный граф. Известная теорема Рамсея утверждает, что при фиксированном числе цветов и достаточно большом числе вершин в графе найдется одноцветный треугольник. Но одноцветному треугольнику соответствуют два записанных подряд подслова, которые принадлежат одному классу эквивалентности.

Замечание. Используя аналогичное рассуждение и бесконечную теорему Рамсея, можно доказать следующее утверждение: *пусть все слова конечной длины раскрашены в несколько цветов, тогда любое бесконечное вправо слово* *можно разбить на куски конечной длины так, чтобы все куски, за исключением быть может первого, были раскрашены в один цвет.* (*А. Я. Канель*)

7.1. Условие. Известно, что $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ и $|x_i - y_i| \leqslant \varepsilon$ при всех i; $z_1 \leqslant z_2 \leqslant \cdots \leqslant z_n$ — результат переупорядочивания набора $\{y_i\}_{i=1}^n$ в порядке возрастания. Докажите, что $|x_i - z_i| \leqslant \varepsilon$ при всех i.

Решение. Утверждение задачи равносильно такому: если для двух неубывающих последовательностей $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ и $z_1 \leqslant z_2 \leqslant \cdots \leqslant z_n$ при некотором i выполнено неравенство $|x_i - z_i| > \varepsilon$, то для любой перестановки $\sigma : [1,n] \to [1,n]$ найдется такое k, что $|x_k - z_{\sigma(k)}| > \varepsilon$.

Рассмотрим случай $x_i < z_i$. Найдется такое $k \in [1,i]$, что $\sigma(k) \geqslant i$. Для этого k выполнено

$$|x_k - z_{\sigma(k)}| = z_{\sigma(k)} - x_k \geqslant z_i - x_i > \varepsilon.$$

Случай $x_i > z_i$ разбирается аналогично: нужно взять такое $k \in [i,n]$, что $\sigma(k) \leqslant i$. Тогда

$$x_k - z_{\sigma(k)} \geqslant x_i - z_i > \varepsilon.$$

(*М. Н. Вялый*)

7.3. Условие. Покажите, что матрицы AA^T и A^TA имеют один и тот же набор ненулевых собственных чисел, где A — прямоугольная матрица, A^T — транспонированная матрица.

Решение. Будем рассматривать матрицу A как матрицу линейного оператора из $V = \mathbb{R}^n$ в $W = \mathbb{R}^m$. Заметим, что $(Ax, y) = (x, A^Ty)$ (через $(\cdot,\cdot)$ обозначено стандартное скалярное произведение), поэтому ясно, что $V = \ker A \oplus \operatorname{im} A^T$, $W = \ker A^T \oplus \operatorname{im} A$. Например,

$$v \in \ker A \Leftrightarrow (\forall u \in V)(Av, u) = 0 \Leftrightarrow (\forall u \in V)(v, A^Tu) = 0 \Leftrightarrow v \perp \operatorname{im} A^T.$$

Докажем, что $\ker A^TA = \ker A$. Действительно,

$$AA^Tx = 0 \Rightarrow (A^Tx, A^Tx) = 0 \Leftrightarrow A^Tx = 0 \Rightarrow AA^Tx = 0.$$

Завершить доказательство можно так. Собственный вектор x для A^TA с ненулевым собственным значением λ лежит в образе A^T, поскольку $x = A^T(\frac{1}{\lambda}Ax)$. Из сказанного выше следует, что для x можно даже выбрать представление $x = A^Ty$, где $y \perp \ker A^T$, т. е. $y \in \operatorname{im} A$. Имеем: $A^TAA^Ty = \lambda A^Ty$, т. е. $A^T(AA^Ty - \lambda y) = 0$. При этом вектор $AA^Ty - \lambda y$ лежит в образе оператора A, и потому ортогонален ядру оператора A^T. Значит, он равен нулю, т. е. y — собственный вектор для оператора AA^T с собственным значением λ, что и требовалось (обратное включение множеств собственных значений доказывается так же). (*В. В. Доценко*)

7.4. Условие. $x, y > 0$. Доказать неравенство: $x^y + y^x > 1$.

Решение. Если хотя бы одно из чисел x и y не меньше 1, то неравенство очевидно. Поэтому достаточно рассмотреть случай $0 < x, y < 1$. При $0 < y < 1$ из неравенства Бернулли заключаем, что

$$x^{1-y} = (1 + (x-1))^{1-y} < 1 + (x-1)(1-y) = x + y - xy < x + y.$$

Следовательно, $x^y > \dfrac{x}{x+y}$. Стало быть,

$$x^y + y^x > \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} = 1.$$

(*А. И Храбров*)

7.9. Условие. Три человека имеют соответственно по n_1, n_2, n_3 долларов. Каждый бросает монетку и получает результат — «орел» или «решку». Если у одного не тот же результат, что у двух других, то те двое платят ему по доллару. Если же все результаты одинаковы, то деньги не делят, но «такт» игры происходит. Игра кончается, когда у одного из игроков нет больше денег. Подсчитать среднюю продолжительность игры.

Решение. Ответ: $\dfrac{4n_1n_2n_3}{3(n_1+n_2+n_3)-6}$.

В решении нам потребуются две леммы.

Первая — хорошо известное утверждение из линейной алгебры.

Лемма 1. Неоднородная система N линейных уравнений с N неизвестными имеет единственное решение тогда и только тогда, когда соответствующая однородная система имеет только нулевое решение.

Лемма 2. Рассмотрим ориентированный граф[1] V с выделенным подмножеством вершин G (вершины из множества G будем называть *граничными*, а остальные — *внутренними*) . Пусть граница *достижима* из каждой внутренней точки (т. е. имеется ориентированный путь из этой точки в одну из граничных точек). Пусть далее каждой вершине приписано (комплексное) число так, что

1) число в каждой внутренней вершине равно среднему арифметическому чисел в концах выходящих из нее ребер;

2) все числа в граничных вершинах равны нулю.

Тогда и все числа во внутренних вершинах равны нулю.

Доказательство. Рассмотрим вершину A, в которой стоит максимальное по модулю число M. В силу 1) в концах каждого выходящего из нее ребра также стоит M. Повторяя это рассуждение, видим, что число M стоит во всех вершинах, достижимых из A. Поскольку из A достижима граничная вершина, то $M = 0$.

Замечание 1. Условие 1) можно несколько ослабить, но нам достаточно и такой формулировки.

[1] В графе могут быть петли.

Можно считать, что игра происходит на множестве V позиций вида (n_1, n_2, n_3), где n_1, n_2, n_3 — произвольные неотрицательные целые числа с данной суммой

$$n_1 + n_2 + n_3 = n.$$

Назовем граничными позиции, в которых игра заканчивается, т. е. где по крайней мере одно из чисел n_1, n_2, n_3 равно нулю, и построим граф с множеством вершин V, соединив выходящими ребрами каждую внутреннюю позицию $A(n_1, n_2, n_3)$ с позициями, куда из нее можно попасть за один такт, т. е. с самой позицией A и позициями $A'(n_1-1, n_2-1, n_3+2)$, $A''(n_1-1, n_2+2, n_3-1)$, $A'''(n_1+2, n_2-1, n_3-1)$. Нетрудно проверить, что вероятность перехода за один такт из позиции A в каждую из этих четырех позиций равна $1/4$. Из граничных позиций (множество их обозначим через G) ребра не выходят.

1) Сначала вычислим среднюю продолжительность $l(A)$ игры, начавшейся в позиции A, в предположении, что она для каждой позиции конечна. В силу вышеизложенного

$$l(A) = 1 + \frac{1}{4}\bigl(l(A) + l(A') + l(A'') + l(A''')\bigr). \qquad (*)$$

(Мы полагаем, что $l(A) = 0$ для каждой граничной позиции).

Получилась система линейных уравнений с количеством уравнений и неизвестных, равным числу внутренних вершин. Соответствующая однородная система имеет вид

$$l(A) = \frac{1}{4}\bigl(l(A) + l(A') + l(A'') + l(A''')\bigr).$$

В силу леммы 2 она имеет только нулевое решение. В силу леммы 1 исходная система имеет решение, притом единственное. Осталось «угадать» это решение. Поскольку $l(A)$ обращается в нуль в граничных позициях, естественно попробовать подобрать его в виде $an_1n_2n_3$. Подставляя в (*) и раскрывая скобки, приходим к равенству $(3n-6)a = 4$, т. е. $a = \dfrac{4}{3n-6}$.

2) Докажем теперь, что средняя продолжительность игры действительно конечна.

$$l(A) = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k(A),$$

где $p_k(A)$ — вероятность того, что игра, начавшись с позиции A, закончится ровно через k тактов. Нужно доказать, что этот ряд сходится.

Вероятности $p_k(A)$, очевидно, удовлетворяют соотношениям

$$p_{k+1}(A) = \frac{1}{4}(p_k(A) + p_k(A') + p_k(A'') + p_k(A''')), \qquad (**)$$

которые, наряду с начальными условиями

$$p_0(A) = \begin{cases} 0, & A \notin G, \\ 1, & A \in G \end{cases}$$

и граничными условиями $p_k(A) = 0$ при $A \in G$ и $k > 0$, позволяют вычислять их последовательно.

Рассмотрим векторы $\boldsymbol{p}_k$ с координатами $p_k(A)$ (количество координат равно числу всех вершин графа V). Соотношения (**) вместе с граничными условиями можно записать в виде $\boldsymbol{p}_{k+1} = U\boldsymbol{p}_k$, где U — линейный оператор на соответствующем пространстве. Тогда

$$\boldsymbol{p}_k = U^k \boldsymbol{p}_0.$$

Таким образом, достаточно доказать, что сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} U^k$. Для этого достаточно проверить, что все собственные значения U (в том числе и комплексные) по модулю меньше 1. (Например, после приведения матрицы к жордановой форме можно убедиться в сходимости ряда непосредственным вычислением).

Пусть $\boldsymbol{x}$ — собственный вектор оператора U, соответствующий собственному значению λ:

$$\begin{aligned} &\lambda x(A) = \frac{1}{4}\big(x(A) + x(A') + x(A'') + x(A''')\big) && \text{при } A \notin G, && (***) \\ &\lambda x(A) = 0 && \text{при } A \in G. \end{aligned}$$

Если $|\lambda| \geqslant 1$, но $\lambda \neq 1$, то, рассмотрев наибольшую по модулю координату $x(A)$ вектора $\boldsymbol{x}$, немедленно придем к противоречию — левая часть соотношения

$$\left(\lambda - \frac{1}{4}\right) x(A) = \frac{1}{4}\big(x(A') + x(A'') + x(A''')\big),$$

эквивалентного (***), по модулю больше правой. Если же $\lambda = 1$, то координаты вектора $\boldsymbol{x}$ удовлетворяют условию леммы 2, и следовательно, равны нулю. Противоречие. *(Л. Медников)*

7.11. Условие. Все комплексные корни уравнения

$$A_0 X^n + A_1 X^{n-1} + \dots + A_n = 0$$

по модулю строго меньше 1. Последовательность

$$\{v_k = A_0 u_{k+n} + A_1 u_{k+n-1} + \dots + A_n u_k\}$$

сходится. Докажите, что последовательность $\{u_k\}$ тоже сходится.

Решение. Без ограничения общности можно считать, что $A_0 = 1$.

Разложим характеристический многочлен $P(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n$ на множители:

$$P(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdot \ldots \cdot (x - \xi_n), \quad \xi_i \in \mathbb{C}, \ |\xi_i| < 1.$$

Рассмотрим операторы Δ_λ в пространстве последовательностей:

$$u \mapsto \Delta_\lambda(u), \qquad (\Delta_\lambda(u))_i = u_{i+1} - \lambda u_i.$$

Последовательность v есть результат применения произведения операторов Δ_{ξ_i} к последовательности u:

$$v = \prod_{i=1}^{n} \Delta_{\xi_i} u\,.$$

Таким образом, достаточно доказать следующее: пусть $|\xi| < 1$, а $v = \Delta_\xi u$ — сходится. Тогда и u также сходится. Достаточно рассмотреть случай $\lim\limits_{k\to\infty} v_k = 0$, поскольку замена $\bar v_k = v_k - c$, $\bar u_k = u_k - c/(1-\xi)$ сохраняет рекуррентное соотношение $v_k = u_{k+1} - \xi u_k$. В этом случае докажем, что $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$, и задача будет решена.

Индукцией легко проверить соотношение

$$u_{N+r} = \xi^r u_N + \xi^{r-1} v_{N+1} + \dots + \xi v_{N+r-1} + v_{N+r}. \qquad (*)$$

Если v_k сходится к нулю, то для любого $\varepsilon > 0$ и всех k, начиная с некоторого N, выполнено $|v_k| < \varepsilon$. Из (*) получаем

$$|u_{N+r}| \leqslant |\xi|^r |u_N| + \varepsilon\bigl(|\xi|^{r-1} + \dots + \xi + 1\bigr) < |\xi|^r |u_N| + \frac{\varepsilon}{1-|\xi|}\,.$$

Из этой оценки следует, что при $C > 1/(1-|\xi|)$ и при достаточно больших r выполнено

$$|u_{N+r}| < C\varepsilon,$$

а это и означает, что последовательность u_k сходится к нулю. (*А. Я. Канель*)

8.8. Условие. В граничных клетках таблицы $n \times n$ расставлены числа. Докажите, что можно дописать числа в остальные клетки таблицы так, чтобы каждое число[1] равнялось среднему арифметическому своих соседей[2].

Решение. Условие можно записать в виде системы линейных уравнений (количество уравнений и неизвестных равно числу внутренних клеток). Соответствующая однородная система получится, если в граничных клетках записать нули. В силу леммы 2 из решения задачи 7.9 (с. 230) (вершины графа соответствуют клеткам таблицы, ребра соединяют соседние точки) она имеет только нулевое решение. В силу леммы 1 из решения задачи 7.9 (с. 230) исходная система имеет решение, притом единственное.

Замечание 1. В исходной задаче речь шла о квадратной таблице. Но утверждение верно и для любой «разумной» таблицы, в частности, для прямоугольной.

(*Л. Медников*)

[1] Имеются в виду числа во внутренних клетках. В противном случае утверждение неверно.
[2] Можно рассматривать как соседство «по стороне», так и «по вершине».