n-мерный куб, многочлены и решение проблемы Борсука

А. Б. Скопенков

1. Введение

В 1993 г. Д. Кан и Г. Калаи [5], следуя идеям Болтянского, Эрдеша и Лармана, построили контрпример к гипотезе Борсука. Они показали, что для некоторых d некоторое подмножество вершин d-мерного куба может быть разбито на части меньшего диаметра, только если количество частей растет вместе с d примерно как $1{,}2^{\sqrt{d}}$. Это, конечно, больше $d+1$ для больших d. Конкретно, для $d = 1325$ гипотеза Борсука неверна. Построение Кана и Калаи (см. [5, 8]) было основано на комбинаторной теореме П. Фрэнкла и Р. Вильсона [3]. Израильский математик Алон Нилли разобрался в доказательстве теоремы Фрэнкла – Вильсона. Это позволило ему упростить построение Кана и Калаи, а также снизить наименьшую известную размерность, в которой гипотеза Борсука заведомо неверна, с 1325 до 946 [6]. Дальнейшие результаты в этом направлении были получены А. Гайфуллиным, Д. Гуревичем и А. Райгородским [4, 7].

Цель настоящей статьи — воспроизвести (упрощенное) доказательство Нилли[1)]. Это доказательство — самое простое из известных сегодня, хотя другие доказательства дают более сильные результаты [4, 7]. Наиболее элементарные шаги сформулированы в виде задач. Звездочкой отмечены задачи, не используемые в дальнейшем.

2. Построение контрпримера

Начнем с необходимых определений. *Точкой* (или, что то же самое, *вектором*) $x = (x_1, \dots, x_n)$ n-мерного пространства называется упорядоченный набор n чисел. *Расстояние* между точками $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ определяется формулой $|x, y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$. Нам понадобится также *скалярное произведение* векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$, определяемое формулой $(x, y) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$. Полезность скалярного произведения для изучения расстояний (а, следовательно, и диаметров) иллюстрируется формулой

$$(*) \qquad |x, y|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 + y_1^2 + \dots + y_n^2 - 2(x, y).$$

Пусть $E_2^n = \{(x_1, \dots, x_n) |\ x_i = \pm 1\}$ — множество вершин n-мерного куба. Начиная с этого момента, через x и y будем обозначать вершины n-мерного куба (а

[1)] Построение контрпримера к гипотезе Борсука — удивительный пример важного результата в современной математике, не требующего для полного понимания полугодового специального университетского курса (после двухгодового обязательного курса).

не произвольные точки n-мерного пространства). Для вершин n-мерного куба формула $(*)$ выглядит особенно просто:

$$(**) \qquad |x, y|^2 = 2n - 2(x, y).$$

Контрпример к гипотезе Борсука будет строиться не в E_2^n, а в $E_2^{n^2}$. Вершины n^2-мерного куба удобно задавать наборами (z_{ij}), в которых индексы i, j пробегают независимо числа от 1 до n (вместо наборов (z_i), в которых индекс i пробегает числа от 1 до n^2). Поставим в соответствие каждой вершине $x = (x_1, \ldots, x_n)$ из n-мерного куба вершину $fx = (x_i x_j)$ из n^2-мерного куба.

Задача 2.1.a) Найдите $f(1, -1, -1)$ и $f(-1, 1, 1)$.

b) $fx = f(-x)$, где $-(x_1, \ldots, x_n) = (-x_1, \ldots, -x_n)$.

c) Если $fx = fy$, то $y = \pm x$.

d) Пусть $M' = \{(x_1, \ldots, x_n) \in E_2^n |\ x_1 = 1\}$ — $(n-1)$-мерная грань n-мерного куба. Тогда $fx \neq fy$ для любых двух различных точек $x, y \in M'$.

e) Если $(z_{ij}) = fx$, то $z_{ii} = 1$ и $z_{ij} = z_{ji}$.

Определение отображения f мотивируется следующим его красивым свойством.

Задача 2.2. $(fx, fy) = (x, y)^2$.

Контрпримером к гипотезе Борсука является f-образ множества

$$M = \{x \in E_2^n |\ x_1 = 1 \text{ и среди чисел } x_1, \ldots, x_n \text{ число минус единиц четно}\}$$

(для некоторых n, делящихся на 4). Задача 2.1.d иллюстрирует, почему в качестве элементов множества M мы взяли не все вершины n-мерного куба, а только вершины x с $x_1 = 1$. Следующая задача поясняет, почему мы взяли n кратным 4, и взяли только вершины $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с четным числом минус единиц среди $x_1, \ldots, x_n$.

Задача 2.3. Если n делится на 4 и в каждом из наборов $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in E_2^n$ четное число минус единиц, то (x, y) делится на 4.

Задача 2.4. $|M| = 2^{n-2}$, где через $|X|$ обозначается число элементов множества X.

Теорема. *Для достаточно большого простого числа p и $n = 4p$ множество fM в n^2-мерном пространстве нельзя разбить на $n^2 + 1$ часть меньшего диаметра.*

3. Идея доказательства

Теорема вытекает из Наблюдения, Основной Леммы и Задачи 3.2.

Наблюдение. *Если множество fM можно разбить на k частей меньшего диаметра, то M можно разбить на k частей, каждая (одна) из которых не содержит пары ортогональных векторов.*

Чтобы сделать Наблюдение, начнем с изучения расстояний между точками множества fM и изучения его диаметра. Из $(**)$ и задачи 2.2 вытекает, что $|fx, fy|^2 = 2n^2 - 2(x, y)^2$. Поэтому $|fx, fy| \leqslant n\sqrt{2}$ для любых $x, y \in E_2^n$. Более того,

$$(***) \qquad |fx, fy| = n\sqrt{2} \text{ тогда и только тогда, когда } (x, y) = 0$$

(такие векторы x, y называются *ортогональными*). Начиная с этого момента, пусть n четно. Тогда в M найдется пара ортогональных векторов (заметим, хотя это и не используется в дальнейшем, что при нечетном n в M не найдется пары ортогональных векторов). Из этого и (***) вытекает, что $\operatorname{diam} fM = n\sqrt{2}$. Более того, расстояние между точками $fx, fy \in fM$ равно $\operatorname{diam} fM$ тогда и только тогда, когда $(x, y) = 0$.

Если множество fM разбито на k частей $A_1, \ldots, A_k$, то их прообразы $f^{-1}A_1$, $f^{-1}A_2 \ldots, f^{-1}A_k$ образуют разбиение множества M на k частей. Из задачи 2.1.d следует, что $|A_i| = |f^{-1}A_i|$. Из (***) и равенства $\operatorname{diam} fM = n\sqrt{2}$ следует, что каждая из частей A_i имеет диаметр, меньший $\operatorname{diam} M$, тогда и только тогда, когда в каждой (одной) из частей $f^{-1}A_i$ никакие два вектора не ортогональны. Итак, Наблюдение сделано.

Мы хотим доказать, что k велико (точнее, $k > n^2 + 1$). Для этого достаточно доказать, что $|f^{-1}A_i| = |A_i|$ мало (точнее, $|A_i| < \dfrac{|M|}{n^2+1} = \dfrac{2^{n-2}}{n^2+1}$) для каждого $i = 1, \ldots, k$. Оказывается, что замеченного свойства множества $f^{-1}A_i$ (никакие два его вектора не ортогональны) достаточно для нужной верхней оценки на $|f^{-1}A_i|$. Приведем простой пример. Пусть $A \subset M$ и никакие два вектора из A не ортогональны. Тогда из задач 2.4 и 3.1 следует, что $|A| \leqslant 2^{n-2} - 1$ (поэтому $k \geqslant 2$). Следующая лемма усиливает эту тривиальную оценку.

Основная лемма. *Пусть p — простое (не обязательно большое!), $n = 4p$, $A \subset M$ и никакие два вектора из A не ортогональны. Тогда*

$$|A| \leqslant \alpha(n) = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \cdots + C_{n-1}^{\frac{n}{4}-1}.$$

Задача 3.2. (Оценка) $\alpha(n) < \dfrac{n}{4} C_{n-1}^{\frac{n}{4}-1} < \dfrac{2^{n-2}}{n^2+1}$ для достаточно больших n (указание: используйте формулу Стирлинга $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}} = 1$).

4. Многочлены и доказательство основной леммы

При доказательстве Основной Леммы можно забыть про конструкцию n^2-мерного куба и отображения f, зато нужно будет проделать новую конструкцию. Чтобы сформулировать данное свойство множества A (никакие два вектора из A не ортогональны) на удобном для доказательства языке многочленов, введем определения. Начиная с этого момента, пусть p — простое (не обязательно большое). Положим $G(t) = (t-1)(t-2)\ldots(t-p+1)$.

Задача 4.1. Для целых t, $G(t)$ делится на p тогда и только тогда, когда t не делится на p.

Для каждого вектора $a \in A$ определим многочлен от $n-1$ переменной $x_2, \ldots, x_n$ формулой $F_a(x_2, \ldots, x_n) = G((a, x))$, где $x = (1, x_2, \ldots, x_n)$. Раскроем скобки в произведении $G((a, x))$ и в каждом из полученных одночленов будем заменять x_i^2 на 1, пока это возможно. Полученный многочлен обозначим $\tilde{F}_a(x_2, \ldots, x_n)$. Он будет *свободен от квадратов*, т.е. будет суммой одночленов $x_{i_1} \cdot \cdots \cdot x_{i_s}$, где $i_1, \ldots, i_s$ — различные числа от 2 до n. Его степень не будет превосходить $p-1$ (*степенью* одночлена $x_1^{b_1} \ldots x_s^{b_s}$ называется число $b_1 + \cdots + b_s$; *степенью* многочлена, являющегося непустой суммой различных одночленов с числовыми коэффициентами, называется максимум степеней одночленов из этой суммы). Пусть A' — множество свободных от квадратов многочленов степени не более $p-1$. Основная Лемма следует из нижеследующих Леммы 1 и задач 4.2 и 4.5.

Лемма 1. *Пусть p — простое, $n=4p$, $A \subset M$ и никакие два вектора из A не ортогональны. Тогда семейство многочленов $\{\tilde F_a(x_2,\dots,x_n)\}_{a\in A}$ линейно независимо.*

Многочлен $\tilde F$ называется *линейно выражающимся* через многочлены $\tilde F_1,\dots$ $\dots,\tilde F_s$, если существуют рациональные числа $\lambda_1,\dots,\lambda_s$, такие что $\tilde F = \lambda_1\tilde F_1 +$ $+\dots+\lambda_s\tilde F_s$. Например, многочлен x_2 линейно выражается через многочлены $2x_1$, 1 и x_1+x_2. Семейство многочленов называется *линейно независимым*, если ни один из них не выражается линейно через остальные. Например, семейство из n многочленов $1, x_2, x_3, \dots, x_n$ является линейно независимым.

Задача 4.2. a) Семейство многочленов $x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_s}$, где $s=0,\dots,p-1$ и $i_1,\dots,i_s$ — различные числа от 2 до n, является линейно независимым.

b) Любой многочлен из A' линейно выражается через многочлены системы, указанной в a) (такие линейно независимые системы называются *базисами* множества A').

c) В системе из a) ровно $\alpha(n)$ многочленов.

Доказательство Леммы 1. Пусть, напротив, существуют рациональные числа $\lambda_1,\dots,\lambda_s$, такие что

$$\tilde F_a = \lambda_1 \tilde F_{a_1} + \dots + \lambda_s \tilde F_{a_s} \qquad (****)$$

для некоторых $a, a_1,\dots,a_s \in A$. Разберем сначала случай целых $\lambda_1,\dots,\lambda_s$. Подставим в равенство (****) значения $x_2=a_2,\dots,x_n=a_n$. Из $(a,a)=n=4p$ и задачи 4.1 вытекает, что левая часть равенства (****) не делится на p. Из задачи 4.1 и нижеследующей задачи 4.3 вытекает, что правая часть равенства (****) делится на p. Полученное противоречие доказывает лемму.

Задача 4.3. Если $a,b\in M$ различны и не ортогональны, то (a,b) не делится на p. (Указание: в противном случае $(a,b)\in\{\pm p, \pm 2p, \pm 3p\}$, что невозможно по задаче 2.3.)

Задача 4.4. Приведите аналогично к противоречию общий случай, когда $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ рациональны. (Указание: домножьте равенство (****) на общий знаменатель и используйте метод спуска.)

Задача 4.5. Если $\tilde F_1,\dots,\tilde F_k$ — линейно независимая система в A', а $Q_1,\dots$ $\dots,Q_s$ — базис в A', то $k\leqslant s$. (Указание: сначала докажите, что систему $\tilde F_1,\dots,\tilde F_k$ можно дополнить до базиса. Поэтому можно с самого начала считать, что $\tilde F_1,\dots,\tilde F_k$ — базис. Поскольку $\tilde F_1$ линейно выражается через $Q_1,\dots,Q_s$, так что не все коэффициенты нулевые, то в системе $\tilde F_1,\dots,\tilde F_k$ можно заменить $\tilde F_1$ на один из Q_i, так что полученная система тоже будет базисом. Повторяя такие замены несколько раз, мы получим базис $Q_{i_1},\dots,Q_{i_k}$. Значит, $k\leqslant s$.)

Благодарности

Я хочу поблагодарить Н. П. Долбилина и А. М. Райгородского, от которых я узнал контрпримеры к гипотезе Борсука, учеников физ.-мат. школы им.

А. Н. Колмогорова и школы №57 г. Москвы, которые узнали эти контрпримеры от меня, а также В. Н. Дубровского за полезные обсуждения настоящей заметки.

Список литературы

[1] *Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц.* Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. М.: Наука, 1965.

[2] *K. Borsuk.* Fund. Math. Vol. 20, 1933. P. 177–190.

[3] *P. Frankl, R. Wilson.* Combinatorica. Vol. 1, 1981. P. 259–286.

[4] *М. Л. Гервер.* Математическое Просвещение, сер. 3, вып. 3. М.: МЦНМО, 1999. С. 168 – 183.

[5] *Kahn J., Kalai G.* // Bull. AMS (N. S.) Vol. 29. No 1. 1993. P. 60–62.

[6] *Nilli A.* // Contemp. Math. Vol. 178. 1994. P. 209-210.

[7] *Райгородский А.* // УМН. Т. 52. Вып. 6. 1997. С. 181-182.

[8] *A. Skopenkov.* Quantum Vol 7, No 1, 1996. P. 16–21, 63.