Наш семинар: математические сюжеты

Всякое ли чебышёвское множество выпукло?

А. Р. Алимов*

Пусть M — непустое замкнутое подмножество плоскости и x — точка, не принадлежашая ему. Тогда для точки x всегда существует точка из M, ближайшая к ней (это доказывается ниже), т. е. такая точка $y_0 \in M$, что расстояние от x до y_0 не больше, чем расстояние от x до любой точки $y \in M$. (Таких ближайших к x точек может быть, вообше говоря, много.)

Если M — замкнутый круг и точка x лежит вне M, то ближайшая к x точка y_0 единственна, она лежит на пересечении окружности, ограничивающей круг M, и луча, начинающегося в центре круга и проходящего через точку x. Но если M состоит всего из двух точек y_1 и y_2, то возможны два случая:

– точка x не лежит на серединном перпендикуляре l к отрезку $[y_1; y_2]$, ближайшая к x единственна — или y_1, или y_2;

– точка x лежит на l, ближайшими к x будут *обе* точки y_1 и y_2.

Точки, для которых ближайшая точка неединственна, напоминают об известном *буридановом осле*, который стоял между двух равноудалённых от него мешков с овсом и погиб от голода, так и не решив, какой из мешков находится к нему ближе.

Возникает вопрос: *как описать все замкнутые множества M, для которых ближайшая из M к любой точке x единственна?*

---

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-00212) и программы «Ведущие научные школы» (проект № 96-15-96102).

Вначале мы рассмотрим этот вопрос в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, а затем — в более общем n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Для точек x, y с координатами $x = (\alpha_1, \alpha_2)$ и $y = (\beta_1, \beta_2)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ определим число $\langle x, y\rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$, называемое *скалярным произведением* векторов x и y. Из определения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ сразу следует, что $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ и $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$ при $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Под *расстоянием* между ними мы будем понимать обычное евклидово расстояние

$$\|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle} = \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2}.$$

Обобщением расстояния между точками является понятие *наилучшего приближения* или *расстояния $\rho(x, M)$ от заданной точки x до заданного множества M*

$$\rho(x, M) = \inf_{y\in M} \|x - y\|.$$

Под *элементом наилучшего приближения* или *ближайшей точкой* для заданной точки x мы будем понимать ту точку $y_0 \in M$, для которой $\|x - y_0\| = \rho(x, M)$, т. е. $\|x - y_0\| \leqslant \|x - y\|$ для любых $y \in M$. Множество всех ближайших точек из M для заданной точки x обозначается Px.

Определение. Непустое множество M называется *чебышёвским*, если любая точка x имеет точно одну ближайшую в M:

$$\forall x \quad Px \text{ состоит из одной точки.}$$

Если M — чебышёвское множество, то отображение P, сопоставляющее точке x её ближайшую точку Px из M, называется *метрической проекцией* на множество M.

Простыми примерами чебышёвских множеств служат замкнутый круг, отрезок или прямая на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Используя введённое понятие чебышёвского множества, переформулируем поставленный выше вопрос: *описать все чебышёвские множества в $\mathbb{R}^2$* (в $\mathbb{R}^n$).

Первые значительные результаты, относящиеся к чебышёвским множествам, были получены в теории приближения функций одним из основателем этой теории П. Л. Чебышёвым. Название «чебышёвское множество» было дано позднее С. Б. Стечкиным в честь Чебышёва.

Первыми, кто исследовал геометрические свойства чебышёвских множеств, были Л. Бунт и Т. Моцкин. В середине 30-х годов Бунт ответил на поставленный вопрос для случая $\mathbb{R}^n$ (см. обзоры [2] и [3]) и нашёл геометрическое свойство, характеризующее чебышёвские множества. Таким геометрическим свойством оказалась выпуклость. Множество M называется *выпуклым*, если для любых точек $x, y \in M$ множество M содержит отрезок $[x; y]$, их соединяющий. Например, круг на плоскости — выпуклое множество, а окружность — нет.

Теорема (Л. Бунт). *Множество в евклидовой плоскости (в пространстве $\mathbb{R}^n$) является чебышёвским тогда и только тогда, когда оно замкнуто и выпукло.*

Замкнутость чебышёвского множества очевидна. Если бы оно было незамкнутым, то нашлась бы предельная точка множества (т. е. точка, расположенная на нулевом расстоянии от множества), ему не принадлежащая, но это противоречило бы чебышёвости множества. Поэтому далее все рассматриваемые множества будут предполагаться замкнутыми.

Достаточность в теореме почти очевидна и была известна очень давно. Существенно более трудно доказать *необходимость* выпуклости. Мы приводим несколько доказательств этого замечательного утверждения. Доказательство достаточности и первые два доказательства необходимости для наглядности будут проведены для множеств в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$.

Введём несколько обозначений. Если $x \in \mathbb{R}^2$ и $r > 0$, то положим
$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 \,|\, \|x - y\| \leqslant r\}$ — круг с центром x и радиусом r,
$\overset{\circ}{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 \,|\, \|x - y\| < r\}$ — открытый круг с центром x и радиусом r, («внутренность» круга $B(x, r)$),
$S(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 \,|\, \|x - y\| = r\}$ — окружность с центром x и радиусом r.

Доказательство достаточности. Пусть множество M, расположенное в евклидовой плоскости, выпукло и замкнуто и точка x не лежит в M. Докажем, что x имеет в точности одну ближайшую точку из M.

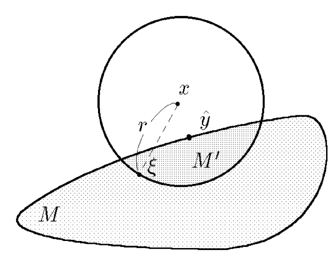

Рис. 1.

Доказательство существования ближайшего элемента извлечём из теоремы Вейерштрасса: *непрерывная функция на компакте*[1] *достигает своего минимума*. Возьмём любую точку $\xi \in M$ и положим $r = \|x - \xi\|$. Тогда (см. рис. 1) множество $M' = M \cap B(x, r)$ выпукло, замкнуто (как пересечение двух выпуклых и замкнутых множеств) и ограничено (ибо лежит в круге радиуса r). Следовательно, оно компактно.

[1] В $\mathbb{R}^2$ и в $\mathbb{R}^n$ компакт — это в точности замкнутое ограниченное множество.

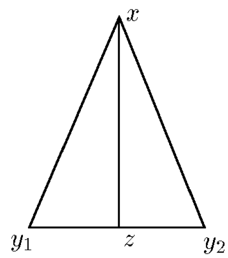

Рис. 2.

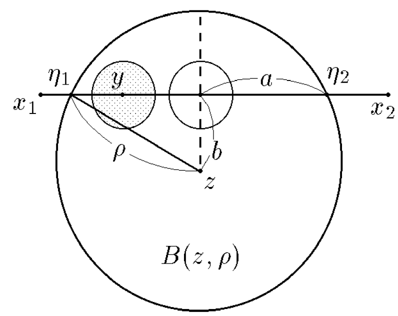

Рис. 3.

Функция $f(y) = \|x - y\| = \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2}$ непрерывна. Значит, она достигает минимума на M' в некоторой точке $\hat{y}$, т. е. $\|x - \hat{y}\| \leqslant \leqslant \|x - \eta\|$ для всех $\eta \in M'$. А вне M' любая точка отстоит от x на расстояние, большее $\|x - \xi\|$. Значит, $\hat{y}$ — ближайшая точка к x в M.

Доказательство единственности. Пусть M — выпуклое замкнутое множество. Допустим, что для некоторой точки $x \notin M$ найдутся две ближайшие точки $y_1, y_2 \in M$. Поскольку M выпукло, то точка $z = (y_1 + + y_2)/2$ — середина отрезка $[y_1; y_2]$ — принадлежит M.

В (невырожденном) равнобедренном треугольнике с вершинами x, y_1, y_2 (см. рис. 2) точка z является основанием высоты, опущенной из x на сторону $[y_1; y_2]$, т. е. её длина *меньше* длины боковой стороны — числа $\|x - y_1\| = \|x - y_2\|$. Итак, мы нашли точку $z \in M$, более близкую к x, чем y_1 и y_2, что противоречит выбору точек y_1 и y_2. Следовательно, исходное предположение о наличии у x двух ближайших точек было неверно, поэтому M — чебышёвское множество. □

1. Доказательство Л. Бунта

(См. [4].) Допустим, что чебышёвское множество M невыпукло. Тогда найдутся точки $x_1, x_2 \in M$ и точка y на отрезке $[x_1; x_2]$ такие, что y не лежит в M. Поскольку M замкнуто и $y \notin M$, то найдётся число $\varepsilon > 0$ такое, что круг $B(y, \varepsilon)$ не пересекается с M.

Рассмотрим совокупность Ω *всех* замкнутых кругов $B(z, \rho)$, каждый из которых содержит круг $B(y, \varepsilon)$ и не пересекается внутренностью с M ($B(y, \varepsilon) \subset B(z, \rho)$ и $\overset{\circ}{B}(z, \rho) \cap M = \varnothing$). Ясно, что Ω замкнуто. Покажем, что радиусы ρ этих кругов ограничены.

Действительно, пусть $B(z, \rho) \in \Omega$ пересекает отрезок $[x_1; x_2]$ в двух точках η_1 и η_2, расстояние между которыми $2a$ (см. рис. 3). Обозначим через b расстояние от z до хорды $[\eta_1;\eta_2]$. Ясно, что $b+\varepsilon \leqslant \rho = \sqrt{a^2+b^2}$, откуда $b^2+2b\varepsilon+\varepsilon^2 \leqslant a^2+b^2$ и $b \leqslant (a^2-\varepsilon^2)/(2\varepsilon)$, значит, $\rho^2 = a^2+b^2 \leqslant$ $\leqslant a^2 + \big((a^2-\varepsilon^2)/(2\varepsilon)\big)^2$, что и требовалось.

Если $B(z,\rho)\in\Omega$, то для его центра z выполнены два условия:
– проекция на отрезок $[x_1;x_2]$ лежит между x_1 и x_2;
– расстояние от z до прямой, соединяющей x_1 и x_2, не больше, чем $(a^2-\varepsilon^2)/(2\varepsilon)$.

Получилось, что совокупность (z,ρ), соответствующих $B(z,\rho)\in\Omega$, есть компакт. Значит, по теореме Вейерштрасса в Ω найдётся круг $B(z_0,\rho_0)$ максимального радиуса. При этом обязательно

$$B(z_0,\rho_0)\cap M \neq \varnothing,$$

иначе в Ω найдётся круг $B(z_0,\rho_1)$ *большего, чем* ρ_0, радиуса (достаточно положить $\rho_1 = \min_{v\in M}\|v-z_0\| > \rho_0$, тогда $B(z_0,\rho_1)\cap M=\varnothing$ и $B(y,\varepsilon)\subset$ $\subset B(z_0,\rho_0)\subset B(z_0,\rho_1)$). Пусть теперь $y_0\in M$ — точка, ближайшая к z_0, тогда $\rho(z_0,M)=\|z_0-y_0\|=\rho_0$.

Поскольку $B(y,\varepsilon)\subset B(z_0,\rho_0)$, то граничная окружность $S(z_0,\rho_0)$ круга $B(z_0,\rho_0)$ или не имеет с $B(y,\varepsilon)$ ни одной общей точки, или имеет одну общую точку w (рис. 4), которая, так как $B(y,\varepsilon)\cap M=\varnothing$, отлична от точки $\{y_0\}=M\cap S(z_0,\rho_0)$. Если мы теперь сдвинем круг $B(z_0,\rho_0)$ на *малое* расстояние в направлении вектора $\overrightarrow{y_0z_0}$ (в случае $S(z_0,\rho_0)\cap B(y,\varepsilon)=\varnothing$) или в направлении вектора $\overrightarrow{y_0w}$ (в случае $S(z_0,\rho_0)\cap B(y,\varepsilon)=\{w\}$), то касание сдвинутого круга $B(z_0,\rho_0)$ и множества M исчезнет.

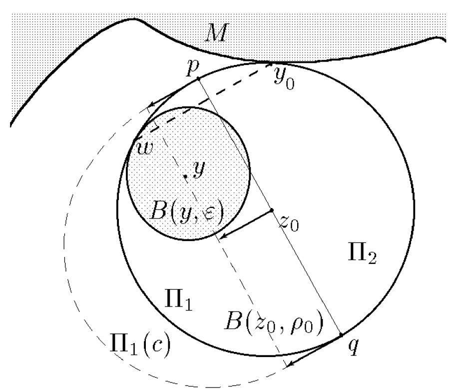

Рис. 4.

Действительно, рассмотрим второй случай (рис. 4). Пусть точки $p,q\in$ $\in S(z_0,\rho_0)$ выбраны так, что диаметр $[p;q]$ перпендикулярен хорде $[w;y_0]$. Диаметр $[p;q]$ разбивает круг на два полукруга: Π_1 и Π_2, при этом считаем, что $w\in\Pi_1$, $y_0\in\Pi_2$. Поскольку M замкнуто и не пересекается с Π_1, то расстояние от любой точки полукруга Π_1 до множества M больше некоторого числа $a>0$. Поэтому найдётся число $b>0$, что для любого c, $0\leqslant c\leqslant b$, сдвиг $\Pi_1(c)=\Pi_1+c\cdot\overrightarrow{y_0w}$ полукруга Π_1 на вектор $c\cdot\overrightarrow{y_0w}$ не пересекается с M. Далее, при сдвиге на вектор $b\cdot\overrightarrow{y_0w}$ любая точка правого полукруга Π_2 перейдёт в некоторую точку полукруга $\Pi_1(c)$

для некоторого $c \in [0; b]$ и, по доказанному выше, не будет лежать в M. Итак, сдвинутый круг $B(z_0', \rho_0) = B(z_0, \rho_0) + c \cdot \overrightarrow{y_0 w}$ не пересекается с M ($z_0' = z_0 + c \cdot \overrightarrow{y_0 w}$), т. е.

$$B(y, \varepsilon) \subset B(z_0', \rho_0), \quad B(z_0', \rho_0) \cap M = \varnothing.$$

Значит, $B(z_0', \rho_0) \in \Omega$. Но тогда $B(z_0', \rho_2) \in \Omega$ для $\rho_2 = \min_{v \in M} \|v - z_0'\|$, что ввиду $\rho_2 > \rho_0$ противоречит максимальности ρ_0. Это показывает, что допущение невыпуклости M ведёт к противоречию.

Первый случай рассматривается аналогично. □

2. Доказательство В. Кли – В. И. Бердышева – Л.П. Власова

(См. [3, 8].) Ключевую роль в этом доказательстве играет теорема Брауэра[2)] о существовании неподвижной точки при непрерывном отображении круга в себя (см. [5], [6]): *при непрерывном отображении f круга $B(x, r)$ в себя существует неподвижная точка; т. е. найдётся точка $z_0 \in B(x, r)$ такая, что $f(z_0) = z_0$.* Эта важная теорема также верна и при непрерывном отображении произвольного выпуклого компакта из $\mathbb{R}^n$ в себя.

Условие выпуклости в теореме Брауэра важно. Например, любой поворот окружности на угол, отличный от $360n°$, $n \in \mathbb{N}$, *не* имеет неподвижной точки.

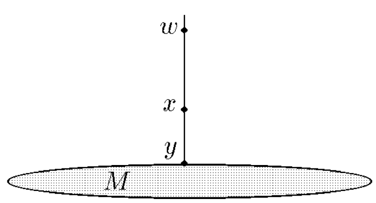

Рис. 5.

Определение. Чебышёвское множество M называется *чебышёвским солнцем*, если (см. рис. 5) для любой точки x, не лежашей в M, любая точка w из луча, начинающегося в $y = Px$ и проходящего через x, имеет точку y своей ближайшей из M.

Мы докажем теорему Бунта, показав, что всякое чебышёвское множество является чебышёвским солнцем и что всякое чебышёвское солнце выпукло.

Лемма 1. *Чебышёвское множество на плоскости* (в $\mathbb{R}^n$) *является чебышёвским солнцем.*

[2)] Бердышев использует более слабое, чем теорема Брауэра, утверждение. Его доказательство в 1960 г. получило золотую медаль на конкурсе студенческих работ.

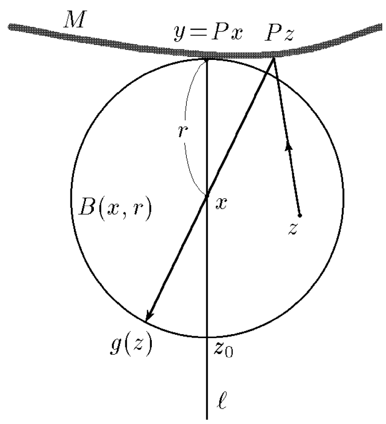

Рис. 6.

Доказательство леммы 1. Пусть M — чебышёвское множество и $x \notin M$. Посредством ℓ обозначим луч, начинаюшийся в $y = Px$ и проходящий через x. Положим $r = \|x - y\|$ и обозначим $B = B(x, \|x - y\|)$. Определим отображение $g : B \to B$ по формуле

$$g(z) = x + \frac{\|x - y\|}{\|x - Pz\|}(x - Pz), \ z \in B$$

(точка $g(z)$ лежит на пересечении луча, исходящего из x в направлении $\overrightarrow{Pz\,x}$, с окружностью $S(x, r)$) (см. рис. 6)).

Докажем, что отображение g непрерывно. Для этого покажем, что метрическая проекция P на чебышёвское множество непрерывна.

Сначала заметим, что если $u, v \in \mathbb{R}^2$ $(u, v \in \mathbb{R}^n)$, то

$$\rho(u, M) \leqslant \|u - v\| + \rho(v, M), \quad |\rho(u, M) - \rho(v, M)| \leqslant \|u - v\|. \qquad (1)$$

Действительно, для любого $s \in M$ в силу неравенства треугольника имеем $\|u - s\| \leqslant \|u - v\| + \|v - s\|$. Возьмём нижнюю грань по $s \in M$ сначала в левой части неравенства, а затем — в правой. Получим $\rho(u, M) \leqslant$ $\leqslant \|u - v\| + \rho(v, M)$. Поменяв местами u и v в предыдущем рассуждении, получим $\rho(v, M) \leqslant \|u - v\| + \rho(u, M)$. Поэтому

$$|\rho(v, M) - \rho(u, M)| \leqslant \|u - v\|.$$

Теперь предположим, что метрическая проекция P разрывна в некоторой точке u, т. е. найдутся число $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $u_n \to u$, такие, что $\|v_n - v\| \geqslant \varepsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$, где $Pu_n = v_n$, $Pu = v$ (можем считать, что $u \neq v$). В силу (1) последовательность $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ограничена. Пусть $\hat{v}$ — её предельная точка. Ясно, что $\hat{v} \neq v$. По (1) $\|u - \hat{v}\| = \lim_{n \to \infty} \|u_n - v_n\| = \rho(u, M)$. Так как M замкнуто, то $\hat{v} \in M$, т. е. обе точки $v, \hat{v}$ являются ближайшими к u — противоречие с условием, что M — чебышёвское множество.

Итак, метрическая проекция P непрерывна. Поэтому отображение g также непрерывно. Применим теорему Брауэра о неподвижной точке к выпуклому компакту B и отображению g: найдётся точка $z_0 \in B$ такая, что $g(z_0) = z_0$. Из определения $g(z_0)$ следует, что точка x лежит на отрезке, соединяющем z_0 с её ближайшим элементом Pz_0. При этом (как легко следует из неравенства треугольника и того, что M — чебышёвское множество), ближайшим элементом к любой точке отрезка $[z_0; Pz_0]$ будет точка Pz_0. Но для x ближайшая точка $y = Px$, и она единственна. Значит, $Pz_0 = y$. Следовательно, для всех точек отрезка $[y; z_0]$ ближайшей точкой из M является точка y.

Применяя предыдущие рассуждения, проведённые для x, к точке z_0, мы ещё далее сдвинемся по лучу ℓ. В итоге для любой точки $w \in \ell$ точка y будет единственной ближайшей из M. Лемма 1 доказана. $\square$

Лемма 2. *Всякое чебышёвское солнце в* $\mathbb{R}^2$ (в $\mathbb{R}^n$) *выпукло.*

Мы дадим два доказательства этого факта.

Доказательство. Способ I (аналитический) [8]. Пусть $x, y \in M$ и $z = \lambda x + (1 - \lambda)y \in [x; y]$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Поскольку M — чебышёвское солнце, то при $z \notin M$ каждая точка $z + \theta(z - Pz)$ для $\theta > 0$ имеет точку Pz своей ближайшей из M.

Поскольку Pz — ближайшая точка для $z + \theta(z - Pz)$, то

$$\|z + \theta(z - Pz) - x\|^2 \geqslant \|z + \theta(z - Pz) - Pz\|^2,$$

и, пользуясь свойствами скалярного произведения, мы получаем

$$\|z - x\|^2/\theta + 2\langle z - Pz, z - x\rangle \geqslant \|z - Pz\|^2/\theta + 2\langle z - Pz, z - Pz\rangle.$$

Устремляя $\theta \to \infty$ в этом неравенстве, мы получаем

$$\langle z - Pz, z - x\rangle \geqslant \|z - Pz\|^2.$$

Аналогично, подставляя в предыдущих рассуждениях y вместо x, имеем

$$\langle z - Pz, z - y\rangle \geqslant \|z - Pz\|^2.$$

Умножая два последних неравенства на λ и $(1 - \lambda)$ соответственно, складывая их и учитывая, что $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, находим, что

$$0 \geqslant \|z - Pz\|^2.$$

Итак, $\|z - Pz\| = 0$, откуда $z = Pz \in M$, т. е. M — выпукло.

Способ II (геометрический). Пусть $x \notin M$, $y = Px$. Посредством Γ обозначим касательную к кругу $B(x, \|x - y\|)$ в точке y. Без ограничения общности (ситуация не изменится при одновременном сдвиге или повороте рассматриваемых объектов), считаем, что прямая Γ совпадает с осью абсцисс, а точка $x = (0, \xi)$ лежит на оси ординат и $\xi > 0$. Тогда $y = (0, 0)$.

По свойству солнечности любая точка w луча $\ell = \{\lambda x \,|\, \lambda > 0\}$ имеет своей ближайшей точку y. Поэтому прямая Γ будет касательной к любому кругу $B(w, \|w - y\|)$, $w \in \ell$.

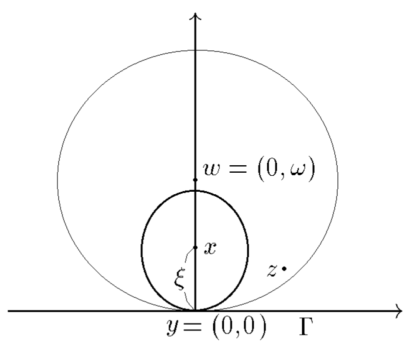

Рис. 7.

Рассмотрим $\Pi = \cup_{w \in \ell} \overset{\circ}{B}(w, \|w\|)$ — объединение открытых кругов с центрами на ℓ. Отметим, что $\overset{\circ}{B}(w, \|w\|) \cap M = \varnothing$ для $w \in \ell$. Пусть z — произвольная точка в верхней полуплоскости. Поскольку Γ — единственная касательная к любому кругу $B(w, \|w\|)$, $w \in \ell$, то интервал $(z; y)$ обязан пересекаться с внутренностью некоторого шара $\overset{\circ}{B}(x, \xi) \in \Pi$. Но тогда, если точка w имеет достаточно большую ординату, то точка z будет лежать в $\overset{\circ}{B}(w, \|w\|)$ (это выполнено, если $\omega > (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)/(2\zeta_2)$, где $z = (\zeta_1, \zeta_2)$, $\zeta_2 > 0$, $w = (0, \omega)$). Следовательно, $z \in \Pi$ и верхняя полуплоскость совпадает с Π и не содержит точек из M.

Итак, любую точку $x \notin M$ можно отделить от множества M прямой, не содержащей x. Следовательно, M выпукло (действительно, если бы нашлись две точки $u, v \in M$ такие, что $x \in [u; v]$ и $x \notin M$, то точку x было бы невозможно отделить от M прямой). Поэтому чебышёвское солнце M выпукло. Лемма 2 доказана. $\square$

Теперь *необходимость* в теореме Бунта немедленно следует из двух доказанных лемм: по лемме 1 каждое чебышёвское множество является чебышёвским солнцем, а по лемме 2 всякое солнце выпукло.

*** ***

Следующие два доказательства теоремы Бунта мы дадим в конечномерном *евклидовом пространстве* $\mathbb{R}^n$. Элемент этого пространства — любая совокупность $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ из n действительных чисел. Эти числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называются координатами точки x. Действия сложения и умножения на число $\lambda \in \mathbb{R}$ производятся по следующим правилам:

$$x + y = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n),$$
$$\lambda x = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n).$$

Для любых $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $y = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ определим *скалярное произведение* векторов x и y по формуле:

$$\langle x, y\rangle = \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n.$$

Это определение обобщает известную формулу выражения скалярного произведения в трёхмерном пространстве через координаты сомножителей в ортогональной системе координат. Легко видеть, что $\langle\cdot,\cdot\rangle$ удовлетворяет следующим требованиям: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$, $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$, $\langle x, x\rangle > 0$ при $x \neq 0$ и $\langle x, x\rangle = 0$ при $x = 0$.

Длиной вектора x в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ называется число

$$\|x\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2} = \sqrt{(x, x)}.$$

3. Доказательство Асплунда – Фиккена

Это доказательство, как и доказательство из следующего п. 4 (с помощью леммы об очистке), будет опираться на свойства множеств с единственной наиболее удалённой точкой и свойства инверсии единичной сферы, дающиеся ниже.

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ и $M \subset \mathbb{R}^n$. Точка $y_0 \in M$ называется *наиболее удалённой точкой* из M для x, если

$$\|x - y_0\| = \sup\{\|x - y\| \mid y \in M\}, \quad \text{т. е. } \|x - y_0\| \geqslant \|x - y\| \quad \forall y \in M.$$

Скажем, что множество M обладает свойством *единственности наиболее удалённой точки*, если для любого $x \in \mathbb{R}^n$ в M существует в точности одна точка y_0, наиболее удалённая от x. Такие множества в каком-то смысле «обратны» к чебышёвским множествам. Отображение, сопоставляющее точке x её наиболее удалённую точку из M, обозначим посредством $F : \mathbb{R}^n \to M$. Итак,

$$F(x) \in M, \qquad \|x - F(x)\| = \sup\{\|x - y\| \mid y \in M\}.$$

Легко видеть, что примером множества со свойством единственности наиболее удалённой точки служит одноточечное множество. Другие примеры таких множеств *нельзя* построить, что показывает следующая важная теорема (см., напр., [8]).

Теорема (Йессен). *Только одноточечные множества в $\mathbb{R}^n$ обладают свойством единственности наиболее удалённой точки.*

Доказательство. Будем доказывать теорему только для замкнутых множеств. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество со свойством единственности наиболее удалённой точки. Ясно, что M ограничено. Пусть $F : \mathbb{R}^n \to M$ — отображение, сопоставляющее точке x её наиболее удалённую точку из M. Покажем, что отображение F непрерывно и далее применим теорему Брауэра о неподвижной точке к произвольному шару $B(x_0, r_0)$, содержащему M.

Предположим, что отображение F *не* является непрерывным. Тогда найдётся последовательность $x_1, \ldots, x_k, \ldots$ точек из $\mathbb{R}^n$, сходящаяся к точке x, и такая, что последовательность $F(x_1), \ldots, F(x_k), \ldots$ не сходится к точке $F(x)$. Поскольку M ограничено, то найдётся подпоследовательность $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}, \ldots$ последовательности $x_1, \ldots, x_k, \ldots$ такая, что последовательность $F(x_{i_1}), \ldots, F(x_{i_m}), \ldots$ сходится к некоторой точке y, *отличной* от $F(x)$. Поскольку M замкнуто, то $y \in M$. Точки $F(x)$ и y наиболее удалены от x — противоречие с определением M. Поэтому отображение F непрерывно.

Сужение отображения F на непустое компактное выпуклое множество — произвольный содержащий M шар $B(x_0, r_0)$ — отображает его в себя. По теореме Брауэра существует неподвижная точка $y_0 \in B(x_0, r_0)$ отображения F, т. е. $F(y_0) = y_0$. Поэтому $y_0 \in M$. Итак, y_0 — наиболее удалённая точка из множества M для точки y_0, и, значит, множество M состоит из одной точки. $\square$

Отображение $\sigma : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$, определяемое как $\sigma(x) = x/\|x\|^2$ называется *инверсией единичной сферы*. Оно непрерывно в любой точке x области определения, т. е. при $x \neq 0$. Следующая лемма описывает образ произвольного шара или сферы при инверсии σ.

Лемма 3. *Справедливы следующие соотношения:*

1) $\sigma\big(S(x,r)\big) = S\big(x/(\|x\|^2 - r^2), r/\big|\|x\|^2 - r^2\big|\big)$, $\|x\| \neq r$,

2) $\sigma\big(S(x, \|x\|)\big) = \{z \mid \langle z, x\rangle = 1/2\}$,

3) $\sigma\big(B(x,r)\big) = B\big(x/(\|x\|^2 - r^2), r/(\|x\|^2 - r^2)\big)$, *если* $\|x\| > r$,

4) $\sigma\big(B(x,r) \setminus \{0\}\big) = \mathbb{R}^n \setminus \mathring{B}\big(x/(\|x\|^2 - r^2), r/\big|\|x\|^2 - r^2\big|\big)$, *если* $\|x\| < r$,

5) $\sigma\big(B(x, \|x\|) \setminus \{0\}\big) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, x\rangle \geqslant 1/2\}$.

Переходим собственно к *доказательству теоремы Бунта.* Предположим, что в $\mathbb{R}^n$ существует невыпуклое чебышёвское множество M. Без ограничения общности считаем, что $0 \notin M$, $0 \in \operatorname{conv} M$ (через $\operatorname{conv} M$ мы обозначаем *выпуклую оболочку* множества M, т. е. минимальное выпуклое множество, содержащее M). Например, выпуклая оболочка окружности — это круг, а выпуклая оболочка двух различных точек — это отрезок, их соединяющий. Отметим, что множество M выпукло тогда и только тогда, когда оно совпадает со своей выпуклой оболочкой $\operatorname{conv} M$.

Инверсия $\sigma : x \mapsto x/\|x\|^2$ $(x \neq 0)$ единичной сферы переводит M в ограниченное множество

$$G = \sigma(M) = \{x/\|x\|^2 \,\big|\, x \in M\}.$$

Каждый шар $B(x, r)$, содержащий G, обязан содержать начало координат в своей внутренности, т. е. должно выполняться неравенство $\|x\| < r$ (иначе множество M содержалось бы в замкнутом полупространстве, *не* содержащем начала координат, что противоречит условию $0 \in \operatorname{conv} M$).

Для точки $x \in \mathbb{R}^n$ найдётся такой минимальный шар $B(x, t(x))$, содержащий G, что $G \not\subset B(x, r)$ для всех $r < t(x)$. Под действием инверсии шар $B(x, t(x))$ переходит в дополнение $\mathbb{R}^n \setminus V$ к открытому шару

$$V = \mathring{B}\left(x/(\|x\|^2 - t^2(x)), \frac{t(x)}{t^2(x) - \|x\|^2}\right),$$

который, в свою очередь, является максимальным шаром с центром $x/\left(\|x\|^2 - t^2(x)\right)$ таким, что замыкание его дополнения содержит M. Поскольку M — чебышёвское множество, этот шар пересекает M в единственной точке $P(x/(\|x\|^2 - t^2(x)))$. Следовательно, функция

$$x \mapsto q(x) = \frac{P(x/(\|x\|^2 - t^2(x)))}{\|P(x/(\|x\|^2 - t^2(x)))\|},$$

действующая из $\mathbb{R}^n$ в G, обладает свойством

$$\|x - y\| < \|x - q(x)\|, \quad \text{если } y \in G \text{ и } y \neq q(x).$$

Итак, G обладает свойством единственности наиболее удалённой точки. Поэтому по теореме Йессена оно, а, следовательно, и множество M одноточечно. Поэтому исходное предположение $0 \notin M$, $0 \in \operatorname{conv} M$ не может выполняться для такого одноточечного M. Итак, M — выпукло. □

4. Доказательство С.В. Конягина при помощи леммы об очистке

Часто является полезной следующая лемма «об очистке» для субдифференциалов (см. [9], мы приводим её упрощённый вариант). В ней уменьшается количество перебираемых элементов, происходит «очистка» от «ненужных» точек.

Лемма (об очистке, [7]). *Пусть T — компактное множество в $\mathbb{R}^n$, $g : T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — функция, выпуклая по x при всяком $t \in T$ и непрерывная по совокупности переменных (t, x). Положим $\varphi(x) = \max_{t\in T} g(t, x)$. Тогда, если $\hat{x}$ — точка минимума φ, то найдутся положительные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = 1$, $r \leqslant n + 1$ и точки $y_1, \dots, y_r$, $y_i \in \partial g(\tau_i, \cdot)(\hat{x})$ (где $\tau_i \in T_0(\hat{x}) = \{t \in T \,|\, g(t, \hat{x}) = \varphi(\hat{x})\}$ и $\partial g(\tau_i, \cdot)(\hat{x}) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid g(\tau_i, x) - g(\tau_i, \hat{x}) \geqslant \langle x - \hat{x}, y_i\rangle, \forall x \in \mathbb{R}^n\}$, $i = 1, \dots, r$), такие, что $0 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i y_i$.*

Доказательство теоремы. Пусть M — невыпуклое чебышёвское множество в $\mathbb{R}^n$ и пусть $G = \{x/\|x\|^2 \bigm| x \in M\}$ — его образ при инверсии $x \mapsto x/\|x\|^2$. Множество $G \subset \mathbb{R}^n$ ограничено и замкнуто, т. е. компактно. Выше мы показали также, что G обладает свойством единственности наиболее удалённого элемента. Применим лемму об очистке для множества $T = G$, функции $g(t, x) = \|t - x\|$, $t \in G$. Пусть $\hat{x}$ — точка минимума функции φ и пусть числа α_i, точки τ_i, y_i $(i = 1, \dots, n)$ и множество T_0 такие, как в лемме.

Предположим, что $r > 1$. Тогда по определению T_0 точки $\tau_1, \dots, \tau_r$ являются наиболее удалёнными точками из множества G для точки $\hat{x}$ — противоречие, поскольку G — множество со свойством *единственности* наиболее удалённой точки.

Пусть теперь $r = 1$. Тогда $T_0 = \{\tau_1\}$ и по лемме об очистке $0 = \alpha_1 y_1$. Поскольку $\alpha_1 = 1$, то $y_1 = 0$. С другой стороны, $y_1 \in \partial g(\tau_1, \cdot)(\hat{x})$. Это по определению означает, что $\|\tau_1 - x\| - \|\tau_1 - \hat{x}\| \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, что влечёт $\|\tau_1 - \hat{x}\| = 0$, т. е. $\tau_1 = \hat{x}$. Но τ_1 — наиболее удалённая точка из G для $\hat{x}$. Поэтому по теореме Йессена множество G, а, следовательно, и множество M, состоят из одной точки, откуда M не может быть невыпуклым. Противоречие с начальным предположением. □

5. Доказательство Л. П. Власова

Лемма 4. *Пусть M — чебышёвское множество*[3]*. Тогда для любой точки $x \notin M$ и для любой последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x \in (x_n; Px)$ $(n \in \mathbb{N})$, $x_n \to x$, выполнено*

$$\frac{\rho(x_n, M) - \rho(x, M)}{\|x_n - x\|} \longrightarrow 1. \tag{2}$$

[3] Лемма верна и в более общем случае банаховых пространств для чебышёвских множеств с непрерывной метрической проекцией.

Доказательство леммы 4. Пусть $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$, $y = Px$ и пусть последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такова, что $x \in (x_n; y)$ и $x_n \to x$. Положим $y_n = Px_n$.

Если $y = y_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то для любой точки $\xi \in [y_n; x]$ выполнено $P\xi = y$, что и требуется в (2).

Предположим теперь, что $y \neq y_n$ для всех n. В плоскости, определяемой точками x, x_n, y, y_n, найдём точку z пересечения прямой $x_n z$, параллельной xy_n, с прямой yy_n. Из подобия треугольников $\triangle xyy_n$ и $\triangle x_n yz$ находим

$$\|z-y_n\|/\|x_n-x\| = \|y_n-x_n\|/\|x-y\|, \quad \|x_n-y\|/\|x_n-z\| = \|x-y\|/\|x-y_n\|. \tag{3}$$

Соотношения $y = Px$ и $y_n = Px_n$ дают соответственно

$$\|x-y\| \leqslant \|x-y_n\|, \quad \|x_n-y_n\| \leqslant \|x_n-y\|. \tag{4}$$

Из (3) и (4) вытекает

$$\|x_n-y\| \leqslant \|x_n-z\|. \tag{5}$$

Применяя последовательно равенство $\|x_n-y\| = \|x_n-x\|+\|x-y\|$, неравенства (4) и (5) и $\|x_n-z\| \leqslant \|x_n-y_n\|+\|y_n-z\|$, а затем неравенство (3), получим

$$\begin{aligned}0 \leqslant 1 - \frac{\rho(x_n, M)-\rho(x, M)}{\|x_n-x\|} &= 1 - \frac{\|x_n-y_n\|-\|x-y\|}{\|x_n-x\|} = \\ &= \frac{\|x_n-y\|-\|x_n-y_n\|}{\|x_n-x\|} \leqslant \frac{\|x_n-z\|-\|x_n-y_n\|}{\|x_n-x\|} \leqslant \\ &\leqslant \frac{\|y_n-z\|}{\|x_n-x\|} = \frac{\|y_n-y\|}{\|x-y\|} = \frac{\|y_n-y\|}{\rho(x, M)} \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

поскольку $y_n \to y$ по доказанной в лемме 1 непрерывности метрической проекции. $\square$

Доказательство теоремы Бунта. Пусть M — чебышёвское множество. По лемме 4 оно удовлетворяет условию (2). Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M$, $\delta > 0$ и $R = \rho(x_0, M)$. Для $\xi \in \mathbb{R}^n$ положим $f(\xi) = (1-2\delta)\|\xi-x_0\|-\rho(\xi, M)$. Непрерывная функция f достигает своего минимума на замкнутом ограниченном множестве $B(x_0, R)$ в некоторой точке x. Покажем, что $x \in S(x_0, R)$.

Предположим противное, т. е. $\|x-x_0\| < R$. Тогда по свойству (2) найдётся точка $y \in \mathring{B}(x, R)$ такая, что $\rho(y, M)-\rho(x, M) > (1-\delta)\|x-y\|$.

Тогда

$$\begin{aligned} f(y) &= (1-2\delta)\|y-x_0\| - \rho(y,M) < \\ &< (1-2\delta)(\|y-x\| + \|x-x_0\|) - \rho(x,M) - (1-\delta)\|x-y\| = \\ &= (1-2\delta)\|x_0-x\| - \rho(x,M) - \delta\|x-y\| = f(x) - \delta\|x-y\|. \end{aligned}$$

Полученное неравенство противоречит неравенству $f(x) \leqslant f(y)$. Следовательно, предположение $x \in \mathring{B}(x_0,R)$ было неверно и, окончательно, $\|x_0 - x\| = R$.

Поскольку $f(x) \leqslant f(x_0)$, то

$$\rho(x,M) \geqslant \rho(x_0,M) + (1-2\delta)R.$$

Пусть $\delta_n \to 0$. Функция $f_n(\xi) = (1-2\delta_n)\|\xi - x_0\| - \rho(\xi, M)$ достигает минимума на $B(x_0,R)$ в точке x_n. По доказанному выше $\|x_0 - x_n\| = R$ $(n = 1,2,\ldots)$ и

$$\rho(x_n,M) \geqslant \rho(x_0,M) + (1-2\delta_n)R. \tag{6}$$

Положим $y_0 = Px_0$, $s = (x_0 - y_0)/\|x_0 - y_0\|$ и $s_n = (x_n - x_0)/\|x_n - x_0\|$. Поскольку $\|x_n - y_0\| \geqslant \|x_n - y_n\|$, то из (6) следует неравенство $\|x_n - y_0\| \geqslant \|x_0 - y_0\| + R - 2R\delta_n$, что даёт $\|s + s_n\| \geqslant 2 - 2\delta_n$. Для векторов s, s_n запишем равенство параллелограмма:

$$\|s+s_n\|^2 + \|s-s_n\|^2 = 2(\|s\|^2 + \|s_n\|^2) = 4. \tag{7}$$

Поскольку $\delta_n \to 0$, то из (7) с учётом предыдущего неравенства получаем $\|s - s_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Из этого сразу следует, что $x_n \to \hat{x} = y_0 - 2x_0$ при $n \to \infty$ (точка $\hat{x}$ диаметрально противоположна точке y_0 на сфере $S(x_0,R)$). Переходя к пределу при $n \to \infty$ в (6) получим

$$\rho(\hat{x},M) \geqslant \rho(x_0,M) + R. \tag{8}$$

С другой стороны,

$$\rho(\hat{x},M) \leqslant \|\hat{x} - y_0\| \leqslant \|\hat{x} - x_0\| + \rho(x_0,M) = R + \rho(x_0,M). \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует

$$\rho(\hat{x},M) = \|\hat{x} - y_0\| = 2R,$$

что даёт $\rho(\hat{x},M) = 2R$, откуда $P\hat{x} = y_0$.

Итак, для точки $x_0 \notin M$ мы показали, что точка $\hat{x}$ луча ℓ, начинающегося в $y_0 = Px_0$ и проходящего через x_0, имеет точку y_0 своей ближайшей. Напомним, что x_0 — середина отрезка $[y_0; \hat{x}]$. Следовательно, и любая другая точка отрезка $[y_0; \hat{x}]$ имеет y_0 своей ближайшей. Применяя предыдущие рассуждения, проведённые для x_0, к точке $\hat{x}$, мы ещё далее сдвинемся по лучу ℓ. В итоге, для любой точки $w \in \ell$ точка y_0 будет единственной ближайшей из M. Значит, M — чебышёвское солнце, и по лемме 2 оно выпукло. Теорема доказана. $\square$

Некоторые обобщения

В бесконечномерных линейных нормированных пространствах о выпуклости чебышёвских множеств известно немного. Например, до сих пор не известно, выпукло ли произвольное чебышёвское множество в бесконечномерном гильбертовом пространстве.

Проблема 1. (Н. В. Ефимов, С. Б. Стечкин, В. Кли) *Доказать или опровергнуть, что всякое чебышёвское множество в бесконечномерном гильбертовом пространстве выпукло.*

Напомним [5], что линейное нормированное пространство, на котором введено скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$, называется предгильбертовым пространством. Гильбертовым пространством называется предгильбертово пространство, полное относительно нормы $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Конечномерное гильбертово пространство — это пространство $\mathbb{R}^n$.

Требование полноты предгильбертова пространства в проблеме 1 важно, как показывает пример *невыпуклого* чебышёвского множества, построенный Джонсономw (см. [2]) в неполном предгильбертовом пространстве ℓ_0^2 последовательностей, оканчивающихся нулями. Также неизвестно, есть ли бесконечномерное пространство, в котором всякое чебышёвское множество выпукло.

При некоторых ограничениях на структуру чебышёвского множества (различные виды компактности) или при ограничении на свойства метрической проекции (непрерывность в каком-либо смысле) удаётся доказать его выпуклость.

Напомним, что множество называется *ограниченно компактным*, если его пересечение с любым замкнутым шаром компактно. Понятно, что компактное множество является ограниченно компактным.

Теорема (Л. П. Власов). *Пусть X — произвольное банахово пространство. Тогда всякое ограниченно компактное чебышёвское множество в X является чебышёвским солнцем, а в гладком X — выпукло.*

Доказательство почти дословно повторяет приведённое в п. 2, но вместо конечномерной теоремы Брауэра применяется её обобщение на случай бесконечномерных пространств (теорема Шаудера [6]): *всякое непрерывное отображение выпуклого замкнутого множества в свою компактную часть имеет неподвижную точку.*

Рассуждения в последнем доказательстве могут быть обобщены на случай чебышёвских множеств с непрерывной метрической проекцией в банаховых пространствах, удовлетворяющих следующему свойству

$$s, s_n \in S(0,1), \ \|s + s_n\| \to 2 \text{ при } n \to \infty \Longrightarrow \ s_n \to s \text{ при } n \to \infty. \qquad (10)$$

Если X — гильбертово пространство (например, $\mathbb{R}^n$), то X удовлетворяет условию (10) в силу равенства параллелограмма.

Приведённое доказательство остаётся без изменения, за исключением следующего момента. В $\mathbb{R}^n$ шар $B(x_0, R)$ компактен, и поэтому непрерывная функция f достигает своего минимума на $B(x_0, R)$. В бесконечномерном случае этот факт может быть неверен, но по вариационному принципу Экланда функция f достигает «почти минимума» на $B(x_0, R)$: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\hat{x} \in B(x_0, R)$ такой, что для любого $y \in B(x_0, R)$ выполнено $f(y) \geqslant f(x) - \varepsilon\|x - y\|$. Далее применяем предыдущие рассуждения.

Несмотря на «очень хорошее» с точки зрения геометрии устройство чебышёвских множеств в n-мерных евклидовых пространствах, в произвольных *конечномерных* линейных нормированных пространствах X_n о выпуклости чебышёвских множеств известно далеко не всё. Пространство называется *гладким*, если в каждой точке единичной сферы касательная гиперплоскость к сфере единственна. К примеру, пространства $\ell^p(n)$, $1 < p < \infty$, с нормой $\|x\|_p = (\alpha_1^p + \ldots + \alpha_n^p)^{1/p}$, $x = (\alpha_1, \ldots, x_n)$, являются гладкими пространствами, а пространство X_2 с max-нормой («квадрат») $\|x\|_\infty = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|\}$ — негладко.

Моцкин показал, что гладкость двумерного пространства X_2 необходима и достаточна для выпуклости всякого чебышёвского множества в X_2. Рассуждая, как в лемме 2 (способ II), несложно показать, что в гладких пространствах всякое чебышёвское множество выпукло. Однако, как независимо показали В.И. Бердышев и А. Брондстед, всякое чебышёвское множество выпукло и в некоторых *негладких* пространствах X_n для всех $n \geqslant 3$.

Сформулируем теорему, характеризующую пространства X_n $(n \leqslant 4)$, в которых всякое чебышёвское множество выпукло. При $n = 2$ она была доказана Моцкиным, при $n = 3$ — Бердышевым и Брондстедом, а при $n = 4$ — А.Л. Брауном. Напомним, что точка $s \in S(0, 1)$ называется *достижимой*, если найдётся касательная гиперплоскость H к сфере в точке s такая, что $H \cap S(0, 1) = \{s\}$; точка s называется точкой *гладкости*, если в ней касательная гиперплоскость к сфере единственна.

Теорема. *В конечномерном линейном нормированном пространстве X_n $(n \leqslant 4)$ всякое чебышёвское множество выпукло тогда и только тогда, когда всякая достижимая точка сферы является точкой гладкости.*

Для $n \geqslant 5$ вопрос о характеризации пространств X_n, в которых всякое чебышёвское множество выпукло, остаётся открытым. Есть гипотеза, что характеризация, данная в предыдущей теореме, верна и для любого $n \geqslant 5$. Отметим очень интересный результат И. Г. Царькова [9], который охарактеризовал *все* конечномерные пространства X_n, в которых всякое *ограниченное* чебышёвское множество выпукло.

Список литературы

[1] *Asplund E.* Čebyšev sets in Hilbert space // Trans. Amer. Math. Soc. V. 144, 1969. P. 235–240.

[2] *Балаганский В.С., Власов Л.П.* Проблема выпуклости чебышёвских множеств // УМН. Т. 51, вып. 6, 1996. С. 125–188.

[3] *Власов Л.П.* Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // УМН. Т. 28, вып. 6, 1973. С. 3–66.

[4] *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.

[5] *Люстерник Л.А., Соболев С.А.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.

[6] *Smart D.R.* Fixed Point Theorems. *Cambridge Tracts in Mathematics*, 66. Cambridge, 1974.

[7] *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976.

[8] *Webster R.* Convexity. Oxford, 1994.

[9] *Царьков И.Г.* Ограниченные чебышёвские множества в банаховых пространствах // Матем. заметки. Т. 36, № 1, 1984. С. 73–87.