# Отклики

## Связь основной теоремы алгебры с теорией непрерывных групп

Б. Р. Френкин

Темой первого выпуска настоящей серии стала теорема об алгебраической замкнутости поля комплексных чисел [1, с. 30 – 95]. Как отмечено в одной из статей указанного выпуска, «каждый раздел математики имеет собственное доказательство основной теоремы алгебры» [1, с. 71, Е. А. Горин «От спектрального радиуса к основной теореме алгебры»]. Большинство этих доказательств не предназначено, так сказать, для первого знакомства с теоремой, поскольку сами они опираются на более сложные результаты. Их смысл в другом: выявить связь между существенными математическими фактами, на первый взгляд далекими друг от друга. По меньшей мере два таких доказательства, естественных по своей логике, можно провести и в терминах теории непрерывных групп.

Теорема о существовании комплексного корня у любого многочлена ненулевой степени с комплексными коэффициентами равносильна следующему утверждению: поле вещественных чисел не имеет конечномерных расширений размерности выше двух. В такой форме мы и будем ее доказывать.

Пусть $S$ — конечномерное собственное расширение поля вещественных чисел. Иными словами, $S$ - вещественное линейное пространство конечной размерности $N \geqslant 2$, на котором дополнительно введена операция умножения со следующими свойствами: 1) выполнены аксиомы поля; 2) $S$ содержит подполе $R$, изоморфное полю вещественных чисел; 3) умножение на элементы $R$ совпадает с умножением на вещественные числа в смысле вещественного линейного пространства (и потому $R$ является одномерным подпространством). Покажем, что операцию с такими свойствами можно ввести лишь при $N = 2$.

Операции умножения и взятия обратного непрерывны в естественной топологии пространства $S$. Читатель может убедиться в этом, используя непрерывность операций сложения векторов и умножения на вещественные коэффициенты (см. также Дополнение в конце заметки). Таким образом, ненулевые элементы $S$ образуют топологическую группу по умножению $G$. Она коммутативна, поскольку $S$ является полем. Ввиду свойства 2) в $G$ содержится подгруппа $H$, изоморфная группе положительных вещественных чисел по умножению. Из свойства 3) следует, что геометрически $H$ является открытым лучом, исходящим из нуля. Поэтому подгруппа $H$ замкнута в $G$ и факторгруппа $F = G/H$ является непрерывной группой. Она коммутативна и при этом гомеоморфна сфере размерности $N-1$. Но, как известно, группа с такими свойствами существует лишь при $N=2$.

Действительно, сфера конечной размерности компактна, связна и локально евклидова (т. е. локально гомеоморфна конечномерному вещественному линейному пространству). Непрерывная коммутативная группа с такими свойствами является прямой суммой конечного числа групп окружности. Этот факт вытекает из следствия теоремы 36 в [2, с. 90]; см. также [3, с. 270, теорема 49]. Его можно рассматривать как топологический аналог теоремы о разложении конечной абелевой группы в прямую сумму конечных циклических групп.

Таким образом, если на сфере задана коммутативная топологическая группа, то сфера одновременно является тором. Но тогда это окружность (на сфере большей размерности любая окружность стягивается в точку, а для тора это неверно). Как следствие, рассмотренная выше группа $F$ одномерна. Поэтому размерность пространства $S$ равна двум, что и требовалось.

Отметим, что при построении теории непрерывных групп не используется понятие комплексного числа, так что логический круг в изложенном рассуждении невозможен. Вполне естественно с точки зрения геометрической интуиции, что ограничение на возможные расширения поля вещественных чисел возникает из ограничения на топологию их мультипликативных групп. Но последний топологический шаг (сравнение сферы с тором) можно заменить алгебраическим рассуждением, которое выявляет еще одну интересную аналогию.

Предположим, что $F$ является прямой суммой более чем одной группы окружности. Тогда каждая из них содержит два квадратных корня из единицы. Но пересечение этих групп состоит только из единицы, поэтому всего в $F$ таких корней более двух. Пусть $r$ - любой из них, $s$ - его прообраз в $G$. Тогда $s^2$ является элементом подгруппы $H$, и его можно отождествить с положительным вещественным числом. Разделим $s$ на положительный квадратный корень из того же числа. Мы получим квадратный корень из единицы в $G$, который также является прообразом $r$. Как следствие, в $G$ более двух квадратных корней из единицы. Но в поле это невозможно.

Приведенное рассуждение (в котором можно было бы использовать корни любой большей степени) напоминает доказательство того факта, что мультипликативная группа конечного поля циклична [4, с. 144 – 145]. В данном случае место цикличности занимает одномерность, а место конечности поля - его конечномерность над полем вещественных чисел и происходящая отсюда компактность группы $F$. Таким образом, основная теорема алгебры связана - через посредство теории непрерывных групп - со столь различными вопросами, как топология многообразий и строение конечных полей.

Дополнение. Непрерывность умножения и взятия обратного элемента в топологии пространства $S$ можно доказать так. Фиксируем в $S$ базис $e_1, \dots, e_N$. Пусть $a, b \in S$, $x \to a$. Тогда можно представить $x-a$ в виде $\sum\limits_{j=1}^{N} \xi_j e_j$, где $\xi_j \to 0 \quad (j=1,\dots,N)$. С учетом свойств 1), 3) и непрерывности операций векторного пространства

$$(x-a)b = \sum_{j=1}^{N} (\xi_j e_j) b = \sum_{j=1}^{N} \xi_j (e_j b) \to 0.$$

Отсюда следует непрерывность умножения.

Пусть теперь $x_i \to a \neq 0$ при $i \to \infty$, но $x_i^{-1}$ не стремятся к $a^{-1}$. Максимум модуля координат $x_i^{-1}$ в фиксированном базисе обозначим $M_i$. Если $M_i$ ограничены в совокупности, то можно выбрать подпоследовательность, для которой $x_i^{-1}$ стремятся к некоторому пределу $b \neq a^{-1}$. Для нее, с учетом доказанной непрерывности умножения,

$1 = x_i x_i^{-1} \to ab \neq 1$, что невозможно. Поэтому существует подпоследовательность, для которой $M_i \to \infty$. У соответствующих элементов $y_i = x_i^{-1} M_i^{-1}$ максимум модуля координат равен 1, и из них можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторому пределу $c \neq 0$. Для нее $0 = \lim\limits_{i\to\infty} M_i^{-1} = \lim\limits_{i\to\infty} x_i y_i = ac \neq 0$. Полученное противоречие означает, что в действительности взятие обратного элемента — непрерывная операция.

Автор признателен М. Н. Вялому за полезное обсуждение.

## Список литературы


[1] Математическое просвещение. Третья серия, выпуск I. // М.: МЦНМО, 1997.

[2] Моррис С. Двойственность Понтрягина и строение локально компактных абелевых групп. М.: Мир, 1980.

[3] Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1973.

[4] Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968.