О разбиении множеств на части меньшего диаметра: теоремы и контрпримеры

М. Л. Гервер

Диаметром ограниченного множества M называется *наименьшее* число D, обладающее тем свойством, что *для любых двух точек из* M *расстояние между ними не превосходит* D. В частности, для множеств M, состоящих из конечного числа точек, диаметр D равен *наибольшему из попарных расстояний между точками* M.

Нетрудно проверить, что любую фигуру (любое ограниченное множество) на плоскости *можно разбить на три части меньшего диаметра*<1>*) и что некоторые плоские фигуры *нельзя разбить на две части меньшего диаметра*.

Простейшая из таких фигур состоит из трех точек — трех вершин правильного треугольника. Четыре вершины правильного тетраэдра дают аналогичный пример множества в трехмерном пространстве (его нельзя разбить на три части меньшего диаметра), а $d+1$ вершин правильного d-мерного симплекса — пример множества, которое нельзя разбить на d частей меньшего диаметра.

Гипотеза Борсука

В 1933 г. польский математик Карол Борсук высказал гипотезу:

Любое ограниченное множество в трехмерном пространстве можно разбить на четыре части меньшего диаметра. И вообще: любое ограниченное множество в d-мерном пространстве можно разбить на $d+1$ частей меньшего диаметра.

В 1955 г. Х. Эгглстон и в 1957 г. Б. Грюнбаум и А. Хеппеш доказали гипотезу Борсука при $d = 3$. А еще раньше она нашла подтверждение для всех центрально-симметричных множеств и всех *гладких выпуклых* тел<2> (Г. Хадвигер, 1946 г.) [1].

Так как выпуклая оболочка любого ограниченного множества M имеет тот же диаметр, что и само множество M, то предположение о выпуклости *не является ограничением*: гипотезу Борсука достаточно проверить для выпуклых множеств. Казалось бы, оставалось сделать немного — избавиться от допущения о *гладкости* ...

Контрпримеры к гипотезе Борсука

Однако в 1993 г. случилось неожиданное: Д. Кан и Г. Калаи построили контрпример к гипотезе Борсука при $d = 1\,325$ и для всех $d > 2\,014$ [2].

*) Здесь и далее ссылки типа <1> отсылают к Комментариям — заключительному разделу статьи, расположенному перед Приложениями 1–3.

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 3, 1999(168–183)

В [3] и [4] были построены новые контрпримеры — при $d = 946$ и $d = 561$<3>.

Ниже предлагается модификация этих контрпримеров. Будет показано, что *гипотеза Борсука неверна при всех* $d \geqslant 561$. Кроме того, будет приведено новое — более простое, чем прежние, — доказательство гипотезы Борсука при $d = 3$. Вопрос «*Что верно — теорема или контрпример — при* $4 \leqslant d \leqslant 560$?» остается открытым.

Идея контрпримера

Положим $d = 561$ и построим *конечное множество* $Y \subset \mathbb{R}^d$ *диаметра* D, которое нельзя разбить на $d+1$ частей диаметра меньше D.

Множество Y будет состоять из $|Y| = H$ точек. Превратим Y в *граф* Γ, соединяя вершины $y, y' \in Y$ ребром в том и только в том случае, когда $|yy'| < D$, и исследуем *клики*, или *полные подграфы* графа Γ, т. е. такие подграфы, в которых каждые две вершины соединены ребром. Нам удастся оценить число q вершин *максимальной* (содержащей наибольшее возможное число вершин) клики графа Γ, указав такое Q, что

$$q \leqslant Q, \quad H/Q > d + 1. \tag{1}$$

Из (1), очевидно, следует<4>: если множество Y разбито на части, диаметр каждой из которых меньше D, то число таких частей обязательно больше $d+1$, так что Y — контрпример к гипотезе Борсука.

План построения контрпримера

Возьмем $n = 33$, так что $d = 561 = C_{n+1}^2$. Наряду с множеством $Y \subset \mathbb{R}^d$ будет построено вспомогательное множество $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Введем в $\mathbb{R}^{n+1}$ прямоугольную систему координат $x_0, x_1, \ldots, x_n$, рассмотрим куб с вершинами $\{x_j\}_{j=0}^n$, $x_j = \pm 1$, и определим X как следующее подмножество вершин n-мерной грани $x_0 = 1$ этого $(n+1)$-мерного куба $[-1, 1]^{n+1}$:

Вершина $\{x_j\}_{j=0}^n$, $x_j = \pm 1$, *принадлежит к* X, *если* $x_0 = 1$ *и число минус единиц среди* $\{x_j\}_{j=1}^n$ *четно:* $\prod_{j=1}^n x_j = 1$. Тем самым X состоит из $2^{n-1} = 2^{32}$ точек<5>.

Столько же точек будет и в Y: $|X| = |Y| = H = 2^{n-1} = 2^{32}$. При этом Y будет подмножеством вершин d-мерного куба с вершинами $\{y_k\}_{k=1}^d$, $y_k = \pm 1$: $Y \subset [-1, 1]^d$.

Между X и Y будет установлено такое взаимно однозначное соответствие

$$x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \longleftrightarrow y, \quad x' = (x'_0, x'_1, \ldots, x'_n) \longleftrightarrow y', \tag{2}$$

что *максимально удаленным друг от друга — находящимся на расстоянии* D *— точкам* $y, y' \in Y$ *будут соответствовать* $x, x' \in X$ *со скалярным произведением* ± 2:

$$(x, x') = x_0 x'_0 + x_1 x'_1 + \cdots + x_n x'_n = \pm 2 \longleftrightarrow |yy'| = D. \tag{3}$$

Именно соответствие (2) со свойством (3) позволит проверить неравенства (1).

С этой проверки мы и начнем, а уже потом построим множество Y и установим между X и Y соответствие (2), удовлетворяющее условию (3).

Максимальная клика графа Г

Ввиду (2), (3), граф Г можно получить по-новому (не из Y, а из X), соединив ребрами все пары x, $x' \in X$, для которых скалярное произведение $(x, x') \neq \pm 2$.

Замечание. Все прочие значения (x, x') при $x \neq x'$ — это[6] числа ± 6, ± 10, ± 14, ± 18, ± 22, ± 26 и ± 30, а скалярный квадрат (x, x) равен 34. Итак, в графе Г две различные вершины x и x' соединяются ребром тогда и только тогда, когда

$$(x, x') = \pm 6,\ \pm 10,\ \pm 14,\ \pm 18,\ \pm 22,\ \pm 26,\ \pm 30. \tag{4}$$

Положим $Q = \sum_{k=0}^{7} C_{33}^{k}$ (вскоре станет ясно, откуда берется это число) и докажем, что число вершин q максимальной клики $\{a_1, \ \ldots, \ a_q\}$ графа Г не превосходит Q.

Многочлены $g_1, \ldots, g_q$

Каждой вершине a_j, $1 \leqslant j \leqslant q$, сопоставим многочлен $g_j(x)$ по следующему правилу. Фиксируем a_j. При $x = (x_0 = 1, x_1, \ldots, x_n) \in X$ обозначим через $s = s_j(x)$ скалярное произведение (a_j, x) и положим

$$F(s) = (s+6)(s+10)(s+14)(s+18)(s+22)(s+26)(s+30),$$
$$G_j(x) = F(s_j(x)), \quad 1 \leqslant j \leqslant q. \tag{5}$$

Записав $G_j(x)$ в виде линейной комбинации одночленов и последовательно применяя соотношение $x_i^2 = 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$,[7] получаем новый, равный $G_j(x)$ на X, многочлен $g_j(x)$, являющийся целочисленной линейной комбинацией функций

$$x_{j_1}^{h_1} x_{j_2}^{h_2} \ldots x_{j_7}^{h_7}, \quad 1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_7 \leqslant n = 33, \quad h_m = 0 \text{ или } 1, \quad 1 \leqslant m \leqslant 7. \tag{6}$$

Всего в (6), очевидно, имеется Q функций, образующих базис, $Q = \sum_{k=0}^{7} C_{33}^{k}$, и неравенство $q \leqslant Q$ будет доказано, если установить, что многочлены $g_1, \ldots, g_q$ *линейно независимы над кольцом целых чисел*, т.е. если проверить, что тождество

$$c_1 g_1(x) + \cdots + c_q g_q(x) \equiv 0, \ \text{ где } \ c_1, \ldots, c_q \text{ — целые числа}, \tag{7}$$

возможно лишь тогда, когда все коэффициенты $c_1, \ldots, c_q$ в (7) равны нулю[8].

Линейная независимость $g_1, \ldots, g_q$

Многочлен $F(s)$ в (5) выбран так, что среди чисел $s = (x, x')$ из (4) *все* $s < 0$ *являются корнями* $F(s)$, *а все* $s > 0$ *таковы, что* $F(s)$ *делится на 27:* $F(s) \equiv 0 \pmod{27}$ *при* $s = 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30$; последнее свойство легко проверяется с помощью таблицы 1, содержащей все кратные числу 3 сомножители $F(s)$ для указанных значений s. Из той же таблицы видно, что $F(34) \not\equiv 0 \pmod{27}$. В терминах $g_j(x)$ для x из клики $\{a_1, \ \ldots, \ a_q\}$ перечисленные свойства $F(s)$ означают:

$$\text{Если } j \neq k, \text{ то } g_j(a_k) \equiv 0 \pmod{27}; \quad g_j(a_j) \not\equiv 0 \pmod{27}. \tag{8}$$

Линейная независимость $g_1(x), \ldots, g_q(x)$ легко следует отсюда: допустим, что в (7) *не все* c_j *равны нулю*, и докажем, что это допущение противоречит (8).

s	$s+6$	$s+10$	$s+14$	$s+18$	$s+22$	$s+26$	$s+30$
6	12			24			36
10			24			36	
14		24			36		
18	24			36			48
22			36			48	
26		36			48		
30	36			48			60
34			48			60	

Таблица 1.

Дополнительно предположим, что *не все c_j кратны числу* 3 (если это не так, можно разделить все c_j на общий множитель). Пусть, для определенности, c_1 не делится на 3. Подставляя в (7) $x = a_1$, получаем: $c_1 g_1(a_1) + \dots + c_q g_q(a_1) \equiv 0$. Так как, ввиду (8),

$$c_2 g_2(a_1) + \dots + c_q g_q(a_1) \equiv 0 \pmod{27}, \quad \text{то, тем самым, и} \quad c_1 g_1(a_1) \equiv 0 \pmod{27},$$

а значит, снова ввиду (8), $c_1 \equiv 0 \pmod 3$, — противоречие.

Итак, неравенство $q \leqslant Q$ (первое из неравенств (1)) доказано. Второе из неравенств (1) проверяется непосредственным подсчетом:

$$H = 2^{32} = 4\,294\,967\,296, \quad Q = \sum_{k=0}^{7} C_{33}^k = 5\,663\,890, \quad H/Q > 758. \tag{9}$$

Таким образом, для обоснования контрпримера остается построить множество Y и установить между X и Y соответствие (2), удовлетворяющее условию (3).

Соответствие между множествами X и Y

Пусть, как и прежде, $n = 33$. Построим квадратную таблицу $(n+1) \times (n+1)$. Ее строки и столбцы занумеруем числами $i, j = 0, 1, \dots n$. Рассмотрим клетки (i, j) в верхней половине таблицы (над диагональю (i, i), $0 \leqslant i \leqslant n$, идущей из левого верхнего в правый нижний угол). Их число равно $d = (34 \cdot 34 - 34)/2 = C_{34}^2 = 561$.

Произвольно фиксируем $x = \{x_j\}_{j=0}^n \in X$ и в клетку на пересечении строки с номером $i-1$ и столбца с номером j поместим произведение $x_{i-1}x_j$, $1 \leqslant i \leqslant \leqslant j \leqslant n$. Эти произведения объявим координатами y_k, $1 \leqslant k = k(i,j) \leqslant d$, точки $y = y(x) \in Y$.

Поочередно перебрав так все $x \in X$, получаем некоторое множество Y, являющееся подмножеством вершин d-мерного куба $[-1, 1]^d$. Так как $x_0 = 1$ для любого $x \in X$, то $y_{k(1,j)} = x_j$ при всех $j = 1, \dots, n$, т.е. одновременно установлено взаимно однозначное соответствие (2) между X и Y. Докажем, что оно удовлетворяет условию (3).

Квадрат расстояния между $y = \{y_k\}$ и $y' = \{y'_k\}$ равен сумме квадратов разностей $y_k - y'_k$, $1 \leqslant k \leqslant d$. Каждое слагаемое в этой сумме равно либо 0 (если $y_k = y'_k$), либо 4 (если $y_k \neq y'_k$), т.е. расстояние между y и y' тем больше, чем больше несовпадающих y_k и y'_k. Без ограничения общности можно считать, что первые s координат x_j и x'_j совпадают (включая $x_0 = x'_0 = 1$), а остальные $n+1-s$ координат различны.

Эквивалентное допущение (сравним с <6>):
a) все x_j (а значит, и все y_k) равны 1,
b) первые s координат x'_j равны 1, а остальные $n+1-s$ координат x'_j равны -1.
Тогда расстояние между y и y' тем больше, чем больше координат y'_k, равных -1.

При условиях a) и b) координаты $y'_k = -1$ заполняют прямоугольник в верхней половине нашей таблицы. «Площадь» этого прямоугольника (число *минус единиц* в нем) тем больше, чем больше он похож на квадрат. В точности квадрат получиться не может<9>, а прямоугольник, наиболее похожий на квадрат, получается, если $s = 18$, $n+1-s = 16$, либо $s = 16$, $n+1-s = 18$ (т. е. если $(x, x') = \pm 2$).

Итак, расстояние $|yy'|$ между вершинами $y = y(x)$, $y' = y(x') \in Y$ тогда и только тогда равно диаметру D множества Y, когда скалярное произведение $(x, x') = \pm 2$.

Построение контрпримера Y закончено. Трактуя Y как подмножество d-мерного пространства при $561 \leqslant d \leqslant 757$, вследствие (9) получаем, что *гипотеза Борсука неверна при всех d, $561 \leqslant d \leqslant 757$.*

Замечание. Вскоре нам понадобится точное значение диаметра D множества Y:

$$D^2 = 4 \cdot 16 \cdot 18, \quad D = \operatorname{diam} Y = 24\sqrt{2}. \tag{10}$$

Клика, содержащая Q вершин

Неравенство $q \leqslant Q$ (связывающее число многочленов $g_1, \ldots, g_q$ с числом Q многочленов в базисе (6)), служит, оказывается, точной (*неулучшаемой*) оценкой числа вершин максимальной клики графа Γ: опираясь на (4), предъявим клику Π графа Γ, содержащую в точности Q вершин.

Для каждой точки $x = \{x_j\}_{j=0}^n \in X$ среди x_j имеется p координат, равных $+1$, и m координат, равных -1, где $p > 0$ и $m \geqslant 0$ — четные числа, $p+m = n+1$, так что

$$m = 0,\ 2,\ \ldots,\ n-1 = 32. \tag{11}$$

В соответствии с (11) рассмотрим подмножества X_m множества X, $m = 0, 2, \ldots, \ldots, 32$. К X_0 относится одна точка: все $x_j = 1$; к X_2 относятся C_{33}^2 точек: все x_j, кроме двух, равны 1; к X_4 относятся C_{33}^4 точек: все x_j, кроме четырех, равны 1 и т. д.

Нетрудно проверить, что подграф Π, содержащий все вершины

$$x \in X_0 \cup X_2 \cup X_4 \cup X_6 \cup X_{26} \cup X_{28} \cup X_{30} \cup X_{32}, \tag{12}$$

является кликой: $(x, x') \neq \pm 2$ для любых x, $x' \in \Pi$. При этом число вершин (12) равно $Q = \sum_{k=0}^{7} C_{33}^k$ (поскольку $C_{33}^k = C_{33}^{33-k}$, $k = 32, 30, 28, 26$).

Замечание. Хотя сама оценка $q \leqslant Q$ неулучшаема, можно попытаться усовершенствовать способ ее применения: вряд ли при разбиении графа Γ на клики *все они* могут оказаться максимальными, содержащими — *каждая* — по

Q вершин, так что здесь, видимо, есть потенциальная возможность построить контрпример в $\mathbb{R}^d$ для размерностей $d < 561$ <10>.

Размерности $d \geqslant 860$

Вместо пары ($n = 33, d = 561$) рассмотрим пару ($n = 41, d = 861$). Так же, как прежде<11>, построим множества $X \subset [-1,1]^{41}$, $Y \subset [-1,1]^{861}$, $|Y| = |X| = H = 2^{40}$, при этом — вместо (9) — получатся следующие соотношения:

$$Q = \sum_{k=0}^{9} C_{41}^k = 473\,732\,328, \quad H = 2^{40} = 1\,099\,511\,627\,776, \quad H/Q > 2\,320. \tag{13}$$

Поскольку Y можно трактовать как подмножество $\mathbb{R}^d$ при $861 \leqslant d \leqslant 2\,319$, то из неравенства (13) следует, что *гипотеза Борсука неверна при всех d, $861 \leqslant d \leqslant 2\,319$, а также при $d = 860$* <12>. Значит, с учетом [2], она неверна *при всех $d \geqslant 860$*.

Итак, контрпримеры к гипотезе Борсука построены при всех d, $561 \leqslant d \leqslant 757$ и $d \geqslant 860$. До августа 1998 г. вопрос «*Что верно — теорема или контрпример — при* $757 < d < 860$?» оставался открытым.

Результаты школьников — победителей XIX Турнира Городов

В августе 1998 г. в Гамбурге состоялась X летняя конференция Турнира Городов *). На конференции я предложил ее участникам, победителям XIX Турнира Городов, ряд задач о разбиении множеств на части меньшего диаметра, включая некоторые нерешенные вопросы (в том числе, о размерностях d, $757 < d < 860$).

В Гамбурге украинские школьники Руслан Батршин и Максим Давыдов (г. Львов) нашли новое — более простое, чем прежние, — доказательство гипотезы Борсука при $d = 3$ (доказательство приведено в конце этой статьи, см. Приложение 3).

А вскоре после конференции школьники Дима Гуревич (г. Тель-Авив, Израиль) и Саша Гайфуллин (г. Жуковск, Россия) независимо друг от друга получили ответ на вопрос о размерностях d, $757 < d < 860$: для всех этих d они построили *контрпримеры* к гипотезе Борсука. Их построение базируется на следующей, совсем простой, лемме:

Лемма. *Пусть в прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB ($|AB| = D$) и катеты AC и BC ($|AC| = r, |BC| = R$) связаны соотношением $r \leqslant R$, или, что то же самое, $2r^2 \leqslant D^2$. Пусть точка T катета BC такова, что $|TA| = |TB| = \rho$. Тогда $2\rho^2 \leqslant D^2$.*

Лемма сразу следует из подобия треугольников ABC и TBS, где S — середина AB (рис. 1), а применение ее основано на том, что Y (наш 561-мерный контрпример к гипотезе Борсука) лежит на 560-мерной сфере радиуса r ($r^2 = 561$) и, с учетом (10), r и $\operatorname{diam} Y{=}D$ связаны соотношением $2r^2 \leqslant D^2$ ($r^2 = 561 = 17 \cdot 33 < 18 \cdot 32 = D^2/2$).

*) Подробный рассказ о Турнире Городов (международном математическом соревновании школьников старших классов, которое проводится, начиная с 1980 г.) можно в найти в [5].

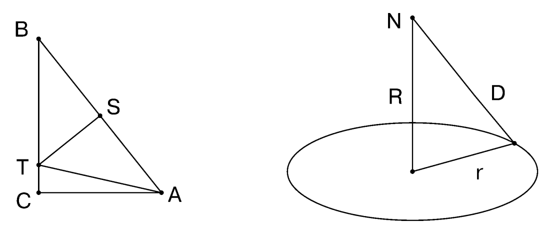

Рис. 1.

Точная формулировка утверждения Д. Гуревича–А. Гайфуллина такова:

Утверждение. *Пусть множество M диаметра D лежит в k-мерном пространстве на $(k-1)$-мерной сфере s радиуса r, причем*

$$r^2 \leqslant D^2/2, \tag{14}$$

и пусть M является контрпримером к гипотезе Борсука: M нельзя разбить на $k+1$ частей, диаметр каждой из которых меньше D. Тогда контрпример к гипотезе Борсука в $\mathbb{R}^d$ можно построить при любом $d > k$.

Доказательство утверждения. На рис. 1 $(k-1)$-мерная сфера s условно изображена в виде окружности радиуса r. Множество $M = M_1$ диаметра D (контрпример к гипотезе Борсука в $\mathbb{R}^k$) лежит на s, причем $2r^2 \leqslant D^2$. Добавляя одну размерность и добавляя к M_1 одну точку N, расположенную на расстоянии D от всех точек s, получаем множество $M_2 \in \mathbb{R}^{k+1}$, которое по-прежнему имеет диаметр D и которое, очевидно<13>, нельзя разбить на $k+2$ части диаметра меньше D.

Тем самым, M_2 является контрпримером к гипотезе Борсука в $\mathbb{R}^{k+1}$.

Так как (по лемме) M_2 лежит на k-мерной сфере, для радиуса которой выполняется (14), то добавление — по одной — новых точек (с увеличением размерности на единицу) можно продолжить по индукции.

А. Гайфуллин доказал также<14>, что доказанное утверждение остается верным, если заменить в нем (14) неравенством

$$r^2 \leqslant 3D^2/4. \tag{15}$$

Некоторые нерешенные вопросы

Несмотря на успехи последних лет, остается ряд нерешенных вопросов, связанных с задачей Борсука. Вот — основные два из них:

1. Что верно — теорема или контрпример — при $4 \leqslant d \leqslant 560$?

2. Обозначим через $f(d)$ минимальное из таких чисел m, что любое ограниченное множество в d—мерном пространстве можно разбить на m частей меньшего диаметра. В [2] получена оценка $f(d) \geqslant (1{,}2)^{\sqrt{d}}$, начиная с некоторого d. Недавно она уточнена в [7]: существует такая функция $r(d)$, $1 \leqslant r(d) = o(e^{\sqrt{d}})$, что

$$f(d) \geqslant r(d) \cdot (2/\sqrt{3})^{\sqrt{2d}} \geqslant (1{,}2255)^{\sqrt{d}}.$$

Как на самом деле растет $f(d)$ с ростом d?

Комментарии

1. Пусть M — произвольное множество диаметра D на плоскости. Проведем горизонтальную прямую L_1, содержащую хоть одну граничную точку M и такую, что *над* L_1 нет точек M. *Под* L_1 параллельно L_1 проведем прямую L_1' на расстоянии D от L_1. Под L_1', очевидно, нет точек M, т.е. мы заключили M в полосу P_1 ширины D.

Построив так же еще 2 полосы P_2 и P_3 ширины D, расположенные под углом $60°$ к P_1, заключим M в 6-угольник S (являющийся пересечением трех полос ширины D).

У такого 6-угольника S противоположные стороны попарно параллельны, а длины сторон a и b ($a \leqslant b$) чередуются: $a - b - a - b - a - b$. Опуская из центра S перпендикуляры на стороны длины b, мы разбиваем S (а значит, и M) на три части диаметра меньше D, рис. 2.

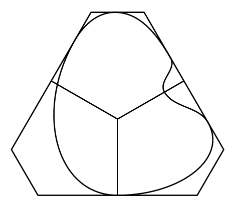

Рис. 2.

Замечание. Стандартное решение этой задачи содержит дополнительный шаг: вращая 6-угольник S, добиваются, чтобы он стал правильным. Для разбиения S и M на 3 части диаметра меньше D этот шаг не нужен. Другие решения см. в Приложении 1.

2. Через каждую граничную точку выпуклого множества V в трехмерном пространстве можно провести *хотя бы одну опорную плоскость* (т.е. такую плоскость, что V лежит по одну сторону от нее). Через вершину выпуклого многогранника (например, через вершину куба) проходит бесконечно много опорных плоскостей. Выпуклое множество (или выпуклое тело) V называется *гладким*, если через каждую граничную точку V проходит *единственная* опорная плоскость.

В Приложении 2 доказано, что любое *гладкое* выпуклое тело в трехмерном пространстве можно разбить на 4 части меньшего диаметра.

Теорема Хадвигера в d-мерном случае доказывается аналогично.

3. В [3] контрпримеры построены для всех размерностей $d = C_{4p}^2$, где p — простое число, большее или равное 11; в частности, при $p = 11$ получается $d = 946 = C_{44}^2$.

4. Как бы ни разбить множество Y, состоящее из H точек, на $d+1$ частей $Y_1, \ldots, Y_{d+1}$, хотя бы в одной из них (скажем, в Y_j) окажется, ввиду (1), больше, чем q точек; значит, Y_j не является кликой графа Γ, и — по определению графа Γ — в Y_j найдутся точки y, y', отстоящие друг от друга на расстояние $D = \operatorname{diam} Y$. Тем самым диаметр Y_j равен диаметру Y, т. е. (1) дает контрпример к гипотезе Борсука.

5. Знаки $\{x_j\}_{j=1}^{32}$ выбираются произвольно, а знак x_{33} определяется однозначно — так, чтобы $\prod_{j=1}^{33} x_j = 1$. Тем самым X состоит из 2^{32} точек.

6. Для любых $x = \{x_j\}$ и $x' = \{x'_j\}$ из X скалярное произведение

$$(x, x') = x_0 x'_0 + x_1 x'_1 + \dots + x_n x'_n,$$

очевидно, совпадает со скалярным произведением (e, e'), где $e = \{e_j\}$ и $e' = \{e'_j\}$ — точки в $\mathbb{R}^{n+1}$ с координатами e_j, тождественно равными 1, и координатами e'_j, равными $x_j x'_j$ при всех j. Обе точки — и e, и e' — принадлежат X, поскольку

$$e_0 = e'_0 = 1 \quad \text{и} \quad \prod_{j=1}^{n} e'_j = \prod_{j=1}^{n} x_j \cdot \prod_{j=1}^{n} x'_j = 1.$$

Если $e'_j = 1$ при всех j, то $(e, e') = 34$; если $e'_j = 1$ при всех j, кроме двух, то $(e, e') = 30$; если $e'_j = 1$ при всех j, кроме четырех, то $(e, e') = 26$ и т. д.

7. Напомню: все $x_i = \pm 1$, поэтому $x_i^2 = 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

8. Каждый из многочленов $g_j(x)$ является линейной комбинацией с целыми коэффициентами одночленов (6), т.е. одночленов

$$1,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ x_r x_s\,(1 \leqslant r < s \leqslant n),\ x_r x_s x_t\,(1 \leqslant r < s < t \leqslant n),\ \dots$$

Обозначим их $e_1, e_2, \dots, e_Q$, где $Q = \sum_{k=0}^{7} C_n^k$, $n = 33$.

Смысл каждого слагаемого в этой сумме ясен: $C_{33}^0 = 1$ — имеется 1 одночлен, тождественно равный 1; $C_{33}^1 = 33$ одночлена являются линейными функциями; C_{33}^2 одночленов — попарные произведения $x_r x_s$, $1 \leqslant r < s \leqslant n$; C_{33}^3 одночленов — произведения $x_r x_s x_t$, $1 \leqslant r < s < t \leqslant n$; и т. д.

В этих обозначениях

$$g_j(x) = K_{1,j} e_1 + \dots + K_{Q,j} e_Q, \quad K_{1,j},\ \dots,\ K_{Q,j} \text{ — целые числа}, \quad 1 \leqslant j \leqslant q.$$

Если показать, что *тождество* (7) *возможно только при том условии, что все коэффициенты* $c_1, \dots, c_q$ *равны нулю*, то для тех, кто знает линейную алгебру, неравенство $q \leqslant Q$ становится очевидным:

$e_1, \dots, e_Q$ образуют базис из Q элементов, и число элементов q в системе линейно независимых $g_1, \dots, g_q$ не может быть больше Q.

Докажем неравенство $q \leqslant Q$, не опираясь на этот факт. Переписывая (7) в виде

$$\begin{gathered} c_1(K_{1,1} e_1 + \dots + K_{Q,1} e_Q) + \dots + c_q(K_{1,q} e_1 + \dots + K_{Q,q} e_Q) = \\ (c_1 K_{1,1} + \dots + c_q K_{1,q}) e_1 + \dots + (c_1 K_{Q,1} + \dots + c_q K_{Q,q}) e_Q \equiv 0, \end{gathered}$$

видим, что (7) выполняется тогда и только тогда, когда

$$c_1 K_{i,1} + \dots + c_q K_{i,q} = 0 \ \text{ при всех } i,\ 1 \leqslant i \leqslant Q. \tag{16}$$

Будем трактовать (16) как систему Q линейных уравнений с целыми коэффициентами $K_{i,j}$ относительно q неизвестных $c_1, \dots, c_q$. Задача будет решена, если показать, что при условии $q > Q$ (т.е. при условии, что неизвестных больше, чем уравнений) система (16) имеет ненулевое целочисленное решение $c_1, \dots, c_q$.

А это, действительно, так, поскольку для любой совместной (имеющей хоть одно решение) системы уравнений верно следующее более общее

Утверждение. *Совместная система Q линейных уравнений с рациональными коэффициентами и рациональными правыми частями имеет ненулевое решение в рациональных числах, если неизвестных больше, чем уравнений.*

При $Q = 1$ утверждение очевидно, и остается доказать его по индукции при $Q > 1$.

Рассмотрим систему Q уравнений относительно неизвестных $X_1, \dots, X_q$, $q > Q$, с рациональными коэффициентами $R_{i,j}$ и рациональными правыми частями R_i, $1 \leqslant i \leqslant Q$, $1 \leqslant j \leqslant q$:

$$\begin{gathered} R_{1,1}X_1 + \dots + R_{1,q}X_q = R_1, \\ R_{2,1}X_1 + \dots + R_{2,q}X_q = R_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ R_{Q,1}X_1 + \dots + R_{Q,q}X_q = R_Q. \end{gathered}$$

Пусть система совместна и не все $R_{i,j}$ равны 0 (случай $R_{i,j} \equiv 0$ и $R_i \equiv 0$ тривиален). Можно считать (если нужно, изменив нумерацию уравнений и неизвестных), что $R_{1,1} \neq 0$. Вычитая первое уравнение, умноженное на $R_{i,1}/R_{1,1}$ из уравнения с номером i, $2 \leqslant i \leqslant Q$, исключим X_1 из всех уравнений, кроме первого, и перейдем к системе

$$\begin{aligned} R_{1,1}X_1 + R_{1,2}X_2 + \dots + R_{1,q}X_q &= R_1, \\ r_{2,2}X_2 + \dots + r_{2,q}X_q &= r_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots& \\ r_{Q,2}X_2 + \dots + r_{Q,q}X_q &= r_Q. \end{aligned}$$

По предположению индукции существуют рациональные, не все равные нулю, числа $X_2, \dots, X_q$, $q > Q$, удовлетворяющие всем уравнениям, кроме первого; подставляя их в первое уравнение, находим также и X_1.

Для однородных (с правыми частями $R_i = 0$) уравнений из доказанного утверждения следует существование ненулевого *целочисленного* решения.

9. Квадрат получился бы при $s = n + 1 - s = 17$, но s должно быть четным, поскольку $x \in X$.

10. Если — вместо пары $(n = 33, d = 561)$ — попробовать рассмотреть пару $(n = 29, d = 435)$, то — вместо таблицы, использованной при исследовании свойств многочлена $F(s)$ из (5), — получается таблица 2, или, что то же, табли-

s	$s+6$	$s+10$	$s+14$	$s+18$	$s+22$	$s+26$
6	12	16	20	24	28	32
10	16	20	24	28	32	36
14	20	24	28	32	36	40
18	24	28	32	36	40	44
22	28	32	36	40	44	48
26	32	36	40	44	48	52
30	36	40	44	48	52	56

Таблица 2.

s	$s+6$	$s+10$	$s+14$	$s+18$	$s+22$	$s+26$
6	$3\cdot 2^2$	2^4	$5\cdot 2^2$	$3\cdot 2^3$	$7\cdot 2^2$	2^5
10	2^4	$5\cdot 2^2$	$3\cdot 2^3$	$7\cdot 2^2$	2^5	$9\cdot 2^2$
14	$5\cdot 2^2$	$3\cdot 2^3$	$7\cdot 2^2$	2^5	$9\cdot 2^2$	$5\cdot 2^3$
18	$3\cdot 2^3$	$7\cdot 2^2$	2^5	$9\cdot 2^2$	$5\cdot 2^3$	$11\cdot 2^2$
22	$7\cdot 2^2$	2^5	$9\cdot 2^2$	$5\cdot 2^3$	$11\cdot 2^2$	$3\cdot 2^4$
26	2^5	$9\cdot 2^2$	$5\cdot 2^3$	$11\cdot 2^2$	$3\cdot 2^4$	$13\cdot 2^2$
30	$9\cdot 2^2$	$5\cdot 2^3$	$11\cdot 2^2$	$3\cdot 2^4$	$13\cdot 2^2$	$7\cdot 2^3$

Таблица 3.

ца 3, позволяющая утверждать, что значения (нового — 6-й степени) многочлена

$$F(s) = (s+6)(s+10)(s+14)(s+18)(s+22)(s+26)$$

при $s = 6, 10, 14, 18, 22, 26$ делятся на 2^{17}, а $F(30)$ делится лишь на 2^{16} и не делится на 2^{17}; однако — вместо (9) — можно получить лишь неравенства

$$q \leqslant Q = \sum_{k=0}^{6} C_{29}^k = 621\,616, \quad H = 2^{28} = 268\,435\,456, \quad H/Q > 431.$$

Оценка $H/Q > 431$ чуть хуже, чем требуется для обоснования контрпримера в $\mathbb{R}^d$ при $d = 435$. Тем не менее, пара $(n = 29, d = 435)$ представляется «перспективной»: едва ли при разбиении соответствующего графа на клики *все они* могут оказаться максимальными, и если бы удалось сосчитать, сколько может быть непересекающихся клик, содержащих — *каждая* — по Q вершин, то число 431 в последней оценке, возможно, удалось бы заменить числом 436 .

11. Подробнее эти слова означают следующее.

a) При $n = 41$ вложим n-мерный куб $[-1, 1]^n$ в $(n+1)$-мерное пространство с координатами $\{x_j\}_{j=0}^n$, и, трактуя $[-1, 1]^{41}$ как 41-мерную грань $x_0 = 1$ куба $[-1, 1]^{42}$, определим X подобно тому, как это было сделано прежде: вершина $\{x_j\}_{j=0}^n$, $x_j = \pm 1$, принадлежит к X, если $x_0 = 1$ и число минус единиц среди $\{x_j\}_{j=1}^n$ четно.

Ясно, что X содержит $H = 2^{n-1}$ точек: $|X| = H = 2^{40}$.

b) Так же, как прежде, отобразим X на подмножество Y вершин d-мерного куба $[-1, 1]^d$, $d = C_{42}^2 = 861$.

Рассмотрим множество P всех пар $(i, j), 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n = 41$ (число таких пар равно d, так что их можно перенумеровать числами $k = k(i, j), 1 \leqslant k \leqslant d$) и вершине $x = \{x_j\}_{j=0}^n \in X$ сопоставим точку $y = y(x) \in Y$ с координатами

$$y_k = y_{k(i,j)} = x_{i-1}x_j, \quad (i, j) \in P, \quad 1 \leqslant k = k(i, j) \leqslant d.$$

Множество Y, как и X, содержит H точек: $|Y| = |X| = H = 2^{40}$.

c) Для x, $x' \in X$ скалярное произведение $(x, x') = \sum_{j=0}^n x_j x'_j$ принимает значения

$$42, \pm 38, \pm 34, \pm 30, \pm 26, \pm 22, \pm 18, \pm 14, \pm 10, \pm 6, \pm 2. \tag{17}$$

Связанный с ними многочлен 9-й степени

$$F(s) = (s+6)(s+10)(s+14)(s+18)(s+22)(s+26)(s+30)(s+34)(s+38) \quad (18)$$

обладает следующими свойствами:

$F(s) \equiv 0 \pmod{11}$ при всех $s > 0$ из (17), кроме $s = 42$, и $F(42) \not\equiv 0 \pmod{11}$.

d) Расстояние $|yy'|$ между вершинами $y = y(x)$, $y' = y(x') \in Y$ тогда и только тогда равно диаметру D множества Y, когда скалярное произведение $(x, x') = \pm 2$.

e) Превратим X в граф Γ, соединив ребрами все пары вершин $x, x' \in X$, для которых $(x, x') \neq \pm 2$. Число вершин максимальной клики графа Γ равно $Q = \sum_{k=0}^{9} C_{41}^k$.

То, что их не больше Q, проверяется с использованием свойств многочлена $F(s)$ из (18); то, что их не меньше Q, показывает (сравним с (12)) пример клики

$$X_0 \cup X_2 \cup X_4 \cup X_6 \cup X_8 \cup X_{32} \cup X_{34} \cup X_{36} \cup X_{38} \cup X_{40}.$$

12. Фиксируя любую из координат y_k, получаем разбиение Y на два подмножества Y^+ и Y^- размерности 860 (на которых $y_k = +1$ и $y_k = -1$). Хоть одно из них нельзя разбить на 861 часть диаметра меньше D — иначе (вопреки (13)) Y разбилось бы на 1 722 таких части.

Это дает контрпример (Y^+ или Y^-) к гипотезе Борсука для $d = 860$.

13. При разбиении M_2 на части диаметра меньше D точка N не может попасть в одну часть ни с одной из точек M_1, так как удалена от каждой из них на расстояние D.

14. В d-мерном пространстве введем декартовы координаты $\{u_j\}_{j=1}^d$. Сферу s в k-мерном подпространстве $u_j = 0$, $k+1 \leqslant j \leqslant d$, зададим уравнением

$$\sum_{j=1}^{k} u_j^2 = r^2.$$

Пусть $d > k+1$ (случай $d = k+1$ будет рассмотрен отдельно). Положим $n = d-k-1$ (так что $n \geqslant 1$ и $k+n = d-1$), определим $h \geqslant 0$ из условия

$$r^2 + D^2/4 + h^2 = D^2 \quad (19)$$

(ввиду (15) такое h существует) и в $(n+1)$-мерном подпространстве $u_1 = \ldots = u_k = 0$ возьмем $(n-1)$-мерную сферу s' диаметра D

$$\sum_{j=k+1}^{k+n} u_j^2 = D^2/4, \quad u_d = h.$$

Условие (19) означает, что расстояние от любой точки $P \in s$,

$$P = (u_1, \ldots, u_k, 0, \ldots, 0, 0), \quad \sum_{j=1}^{k} u_j^2 = r^2,$$

до любой точки $Q \in s'$,

$$Q = (0, \ldots, 0, u_{k+1}, \ldots, u_{k+n}, u_d = h), \quad \sum_{j=k+1}^{k+n} u_j^2 = D^2/4,$$

равно D:

$$|PQ|^2 = \left(\sum_{j=1}^{k} u_j^2\right) + \left(\sum_{j=k+1}^{k+n} u_j^2\right) + h^2 = r^2 + D^2/4 + h^2 = D^2. \qquad (20)$$

Объединение множества $M \subset s$ со сферой s' обозначим через M'; по построению диаметр M' равен D. По условию M нельзя разбить на $k+1$ частей диаметра меньше D. Сферу s' нельзя разбить на n частей диаметра меньше D. Иными словами, при разбиении M и s' на части меньшего диаметра минимальное число частей равно соответственно $p(M) \geqslant k+2$ и $n+1$. Поэтому (вследствие (20)) для M' минимальное число частей меньшего диаметра равно $p(M)+n+1 \geqslant k+n+3 = d+2$, то есть M' — контрпример к гипотезе Борсука в d-мерном пространстве:

$$M' \textit{ нельзя разбить на } d+1 \textit{ частей диаметра меньше } D, \qquad (21)$$

и это доказано — при условии (15) — для любого $d > k+1$.

Чтобы получить (21) для $d = k+1$, достаточно, чтобы выполнялось условие $r \leqslant D$. В этом случае M' получается из M добавлением одной точки

$$Q = \left(0, \ldots, 0, u_d = u_{k+1} = \sqrt{D^2 - r^2}\right),$$

лежащей на расстоянии D от всех точек сферы s.

Приложение 1. Теорема Борсука в $\mathbb{R}^2$ и в $\mathbb{R}^3$. Доказательства теоремы для конечных множеств

В Приложении 3 приведено новое доказательство гипотезы Борсука в $\mathbb{R}^3$.

Чтобы разобраться в нем, полезно самостоятельно перенести (переформулировать и доказать) леммы из Приложения 3 на случай $\mathbb{R}^2$.

Поскольку *контрпримеры* к гипотезе Борсука были построены для *конечных* множеств, особый интерес вызывают и *доказательства* для таких множеств.

На конференции в Гамбурге уже упоминавшийся в этой статье Дима Гуревич предложил следующий план решения задачи Борсука для конечных множеств.

Пусть M — конечное множество в d-мерном пространстве, $\operatorname{diam} M = D$. Превратим M в граф $G = G(M)$, соединяя точки P, Q из M тогда и только тогда, когда $|PQ| = D$ (иначе говоря, проведем все «отрезки – диаметры» в M). Назовем ситуацию *особой*, если степень каждой вершины графа G не меньше $d+1$.

Лемма. *Если в $\mathbb{R}^d$ особая ситуация невозможна, то гипотеза Борсука верна для любого конечного множества $M \subset \mathbb{R}^d$.*

Доказательство. Индукция по числу точек M.

Теорема. *Особая ситуация невозможна в $\mathbb{R}^2$ и в $\mathbb{R}^3$.*

Сформулированная теорема

a) верна и без труда проверяется в $\mathbb{R}^2$;

b) верна и довольно сложно доказывается в $\mathbb{R}^3$ (на конференции в Гамбурге доказать ее в $\mathbb{R}^3$ никому не удалось);

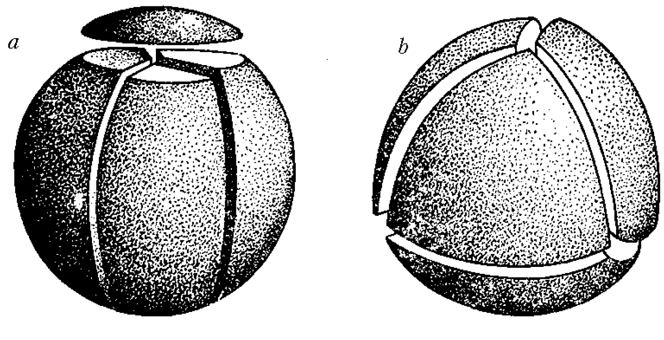

Рис. 3.

c) заведомо не обобщается на $\mathbb{R}^d$ при $d \geqslant 4$; для этих d легко построить контрпримеры к теореме, но они не дают никакого продвижения в задаче Борсука.

Из теоремы и из леммы следует решение задачи Борсука в $\mathbb{R}^2$ и в $\mathbb{R}^3$ для *конечных* множеств.

Сама теорема является следствием утверждений A и B:

A. Пусть $M \subset \mathbb{R}^2$ состоит из n точек; тогда в $G(M)$ максимум n ребер.

B. Пусть $M \subset \mathbb{R}^3$ состоит из n точек; тогда в $G(M)$ максимум $2n-2$ ребра.*)

Приложение 2. Теорема Хадвигера

Сначала разобьем трехмерный шар на 4 части меньшего диаметра.

Одно нужное разбиение шара показано на рис. 3a. Другое (более симметричное) можно получить так: впишем в шар с центром O правильный тетраэдр ABCD; четыре трехгранных угла OBCD, OACD, OABD и OABC, под которыми видны из центра грани тетраэдра, рассекают шар на 4 части меньшего диаметра (рис. 3b).

Теперь, следуя [1], докажем, что верна

Теорема Хадвигера в $\mathbb{R}^3$. *Любое гладкое выпуклое тело V диаметра D в трехмерном пространстве можно разбить на 4 части меньшего диаметра.*

Доказательство. Разобьем шар U диаметра D на четыре части U_1, U_2, U_3, U_4 меньшего диаметра. Каждой граничной точке $v \in V$ сопоставим такую граничную точку $u = u(v) \in U$, что опорная плоскость к V в точке v параллельна касательной плоскости к U в точке u (при этом u выбирается так, чтобы U и V лежали по одну сторону от этих плоскостей). Точку v на границе V отнесем к V_j, если $u(v) \in U_j$, $1 \leqslant j \leqslant 4$. Докажем, что

$$\operatorname{diam} V_j < D, \quad 1 \leqslant j \leqslant 4. \tag{22}$$

Допустим, что при каком-нибудь j это не так и $\operatorname{diam} V_j = D$. Пусть A и B — две граничные точки V_j, для которых $|AB| = D$. Проведем через A и B две плоскости, перпендикулярные отрезку AB. Ясно, что V лежит в полосе между ними (иначе $\operatorname{diam} V > D$). Поэтому проведенные плоскости являются *опорными*

*) Утверждения A и B доказаны в [6, задачи 87 a, b]; см. также [6, задачи 101, 102].

к V. Значит, касательные плоскости к шару в точках $u(A)$ и $u(B)$ (параллельные проведенным опорным плоскостям) *параллельны* друг другу, т.е. $u(A)$ и $u(B)$ — диаметрально противоположные точки шара U. Поэтому расстояние между ними равно D. С другой стороны, по построению $u(A)$ и $u(B)$ принадлежат U_j, так что расстояние между ними меньше D. Полученное противоречие доказывает (22).

Пусть теперь O — любая точка внутри V. Соединим O отрезками со всеми точками $v \in V_j$ и объединение этих отрезков обозначим через W_j, $1 \leqslant j \leqslant 4$. Ясно, что, ввиду (22), $\operatorname{diam} W_j < D$. Построенные «конусы» W_j заполняют все выпуклое тело V, т. е. образуют разбиение V на 4 части диаметра меньше D.

Приложение 3. Теорема Борсука в $\mathbb{R}^3$

В августе 1998 года на X летней конференции Турнира Городов в Гамбурге львовские школьники Руслан Батршин и Максим Давыдов получили

новое доказательство гипотезы Борсука в $\mathbb{R}^3$.

Теорема. *Пусть M — замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^3$, D — диаметр M. Тогда M можно разбить на 4 части — каждая диаметра меньше D.*

Доказательство. Введем следующие обозначения:
B_0 — *наименьший* шар, содержащий M,
S_0 — его сфера,
R_0 — его радиус,
V — замкнутая выпуклая оболочка $M \cap S_0$ (т.е. минимальное замкнутое выпуклое множество, содержащее все точки множества M, попавшие на сферу S_0).

Лемма 1. *V содержит центр 0 шара B_0.*

Лемма 2. *Возможны три случая:*
(a) *V — отрезок длины $2R_0$,*
(b) *V — треугольник в экваториальной плоскости B_0,*
(c) *V содержит вписанный в шар B_0 тетраэдр $T \ni 0$.*

Лемма 3 (о минимаксе). *Пусть T_0 — правильный тетраэдр, вписанный в шар B_0, ρ_0 — длина его ребра; T — неправильный тетраэдр, вписанный в шар B_0 и содержащий центр 0 шара B_0, ρ — длина наибольшего ребра T. Тогда $\rho > \rho_0$.*

Используя конструкцию, изображенную на рис. 3b (см. Приложение 2), разделим шар B_0 на четыре части C_1, C_2, C_3, C_4.

Лемма 4. *$\operatorname{diam} C_j = \rho_0$, $1 \leqslant j \leqslant 4$.*

В случаях (a) и (b) (см. лемму 2) теорема Борсука легко следует из леммы 4.

В случае (c), если тетраэдр T в лемме 2 — неправильный, теорема Борсука следует из лемм 3 и 4.

Наконец, пусть T в случае (c) — правильный тетраэдр $ABCD$ (с ребром ρ_0), так что $\operatorname{diam} M \geqslant \rho_0$. Тогда построим тетраэдр $T' = A'B'C'D'$, симметричный T относительно центра 0 шара B_0. Исходя из T', проведем такое построение, как на рис. 3b, и применим лемму 4.

Если $\operatorname{diam}(M \cap C_j) < \rho_0$, $1 \leqslant j \leqslant 4$, то теорема доказана.

Если $\operatorname{diam}(M \cap C_j) = \rho_0$ при некотором j, то M содержит ребро T'. Пусть для определенности это — ребро, выходящее из вершины A'. Тогда $M \supset AA'$, так что $\operatorname{diam} M = 2R_0 > \rho_0$, и теорема в этом случае тоже доказана.

Важное замечание. Леммы 1–3 обобщаются на все размерности $d > 3$, и лишь при обобщении леммы 4 доказательство не проходит уже для $d = 4$.

Список литературы

[1] *Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц.* Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. М.: Наука, 1965.

[2] *Kahn J., Kalai G.* // Bull. AMS (N. S.) Vol. 29. No 1. 1993. P. 60-62.

[3] *Nilli A.* // Contemp. Math. Vol. 178. 1994. P. 209-210.

[4] *Райгородский А.* // УМН. Т. 52. Вып. 6. 1997. С. 181-182.

[5] *Константинов Н. Н.* // Математическое просвещение. Сер 3, вып. 1, 1997. С. 164-174.

[6] *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. М.: Наука, 1974.

[7] *Райгородский А.* // УМН, 1999. В печати.