

Мой друг Андрей Ходулёв

Г. А. Гальперин

О жизни и творчестве А. Б. Ходулёва

Ушёл из жизни замечательный математик и выдающийся эксперт в области программирования Андрей Ходулёв. Он был одним из самых близких мне друзей. Смерть наступила 10 сентября 1999 г., когда Андрею было лишь немногим больше 45 лет. Его смерть ошеломила меня. Андрей находился в самом расцвете своих творческих сил. Наше интенсивное общение продолжалось непрерывно почти 30 лет, с момента моего знакомства с Андреем в Колмогоровском интернате №18 в 1969 году, когда оба мы были ещё школьниками. Уже тогда Андрей поразил меня независимостью и яркостью своего мышления.

Андрей Ходулёв был замечательным, добрым и скромным человеком, обладая при этом поистине неординарным и гибким умом, широта и глубина которого всегда поражали. Он, будучи выдающимся математиком, глубоко знал физику, астрономию и химию. Я часто заставлял Андрея с журналом «Радио» в руках и неоднократно был свидетелем, как он играючи собирал сложные электронные «штучки», состоящие из транзисторов, микросхем и других устройств. Выписывал Андрей также журнал «Земля и Вселенная», из которого он цитировал интересные сведения: о расположении планет вдоль одной прямой («сизигии») в 1805, 1845, 1982 и 2357 годах и влиянии этого события на земную орбиту; о солнечной активности; о чёрных дырах; и о многом другом, не менее интересном. Андрей высчитывал все затмения и расположения звёзд на небе, и он так мечтал увидеть солнечное затмение в августе 1999 года! В начале 90-х годов мы как-то разговорились с ним о связи математики, физики и астрономии, и Андрей заметил: «Ты забыл ещё химию, которая не менее интересна. К сожалению, я не силен в биологии, но судя по генетике (её математической части), биологию тоже было бы здорово изучить!» Вот выдержка из его письма: «Занимаюсь химией. Ещё читаю книги. Посылаю тебе некоторые фотографии (абстрактные). На досуге можешь подумать, что там изображено, я тебе сообщать не буду».

При обсуждении той или иной математической теории Андрей зачастую привлекал известные ему факты и идеи из других естественных

наук. Вот один пример: мы писали с ним совместную работу по небесной механике [1] (частный случай задачи четырёх тел с нулевой массой), и нужно было доказать одну лемму, которая не сразу далась нам, но после нескольких попыток и одного замечания Андрея (которое я сейчас не помню) это удалось сделать. Я спросил, как ему пришло в голову такое соображение, и он ответил: «Как-то я наблюдал движение роя мух в комнате. По-моему, оно напоминает движение галактик: сначала мухи разлетаются далеко, а потом сближаются, их скорости возрастают, они делают $1 \div 1,5$ оборота друг вокруг друга и разлетаются, а потом сближаются и разбиваются на группы, которые затем движутся независимо; в каждой же группе мухи летают вокруг некоторого центра по эллиптическим орбитам, причём они, как и галактики, стремятся попасть в одну плоскость, а не образовывать, например, нечто вроде шара. Это наблюдение и подало мне мысль, как подойти к решению. Иногда бывают и тройные сближения. Чаше всего они происходят по такой схеме: после взаимодействия двух мух, одна из них, не погасив скорости, сразу же сталкивается с третьей. По-видимому, собрав большую кучу мух — штук 1000 или больше, можно наблюдать явления, характерные для астрономических масштабов, — неоднородность, спирали, волокна». В другой раз мы обсуждали с Андреем отрывок из книги Анри Пуанкаре «Наука и гипотеза» ([2, стр. 122–125]), связанный с вероятным распределением малых планет на зодиаке. Пуанкаре подробно рассмотрел случай равномерного распределения материи и лишь вскользь упомянул о её действительном распределении, в котором изображающие точки образуют как бы дискретные атомы. Андрей сейчас же выдвинул более реальную гипотезу («сферическое распределение») и стал заниматься вычислением соответствующего интеграла, используя по ходу вычислений разнообразные физические соображения, помогающие упростить эти вычисления. В результате он подтвердил утверждение Пуанкаре о маловероятном распределении малых планет вдоль спиралей специальной формы.

Незадолго до окончания школы-интерната Андрей выбирал, в какой Международной Олимпиаде ему лучше участвовать — в математической или физической, и он выбрал математическую (на которой он получил первую премию, как до этого получал на Всесоюзных математических олимпиадах и на физико-математических олимпиадах Физтеха). В результате Андрей был принят без экзаменов на мехмат МГУ, с успехом закончил его, а затем поступил в аспирантуру¹⁾ ИПМ (Институт

¹⁾При поступлении в аспирантуру у Андрея, как и у многих его сокурсников, возникли трудности со сдачей экзамена по истории КПСС. Сейчас можно только шутить по этому поводу, но тогда нам было не до шуток. Но и в истории КПСС Андрей умудрялся находить математические закономерности. Вот составленная им таблица годов съездов партии, начиная с XIV съезда:

прикладной математики), после окончания которой стал сотрудником ИИМ.

Любовь Андрея к программированию проявилась ещё на первом курсе мехмата, когда нам начал читаться курс программирования. Андрей сразу стал среди студентов признанным авторитетом в этой области; это проявлялось, в частности, в том, что чуть ли не весь курс ходил к нему сверяться в правильности составления того или иного алгоритма или программы для ЭВМ. За последующие годы талант и мастерство Ходулёва в программировании отшлифовались настолько, что он стал одним из крупнейших специалистов в этой области не только в России, но и во всём мире (его приглашали консультировать в разные страны Европы и в Японию). Недаром Андрею был поручен в 80-х годах перевод (вместе с его бывшими сокурсниками Надей Вьюковой и Володи Галатенко) книги Дональда Кнута «Искусство программирования для ЭВМ», а в 90-х годах он стал редактором перевода другой книги Д. Кнута «Concrete Mathematics» (авторы R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik), вышедшей в издательстве «Мир» (перевод Б. Б. Походзея и А. Б. Ходулёва). Кроме того, Ходулёв является создателем шрифтов для русского L^AT_EX'a, о чём я узнал весной 1999 г. от него самого.

К его компьютерным талантам я отношу также особую способность и любовь Андрея к головоломкам. (Цитата из его письма: «Во время отдыха я, от нечего делать, рассчитал очко (карточную игру). Я раньше рассчитывал его с меньшей точностью. В этот раз результаты оказались существенно другими. Но выяснилось, что и нынешняя точность недостаточна — надо привлекать компьютер».) Андрей участвовал, с момента их возникновения, в нескольких мировых чемпионатах по головоломкам (World Puzzle Championships), как член команды России, и неизменно показывал на этих соревнованиях высокий результат. И, несмотря на смертельную болезнь, которая стала проявляться уже и внешне, Андрей решил и в этот, последний раз (1998), участвовать в соревновании и занял одно из первых мест. Как написала мне Ольга Леонтьева (председатель жюри этого чемпионата в том году, хорошо знавшая Андрея и уговаривавшая его не ездить на соревнования 1998 года), «только потом я поняла, насколько это было правильно, важно и красиво: он ушёл непобеждённым!»

№ съезда	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	
Год	25	27	30	34	39	
Разность		2	3	4	5	
№ съезда	XIX	XX	XXI	XXII	XXIII	XXIV
Год	52	56	59	61	66	71
Разность		4	3	2	5	5

Ну чем не таблица в стиле аналогичных таблиц из книги В. И. Арнольда [3]?!

О компьютерных талантах Ходулёва должны свидетельствовать его коллеги по работе. Я же ограничусь тем, что написал выше, и далее коснусь только его математических талантов и удивительной (иногда непостижимой для меня) интуиции Андрея, его способности «видеть» ответы на очень трудные математические вопросы и одновременно почувствовать направление, в котором следует искать решение. Особенно здорово это ему удавалось, когда он опирался на аналогии из других естественных наук. Одну из таких аналогий я уже упомянул, и ниже я приведу другие примеры, заимствованные мной из нашей с Андреем многолетней переписки по разным вопросам.

Эта переписка была особенно интенсивной в годы нашего студенчества и аспирантуры (1972–77) и в последние 5 лет (1994–99) по e-mail’у (всего более 100 писем). В 80-е и в начале 90-х годов мы поддерживали интенсивное интеллектуальное общение «устно», когда встречались в МГУ на Московском Математическом Обществе или же у Андрея дома (а иногда в редакции журнала «Квант») и обсуждали разные теории и конкретные задачи. Часть этих обсуждений вылилась в статьи (совместные и порознь), препринты и заметки (например, в решения задач в «Задачнике Кванта», см. [1], [4], [5]), ещё большая часть «осела» в черновых бумагах, многие из которых, увы, с течением лет бесследно пропали, хотя кое-что и сохранилось).

Как правило, идеи и решения Андрея Ходулёва были не только глубокими, но и изобретательными — он умел находить «изюминку» в даже, казалось бы, рутинных вычислениях. Андрей любил и «чувствовал» числа — см. его решение задачи №12 во второй части статьи. Упомянутая уже страсть Андрея к программированию (в широком смысле этого слова), сплавленная с глубокими знаниями, позволяли ему делать «синтетические ходы» в решении трудных задач и видеть в них «невидимое». Особенно изобретателен Андрей был в придумывании примеров и контрпримеров, поэтому довольно часто он находил неожиданные возражения к ясным, казалось бы, формулировкам или гипотезам. Один его неожиданный пример состоял в том, что если хорда, как жесткий отрезок, скользит своими концами по внутренности *выпуклой* гладкой кривой, то фиксированная точка на хорде не обязательно будет описывать *выпуклую* кривую!²⁾

А вот какой контраргумент привел Андрей по поводу общепринятого взгляда на поведение фигур Лиссажу на экране осциллографа. (И опять этот сплав математики и физики, и даже нейрофизиологии!). Если подавать два независимых гармонических колебания с частотами ω_1 и ω_2 на

²⁾ Читатель, попробуй и ты самостоятельно привести такой пример! Казалось бы, просто как Колумбово яйцо, но сразу не получится. А если не знать о его существовании, — пример с окружностью вводит в заблуждение! — то можно подумать, что такого не бывает.

горизонтальную и вертикальную развёртки осциллографа, то на экране будет видна кривая (как правило, медленно вращающаяся), похожая на параболу, или эллипс, или «восьмёрку», или несколько соединённых вместе «восьмёрок». Известно (см. задачу на стр. 26 книги В. И. Арнольда [6]), что если отношение частот $\omega = \omega_1/\omega_2$ *рационально*, то фигура Лиссажу — замкнутая алгебраическая кривая (при целом ω это график многочлена Чебышёва), а если ω *иррационально*, то она заполняет экран осциллографа всюду плотно. (Таково же поведение частицы в прямоугольном бильярде). Отсюда, казалось бы, должно следовать, что при иррациональном отношении частот мы должны видеть весь экран осциллографа полностью светящимся. Каково же было моё удивление, когда я узнал от Андрея, что иррациональность ω никакой роли не играет и никакого свечения экрана не будет!

Цитирую Андрея: «Утверждение о вращающейся фигуре Лиссажу верно лишь в очень грубой абстракции. На самом деле, вращение связано с инерцией зрения, и условие вращения может быть записано в таком виде:

$$\frac{\omega_1}{2\pi m} \gg \frac{1}{\tau}, \quad \frac{\omega_2}{2\pi n} \gg \frac{1}{\tau}, \quad \frac{|2\pi n\omega_1 - 2\pi m\omega_2|}{\max(m, n)} \ll \frac{1}{\tau},$$

где τ — время инерции глаза. Мы будем видеть вращающуюся фигуру Лиссажу с m колебаниями по одной оси и с n — по другой, при этом неважно, рационально или нет отношение ω . Вообще, как известно, рациональность или иррациональность непрерывной физической величины нельзя установить с помощью эксперимента».

Андрея Ходулёва любили все — его друзья, его учителя, его коллеги: со всеми он щедро делился своими знаниями и многочисленными идеями. Ему всегда было интересно, что же происходит в действительности, он всегда стремился узнать как можно больше нового, и он неустанно думал о том, как бы попроще и элегантнее объяснить то или иное явление, будь оно из математики, физики, химии или астрономии. Андрею удалось сохранить до конца своих дней юношеский задор, стремление ко всему новому, умение удивляться и полнокровно жить. Он заряжал своей энергией всех, кто оказывался рядом, и мы, его друзья, благодарны Андрею за то, что нам посчастливилось с ним общаться и «подзаряжаться» частицами его «научной» энергии.

Мне хочется закончить этот рассказ следующей цитатой из письма Андрея ко мне, датированного 13 июля 1973 г.: «...Вскоре (с 17 июля) я уеду отдыхать в точку 44°34' с. ш. и 38°12' в. д. Я пробуду там секунд $1,8 \cdot 10^6$, так что ты не сможешь написать мне вскоре. До свидания. Андрей». Это письмо — одно из десятков других типично ходулёвских писем, которые я получил от Андрея.

Последнее из них датировано 11 сентября 1999 года...

ЗАДАЧИ, ПРОБЛЕМЫ, ИДЕИ, КОНСТРУКЦИИ

Мы с Андреем обсуждали множество разнообразных и интересных вопросов, часть из которых я излагаю ниже. Однако еще большее число проблем (и подходов к их решению) так и остались нерешенными. Я решил взять на себя смелость привести примеры обсуждавшихся вопросов и идей из обеих групп.

Изложенный ниже материал носит «мозаичный» характер в стиле «Математической смеси» Дж. Литтлвуда и не претендует на полноту или завершенность. В его основу положено содержание примерно 100 писем и e-mail'ов, которыми мы обменялись, и тех черновиков, которые мне удалось сохранить. Здесь я описываю наиболее яркие и интересные задачи, которыми мы обменивались, а также частичные результаты, которые мы получили или надеялись получить. К сожалению, из-за ограниченности журнального объёма, я могу привести лишь малую долю этих материалов. Естественно, я выбрал задачи по своему вкусу; возможно, Андрей выбрал бы другое их подмножество.



№1 (МНОГОЧЛЕН ОТ МНОГОЧЛЕНОВ). Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — два вещественных многочлена. Всегда ли существует такой многочлен от двух переменных $R(u, t)$, что $R(f(x), \varphi(x)) = 0$?

РЕШЕНИЕ. Ответ: «всегда». Пусть $\deg f \cdot \deg \varphi = mn$. Рассмотрим «квадрант» многочленов $\{f^k \cdot \varphi^s\}$, $k, s \geq 0$, и большой прямоугольный треугольник, отсекаемый прямой от квадранта (см. рис. 1). Тогда среди многочленов, лежащих в треугольнике, лишь часть линейно независима в пространстве многочленов степени $\leq mn$; действительно, количество

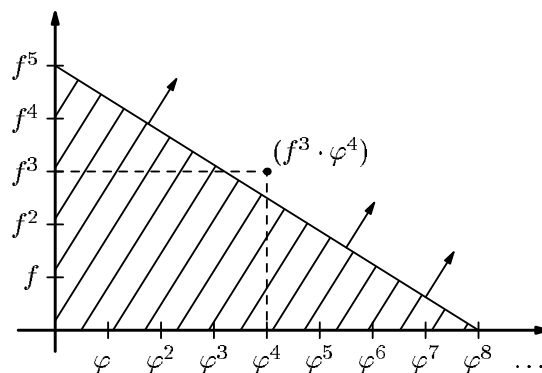


Рис. 1. Квадрант и треугольник многочленов

точек в треугольнике растёт квадратично, а движение гипотенузы происходит линейно. Следовательно, имеется нетривиальная линейная комбинация многочленов, тождественно равная 0. Она и есть искомым многочлен.



№2 (ШКАФ В КОМНАТЕ). *Может ли треугольный шкаф «заклинить» в треугольной комнате (т. е. не существует движения шкафа, оставляющего его внутри комнаты)? А многоугольный шкаф в многоугольной комнате? (Оба многоугольника — выпуклые.)*

ОБСУЖДЕНИЕ. Замечание Ходулёва: «Я не совсем понимаю, что значит „заклинить“. Я считаю, что это означает следующее: все вершины шкафа лежат на разных сторонах комнаты — но не в углах — и шкаф не может осуществить никакое малое движение. Иначе неинтересно (рис. 2).

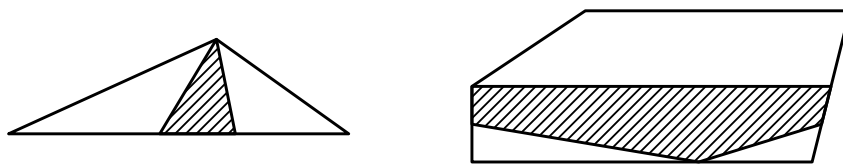


Рис. 2. «Заклинившие» шкафы (вырожденный случай)

В этой постановке я полностью решил задачу. Ответ: при $n = 3$ не может заклинить, хотя решение непростое, с несколькими случаями (между прочим, используется утверждение, которое мы с тобой обсуждали: *если есть 3 полуплоскости, то либо их пересечение имеет непустую внутренность, либо пересечение их дополнений имеет непустую внутренность, либо их границы пересекаются*)).

На это я ответил Андрею, что возможно такое решение (рис. 3): если шкаф-треугольник ABC лежит внутри комнаты $\triangle XYZ$ и $A \in XY$, $B \in YZ$, то геометрическое место точек C во время движения отрезка AB вдоль стен — дуга эллипса с центром в Y (при этом Y — пересечение осей

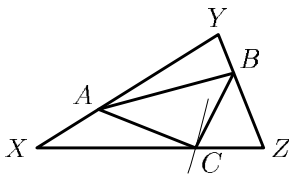


Рис. 3. C движется по дуге эллипса

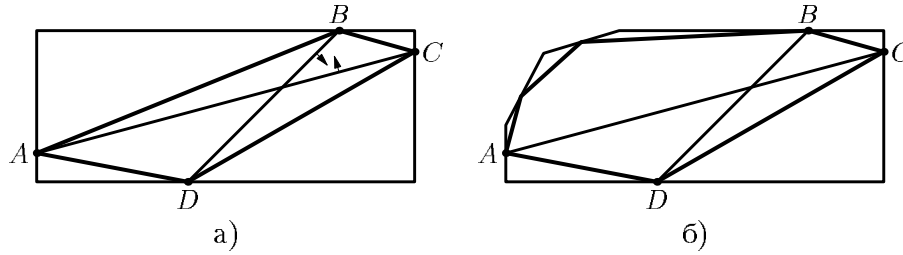


Рис. 4. «Заклинившие» шкафы ($n \geq 4$) (невыврожденный случай)

эллипса). Кусочек этой дуги лежит внутри $\triangle XYZ$, поэтому «шевеление» шкафа внутри комнаты осуществимо.

Он согласился со мной и не стал присылать своего решения, о чём я сейчас сожалею. Для $n > 3$ Ходулёв построил примеры, в которых шкаф заклинивает (рис. 4). Для $n = 4$ диагональ AC может повернуться только против часовой стрелки, а диагональ BD — только по часовой (рис. 4а). Полученное противоречие и доказывает «заклинивание» шкафа. Для любого $n > 4$ пример «заклинившего» шкафа можно построить, исходя из этого примера (рис. 4б).

Я хочу отметить здесь ту самую «изюминку», которую нашел Андрей: противоречие возникает из-за того, что «что-то вращается не в ту сторону» (в данном случае, отрезки AC и BD).

В таких вот «изюминках» и проявлялся талант Андрея.



№3 (ПРЕДЕЛ). Пусть z — комплексное число. Найти предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=-m}^m \frac{1}{z+n}$$

для тех z , для которых он существует.

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим следующую 2π -периодическую функцию $f(x)$ вещественного переменного:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-izx} \text{ при } |x| < \pi, \\ f(x+2\pi) &= f(x). \end{aligned}$$

Разложим ее в ряд Фурье. Коэффициент a_n равен

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-izx} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(z+n)x} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\pi i(z+n)} \left(e^{-i(z+n)\pi} - e^{i(z+n)\pi} \right) = -\frac{e^{in\pi}}{2\pi i(z+n)} (e^{-iz\pi} - e^{iz\pi}) = \\
&= -\frac{(-1)^n}{\pi(z+n)} \frac{e^{iz\pi} - e^{-iz\pi}}{2i} = \frac{(-1)^n \sin \pi z}{\pi(z+n)}.
\end{aligned}$$

Поскольку $f(x)$ кусочно непрерывна и дифференцируема, имеем

$$\begin{aligned}
\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=-m}^m a_n e^{inx} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=-m}^m \frac{(-1)^n \sin \pi z}{\pi(z+n)} e^{inx} = \\
&= \frac{\sin \pi z}{\pi} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=-m}^m \frac{(-1)^n e^{inx}}{z+n} = \frac{\sin \pi z}{\pi} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=-m}^m \frac{e^{in(x-\pi)}}{z+n}.
\end{aligned}$$

Подставим $x = \pi$ в эту формулу, тогда в силу периодичности f

$$\frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^-)}{2} = \frac{e^{-iz\pi} + e^{iz\pi}}{2} = \cos \pi z.$$

Таким образом,

$$\cos \pi z = \frac{\sin \pi z}{\pi} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=-m}^m \frac{1}{z+n},$$

откуда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=-m}^m \frac{1}{z+n} = \pi \cdot \operatorname{ctg} \pi z.$$

Равенство выполняется для любого комплексного z , для которого $\sin \pi z \neq 0$, т. е. для всех комплексных $z \notin \mathbb{Z}$. При $z \in \mathbb{Z}$ предел не существует по очевидным причинам.



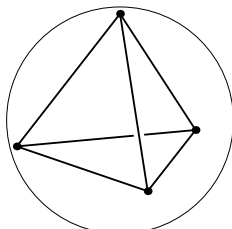
№4 (ЭЛЕКТРОНЫ НА СФЕРЕ). На внутренней стороне металлической сферы располагаются N электронов — точечных частиц равной (единичной) массы и равного отрицательного заряда (полагаем его равным -1). В силу отталкивания электронов, они стремятся улететь на бесконечность, но им мешает сфера, и поэтому электроны «разбегаются» по сфере так, чтобы минимизировать потенциальную энергию системы

$$U = \sum_{i \neq j} \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|},$$

здесь \vec{r}_i и \vec{r}_j — радиус-векторы, идущие из центра сферы в электроны i и j , $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ — расстояние между электронами. Для каждого числа $N = 2, 3, 4, \dots$ электронов указать их расположения на сфере, минимизирующие потенциальную энергию.

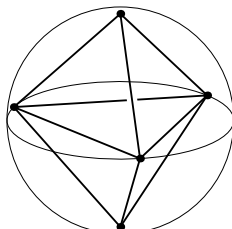
ТАБЛИЦА РАСПОЛОЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ НА СФЕРЕ

$N = 4$

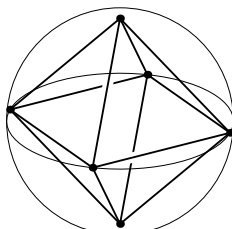


правильный тетраэдр

$N = 5$

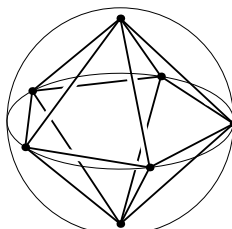


$N = 6$



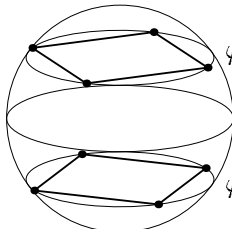
правильный октаэдр

$N = 7$



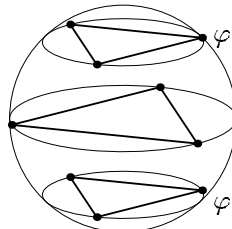
правильный пятиугольник в
экваториальной плоскости

$N = 8$



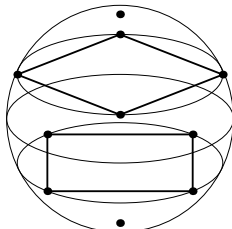
квадраты развернуты на 45°

$N = 9$



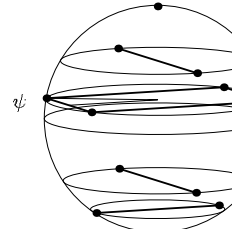
правильные треугольники,
экваториальный развернут на 180°

$N = 10$



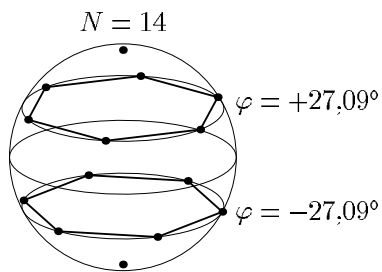
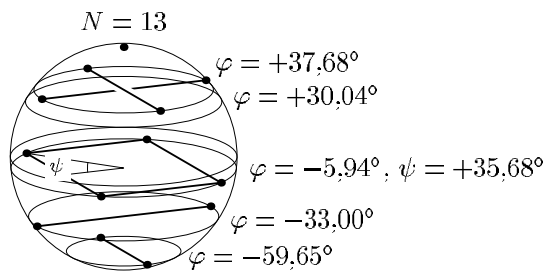
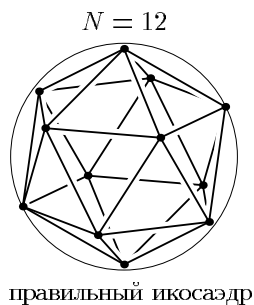
квадраты развернуты на 45°

$N = 11$

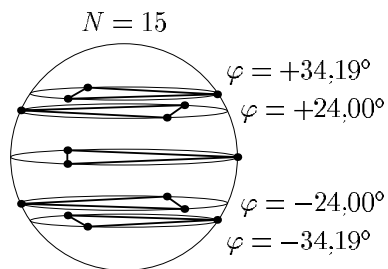


$\varphi = +31,02^\circ$
 $\varphi = +9,69^\circ, \psi = 29,74^\circ$
 $\varphi = -33,55^\circ$
 $\varphi = -53,70^\circ$

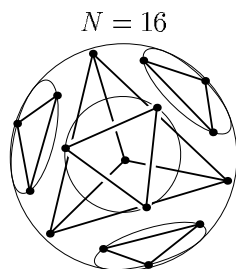
ТАБЛИЦА РАСПОЛОЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ НА СФЕРЕ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)



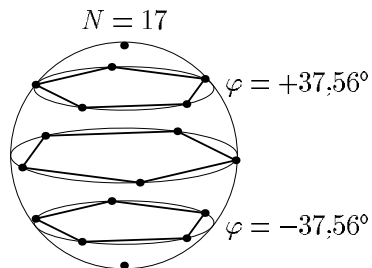
правильные шестиугольники развернуты на 30°



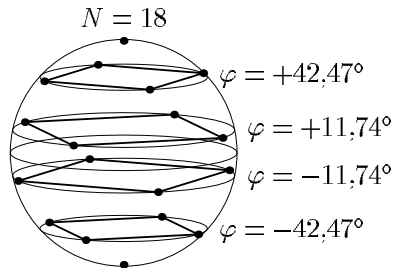
все треугольники — правильные;
 крайние развернуты относительно
 экваториального на угол $\pm 6,96^\circ$,
 средние развернуты на $180^\circ \pm 5,62^\circ$



правильные треугольники над гранями
 тетраэдра имеют угловой размер $30,7^\circ$,
 каждый из них повернут относительно
 прямой, соединяющей его центр и проти-
 воположную вершину тетраэдра на $7,29^\circ$

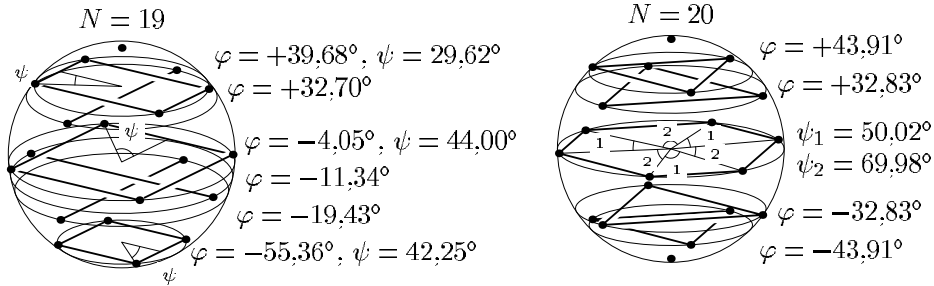


все пятиугольники —
 правильные



квадраты последовательно сверху вниз
 разворачиваются на 45°

ТАБЛИЦА РАСПОЛОЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ НА СФЕРЕ (ОКОНЧАНИЕ)



плоскости симметрии правильных
 треугольников совпадают с плоскостями
 симметрии центрального шестиугольника

ОБСУЖДЕНИЕ. Решение этой задачи для $N = 2, 3, 4, 6$ и 12 приведено в статье Н. Н. Андреева и В. А. Юдина [7]. Я привел эту задачу здесь для того, чтобы показать результаты работы на ЭВМ, проделанной А. Ходулёвым. Я поставил этот вопрос перед Андреем в 1974 году на четвертом курсе мехмата, когда стал преподаваться курс «Оптимальное управление» (ОПУ) под руководством «двух Владимиров Михайловичей» — профессоров МГУ В. М. Алексеева и В. М. Тихомирова. Мне он сразу пришел в голову, когда я соединил две идеи — задачу о минимизации расположения точек на сфере, в которой целевая функция $\min_{i \neq j} |\vec{r}_i - \vec{r}_j| \rightarrow \max$ (эта задача частично исследовалась в известной книге по геометрии Шклярского, Ченцова и Яглома [9]), и новые сведения из ОПУ. Андрей с радостью воспринял эту задачу, но через некоторое время написал мне: «ОПУ не особенно применимо к задаче про электроны. Здесь годится только обычное конечномерное правило множителей Лагранжа, но оно мало помогает. Эту задачу можно решить на ЭВМ». Что он с блеском и проделал! (См. таблицу расположения N электронов для $N = 4, \dots, 20$ на сс. 17–19). Задача про электроны воодушевила Андрея еще и тем, что он «...смог почерпнуть некоторые сведения в учебнике по химии. Рассмотрим атом A , имеющий N валентных электронов и пусть он образует молекулу AB_N . Из соображений симметрии, N атомов элемента B расположатся на равном расстоянии от A , т.е. на поверхности сферы, и между ними будет действовать сила электростатического отталкивания. Экспериментально установлены конфигурации таких молекул с разными $N = 1, \dots, 7$. Там же приведены картинки: для $N = 4$ — тетраэдр, для $N = 5$ — два тетраэдра с общей треугольной гранью; для $N = 6$ — октаэдр и для $N = 7$ — две пятиугольные пирамиды, прикрепленные друг к другу своими общими пятиугольными основаниями. Можно предположить, что

электроны займут на сфере такое же положение. Так химия помогает математике».

Я считаю эту задачу достойной того, чтобы передоказать результаты Ходулёва, объяснить их теоретически (т. е. переоткрыть метод, которым он нашёл глобальные минимумы) и продолжить таблицу для $N > 20$.



№5 (ШАХМАТНЫЙ КОРОЛЬ³⁾). *Шахматный король обошел все клетки шахматной доски ровно по одному разу и вернулся в исходную клетку, причём он нигде не пересекал своего следа. Доказать, что король сделал не менее 28 коротких ходов (см. рис. 5). Найти верхнюю оценку числа коротких ходов для шахматной доски $m \times n$. Точна ли эта оценка?*



Рис. 5. Ходы короля

РЕШЕНИЕ. Маршрут короля — замкнутая несамопересекающаяся ломаная. Король побывал везде, в частности, во всех $2m + 2n - 4$ клетках периметра. Эти клетки разбивают всю ломаную на $2m + 2n - 4$ кусков. Основное утверждение:

Каждый кусок соединяет две соседние клетки периметра.

Действительно, если бы кусок соединял не соседние клетки, то клетки периметра оказались бы разделенными на две части и король не смог бы побывать в обеих частях, не пересекая куска (рис. 6). Основное утверждение доказано.

Теперь заметим, что соседние клетки периметра разноцветны, а единственная возможность для короля перейти на клетку другого цвета — это сделать короткий ход. Значит, в каждом куске будет по крайней мере один короткий ход, а кусков по крайней мере $2m + 2n - 4$.

³⁾Из письма Ходулёва: «Теперь у меня есть время сообщить тебе мою задачу, про которую я недавно говорил. По-моему, она достойна II тура Московской олимпиады или даже Всесоюзной». Действительно, достойна! Я тут же сообщил об этой задаче Н. Б. Васильеву, и она попала на 7-ю Всесоюзную олимпиаду по математике (Кишинёв, 1973), а потом была опубликована под номером 184 в сборнике задач [8].

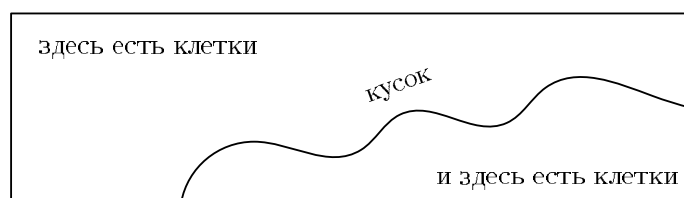
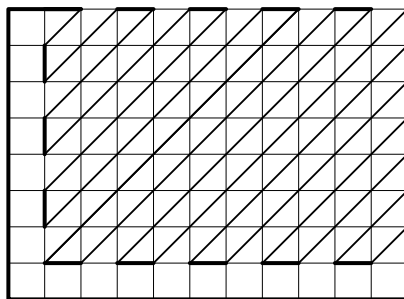


Рис. 6. Основное утверждение

Рис. 7. $2m + 2n - 4$ хода короля, покрывающих всю доску

Поэтому ответ: $\geq 2m + 2n - 4$ коротких хода. Эта оценка точная. Пример, из которого ясна общая конструкция, приведён на рис. 7 (узлам решётки соответствуют центры клеток). Легко убедиться, что тут в каждом куске содержится ровно один короткий ход. «Это, конечно, не строго доказано, но что поделаешь», — добавляет Ходулёв. «Однако в случае обычной шахматной доски никаких неясностей, конечно же, нет».

◆◆◆

№6 (МИНИМАЛЬНОЕ ЧИСЛО РАСПИЛОВ⁴⁾). Имеется некоторое тело, требуется распилить его определённым образом (известно, по каким линиям (в двумерном случае) или поверхностям (для трёх и большего числа измерений) это тело надо пилить). За какое минимальное число распилов это можно сделать, если разрешается накладывать части друг на друга и пилить их вместе?

Мы рассмотрим здесь лишь частный случай этой задачи: Распилить параллелепипед $m \times n \times k$ на кубики $1 \times 1 \times 1$. Аналогичная задача для многомерного параллелепипеда.

⁴⁾В 70-е годы мы увлекались чтением недавно переведённых книг Мартина Гарднера. Мы с Андреем решили обобщить задачу Гарднера о распиле куба на 27 маленьких кубиков, если разрешается накладывать распиленные части одну на другую.

РЕШЕНИЕ. Сначала ответ: минимальное число распилов равно $N = \lceil \log_2 m \rceil + \lceil \log_2 n \rceil + \lceil \log_2 k \rceil$ (такой же ответ — только с большим числом слагаемых — справедлив и в многомерном пространстве).

ЗАМЕЧАНИЕ. $\lceil x \rceil = \inf\{n \mid n \geq x; n \in \mathbb{Z}\} = -\lfloor -x \rfloor$, где $\lfloor \cdot \rfloor$ — целая часть числа.

Приведём сначала решение гарднеровской задачи: $m = n = k = 3$; $N = 3\lceil \log_2 3 \rceil = 3 \cdot 2 = 6$ распилов. Довольно красиво доказывается, что за меньшее число распилов нельзя получить 27 кубиков. Действительно, у центрального кубика надо выпилить все 6 граней, а за один распил нельзя выпилить сразу две грани! Решение в одну строчку!

Теперь общий случай. У каждой части, появившейся в процессе разрезания, имеются размеры, которые обозначим x , y и z . Мы считаем, что оси координат «вморожены» в эту часть с самого начала, так что размеры x , y и z не меняются при её поворачивании (которое может понадобиться для очередного распила).

После каждого распила мы выберем одну из полученных частей в соответствии со следующим индуктивным правилом:

1. До всех разрезов мы выбираем единственную существующую часть — сам параллелепипед.
2. Пусть после предыдущего распила была выбрана часть с размерами x , y и z . Тогда после очередного распила эта часть может быть распилена на две, отличающиеся лишь в одной координате. (Например, если эта часть была распилена параллельно плоскости xz , то получатся части с размерами

$$x'_1 = x'_2 = x, \quad y'_1 + y'_2 = y, \quad z'_1 = z'_2 = z;$$

штрихи здесь означают новые размеры). После очередного распила выбирается та из двух частей, у которой «спиленная» координата (в данном случае y) *больше*. (Например, если часть $1 \times 5 \times 7$ распилена на части $1 \times 2 \times 7$ и $1 \times 3 \times 7$, то выбирается часть $1 \times 3 \times 7$). Если очередной распил не коснулся этой части, то она же и остаётся выбранной.

Таким образом, у нас получается последовательность выбранных убывающих частей, у каждой из которых некоторая (но только одна!) координата меньше, чем у предыдущей, но не более, чем в два раза; возможно, что у некоторых частей все координаты совпадают с предыдущими. Последняя часть, очевидно, имеет размер $1 \times 1 \times 1$ (слова «координата» и «размер» синонимы в данном контексте).

Рассмотрим теперь по-отдельности каждую из координат у выбранных частей. Поскольку каждый распил уменьшает каждую координату не

более чем вдвое, потребуется не менее $\lceil \log_2 m \rceil$ распилов, чтобы уменьшить x -координату с m до 1, и аналогично $\lceil \log_2 n \rceil$ и $\lceil \log_2 k \rceil$ распилов, уменьшающих y - и z -координату до 1.

Так как каждый распил уменьшает только одну координату (или ни одной), то всего потребуется *не менее*

$$N = \lceil \log_2 m \rceil + \lceil \log_2 n \rceil + \lceil \log_2 k \rceil$$

распилов.

Приведённого числа распилов достаточно. Надо сначала при помощи $\lceil \log_2 m \rceil$ распилов разрезать параллелепипед на слои $1 \times n \times k$, затем сложить все слои вместе и разрезать их за $\lceil \log_2 n \rceil$ распилов на полоски $1 \times 1 \times k$, и наконец, сложив все полоски вместе, разрезать их на кубики $1 \times 1 \times 1$.

Многомерный случай рассматривается аналогично.



№7 (СОЛНЕЧНАЯ СИСТЕМА). *Некоторая солнечная система состоит из солнца и 8 вращающихся вокруг него по круговым орбитам планет, каждая планета со своей постоянной скоростью. Может ли случиться так, что в каждый момент все планеты располагаются в вершинах (движущегося во времени) куба с фиксированным ребром a ? (Центр куба — не обязательно солнце. Солнце и все планеты предполагаются точечными и не взаимодействуют друг с другом).*

ОБСУЖДЕНИЕ. Андрей и я придумали два независимых решения этой задачи, оба приведены ниже. Позже, разобравшись в существе дела, мы написали совместную статью на эту тему («Уплотнение в задаче четырёх тел»), опубликованную в виде препринта ИПМ (см. [1]). Ответ в задаче отрицательный: *планеты не могут в каждый момент располагаться в вершинах некоторого движущегося куба фиксированного размера.*



РЕШЕНИЕ 1 (А. Ходулёв). Предположим противное. Пусть A и B — вершины куба, плоскости орбит которых не совпадают. Рассмотрим произвольную сферу с центром в солнце O и спроецируем точки A и B радиально на эту сферу (рис. 8а). Тогда их проекции C и D будут двигаться равномерно по двум несовпадающим большим кругам, причём дуга CD будет оставаться постоянной: $\sphericalangle CD = \sphericalangle AOB$ и в треугольнике AOB все стороны постоянны. Обозначим через v_1 и v_2 скорости точек C и D , а их траектории — через γ_1 и γ_2 . Пусть P — одна из точек пересечения $\gamma_1 \cap \gamma_2$, а угол между траекториями равен φ . Допустим, что в момент времени t точка C проходит через P .

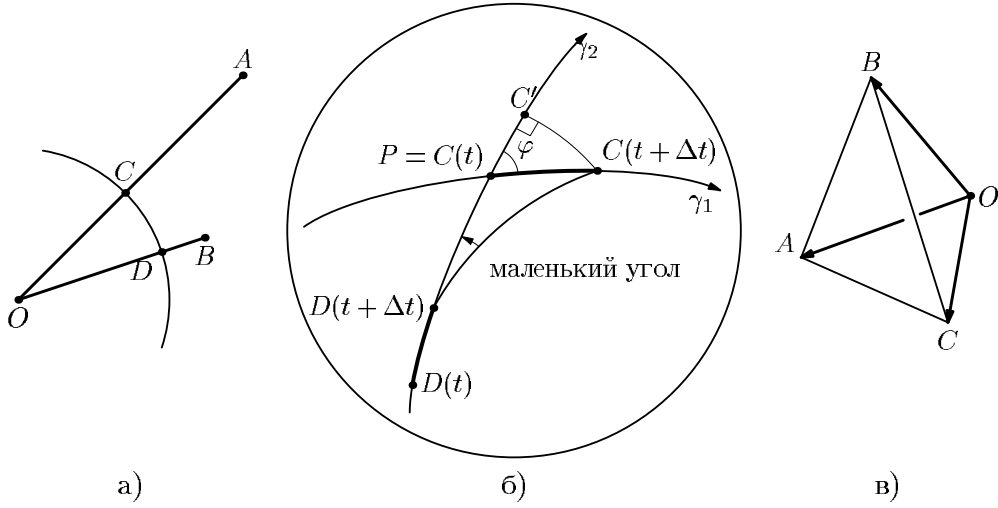


Рис. 8. Движение проекций планет по сфере и тетраэдр $OABC$

Выберем малое $\Delta t > 0$ и рассмотрим момент $t + \Delta t$. Имеем

$$\smile C(t + \Delta t)D(t + \Delta t) = \smile CD.$$

Повернём дугу $\smile C(t + \Delta t)D(t + \Delta t)$ вокруг точки $D(t + \Delta t)$ на соответствующий — очень маленький — угол так, чтобы точка $C(t + \Delta t)$ попала в некоторую точку C' круга γ_2 (рис. 8 б). Поскольку угол поворота мал, можно считать, что отрезок дуги $C(t + \Delta t)C'$ примерно перпендикулярен окружности γ_2 . Тогда $\smile C(t)C(t + \Delta t) = v_1 \Delta t$ и $\smile C(t)C' = v_1 \Delta t \cos \varphi$. Из равенства

$$\smile D(t + \Delta t)C' = \smile D(t + \Delta t)C(t + \Delta t) = \smile D(t)C(t)$$

следует

$$\smile C(t)C' = \smile D(t)D(t + \Delta t) = v_2 \Delta t.$$

Следовательно, $v_2 \Delta t = v_1 \Delta t \cos \varphi$, откуда

$$v_2 = v_1 \cos \varphi. \quad (*)$$

Проведя аналогичное рассуждение, когда точка D проходит через P , получаем

$$v_1 = v_2 \cos \varphi, \quad (**)$$

т.е. $\cos \varphi = \pm 1$, что означает, что орбиты γ_1 и γ_2 совпадают. Противоречие. Значит, искомого движения планет не существует.

◆◆◆

РЕШЕНИЕ 2 (Г. Гальперин). Ключом к этому решению является

ЛЕММА. *Если расстояние между двумя планетами постоянно во времени, то периоды обращения планет совпадают.*

Итак, периоды обращения всех восьми планет одинаковы, и пусть они равны T .

Выберем из куба такие его вершины A, B и C , чтобы точки O, A, B и C не лежали в одной плоскости (рис. 8 в). В тетраэдре $OABC$ все рёбра постоянные (их длины не зависят от времени), поэтому ни в один момент эти четыре точки не лежат в одной плоскости. Следовательно, смешанное произведение векторов $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ (ориентированный объём параллелепипеда, натянутого на эти векторы) не равно нулю:

$$V(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\overrightarrow{OA}, [\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]) \neq 0.$$

Однако через полпериода $t = T/2$, все планеты переместятся в диаметрально противоположные позиции и, следовательно, все векторы $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ изменят свой знак на противоположный. Отсюда $V(T/2) = -V(0)$. Поскольку V непрерывно зависит от параметра t , найдётся момент времени t_0 , в который $V(t_0) = 0$. В этот момент точки O, A, B, C становятся компланарными и мы получаем противоречие.



№8 (ВРАЩЕНИЕ И ГОМОТЕТИЯ). В \mathbb{R}^{13} расположено 7-мерное тело. Можно ли его так вращать, чтобы ортогональная проекция этого тела («тень») на подпространство $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_7\}$ уменьшалась бы гомотетично?

РЕШЕНИЕ. Ответ: «нельзя». Пусть, напротив, можно, и пусть A — соответствующий поворот. В базисе $E = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_7, \dots, \vec{e}_{12}, \vec{e}_{13}\}$ матрица A размера 13×13 имеет вид ($0 < \lambda < 1$ — коэффициент гомотетии):

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \dots \\ \alpha_{8,1} & \dots & \alpha_{8,7} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{13,1} & \dots & \alpha_{13,7} & \dots \end{pmatrix}.$$

Напишем условия ортогональности матрицы A для первых 7 столбцов:

$$\begin{aligned} 7 \text{ уравнений} \quad & \alpha_{8,r}^2 + \dots + \alpha_{13,r}^2 = 1 - \lambda^2 \quad (r = 1, \dots, 7), \\ 21 \text{ уравнение} \quad & \alpha_{8,r} \alpha_{8,k} + \dots + \alpha_{13,r} \alpha_{13,k} = 0 \quad (1 \leq r < k \leq 7). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь семь 6-мерных векторов

$$\vec{a}_1 = (\alpha_{8,1}, \dots, \alpha_{13,1}), \dots, \vec{a}_7 = (\alpha_{8,7}, \dots, \alpha_{13,7}) \in \mathbb{R}^6$$

одинаковой длины $\sqrt{1 - \lambda^2}$ и попарно ортогональных. А тогда векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_7$ линейно независимы в \mathbb{R}^6 — противоречие.

◆ ◆ ◆

№9 (РАЦИОНАЛЬНЫЕ РАССТОЯНИЯ И ПИФАГОРОВЫ ТРОЙКИ).

В 1975 году я предложил следующую задачу на Международную Математическую олимпиаду:

ЗАДАЧА А. *Можно ли на окружности радиуса 1 расположить 1975 точек так, чтобы все попарные расстояния между ними были рациональными числами?*

Идея решения этой задачи основывалась на том, что существуют пифагоровы тройки: $a = q^2 - p^2$, $b = 2pq$, $c = p^2 + q^2$, так что треугольник со сторонами a , b , c — прямоугольный.

Позже я поставил другой вопрос:

ЗАДАЧА Б. *Пусть имеется множество S точек в \mathbb{R}^n , все попарные расстояния между которыми — рациональные числа. Верно ли, что это множество конечно или счётно?*

Я решил эту задачу положительно следующим образом. Пусть сначала $n = 2$ (плоскость). Возьмём две точки $A, B \in S$ и сопоставим каждой точке $X \in S$ пару расстояний до точек A и B . Хотя по расстояниям AX и BX точка X не восстанавливается однозначно, но — не более, чем двузначно, как пересечение двух окружностей с центрами A, B и радиусами AX, BX (рис. 9а). Таким образом, каждая точка $X \in S$ имеет рациональные координаты в построенной системе координат, откуда мощность множества S не превышает \aleph_0 . Аналогично решение и для \mathbb{R}^n : выбираем n «базовых» точек из S и приписываем каждой точке $X \in S$ n координат — расстояний от X до базовых точек. Получаем множество «рациональных» точек в \mathbb{R}^n , так что $|S| \leq \aleph_0$. (Точка X определяется неоднозначно, но не более, чем двузначно, — как пересечение n сфер размерности $n - 1$. Детали довольно хлопотно описывать, и мы их здесь опускаем).

Я предложил обе задачи Андрею Ходулёву и получил от него очень интересный и неожиданный ответ. Решал он их в обратном порядке, сначала задачу Б, потом А. Его решение основывалось на следующей лемме.

ЛЕММА. *На любой сфере $S^k \subset \mathbb{R}^n$ размерности $k = 0, 1, \dots, n - 1$ с любым центром содержится не более чем счётное множество точек из S .*

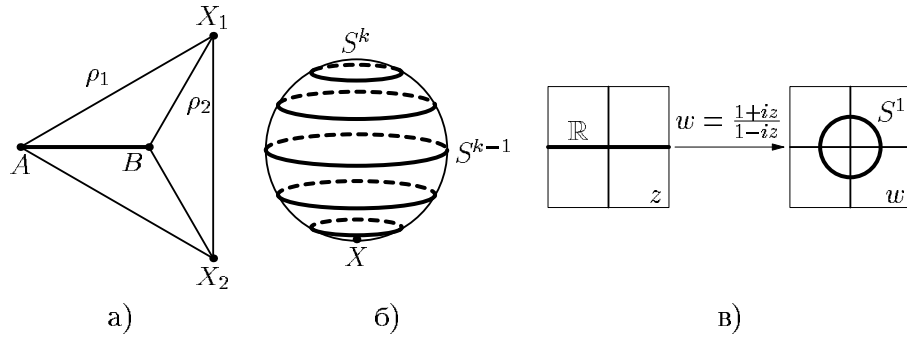


Рис. 9.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по k . Если на сфере S^k имеется ненулевое число точек нашего множества, то выберем одну из них — X . Разобьём S^k на «параллели» S^{k-1} : каждая сфера S^{k-1} состоит из точек, равноудалённых от X (см. рис. 9б). Тогда всё множество $S \cap S^k$ должно быть сосредоточено на не более чем счётном числе таких $k-1$ -мерных сфер, соответствующих рациональным расстояниям, и на каждой сфере содержится не более, чем счётное число точек из S . \square

Возьмём теперь любую точку $O \in S$ и рассмотрим всевозможные сферы S^{n-1} с центром O , объединение которых содержит всё множество S . В силу рациональности всех расстояний от O до остальных точек множества S , число сфер S^{n-1} не более чем счётно. Согласно лемме на каждой сфере S^{n-1} имеется не более чем счётное множество точек из S . Не более чем счётное множество не более чем счётных множеств даёт нам не более чем счётное множество, и утверждение о счётности S , тем самым, завершено.

Решив задачу Б, Андрей перешел к задаче А: «Думая над этой задачей (Б), я, во-первых, придумал счётное множество точек на окружности с рациональными расстояниями между ними (усиление задачи А). А во-вторых, я придумал очень простой способ доказательства формул для пифагоровых троек чисел». Вот что он придумал.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ А. Возьмём все рациональные точки на единичной окружности — углы α с рациональным $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$. Удвоим их аргументы — получим подмножество \mathcal{A} предыдущего множества (поскольку $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ тоже будут рациональными числами). Расстояние между двумя такими точками 2α и 2β , равно (как легко проверить)

$$2 \sin(\alpha - \beta) = 2(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \in \mathbb{Q}.$$

Итак, множество \mathcal{A} на окружности удовлетворяет условию и счётно.

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПИФАГОРОВЫХ ТРОЕК ЧИСЕЛ. Пифагоровы треугольники это всё равно, что рациональные точки на окружности.

Возьмём (и в этом состоит неожиданность!) дробно-линейное отображение $w = \frac{1+iz}{1-iz}$. Образ вещественной прямой \mathbb{R} при этом отображении — единичная окружность S^1 на комплексной плоскости (рис. 9в). Отображение w осуществляет взаимно однозначное соответствие между рациональными точками расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$ и, в частности, между рациональными точками прямой \mathbb{R} и окружностью S^1 , поскольку прямое и обратное отображения в действительной записи представляют рациональные функции с рациональными коэффициентами.

Подставляя теперь $z = \frac{p}{q}$ и записывая в действительном виде, получаем формулы для пифагоровых троек: $a = q^2 - p^2$, $b = 2pq$, $c = p^2 + q^2$.

Суть этого рассуждения состоит не в том, что полученная тройка пифагорова (это было известно с самого начала), а в том, что без всяких усилий доказано, что эти формулы дают *все* пифагоровы тройки!

№10 (СОПРОТИВЛЕНИЕ ГРАФА). *Найти сопротивление между соседними узлами*

а) *проболочного правильного многогранника (тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра и икосаэдра);*

б) *бесконечной правильной сетки на плоскости (квадратной, треугольной, шестиугольной).*

Сопротивление отдельно взятого ребра (между двумя вершинами) равно 1 ом. На какие графы можно обобщить эту задачу?

ОБСУЖДЕНИЕ. Для куба и тетраэдра ответы приводятся в некоторых задачниках по физике в разделе «Электричество». Для решения задачи надо привлечь законы Кирхгофа о токах, протекающих через вершины сети.

Ответ: сопротивление между соседними вершинами для куба равно $P_{\text{куб}} = 7/12$, а для тетраэдра $P_{\text{тетр.}} = 1/2$.

Даже в этих двух случаях решение не очень простое, и оно намного сложнее для остальных многогранников. Ответы для них такие: $P_{\text{октаэдр}} = 5/12$, $P_{\text{додекаэдр}} = 19/30$, и $P_{\text{икосаэдр}} = 11/30$.

Для квадратной решетки задача ещё сложнее, так как граф бесконечный. Однако ответ для решетки не очень сложен. Он естественно обобщается на так называемые «правильные» графы. Я нашел этот замечательный ответ в одном из писем Андрея и сейчас приведу соответствующую выдержку из этого письма.

«Недавно я получил обобщение одного интересного факта, который мы как-то с тобой обсуждали: найти сопротивление между соседними

узлами бесконечной квадратной решетки, составленной из сопротивлений по одному ому. Оно равно $1/2$ ом, как и для тетраэдра.

Обобщение таково. Сначала определения. Возьмем в графе Γ два смежных ребра AB и AC . Эти ребра назовем *эквивалентными*, если существует автоморфизм графа, переводящий A в A и B в C . Вершину графа назовем *центром симметрии* графа Γ , если все ребра, инцидентные ей, эквивалентны. Граф Γ называется *правильным*, если все его вершины — центры симметрии графа. Примеры правильных графов: правильные многогранники любой размерности; правильные решетки на евклидовой плоскости и плоскости Лобачевского и их многомерных аналогах; симметричные решетки на сфере или торе и т.п. Нетривиальный пример: граф многогранника, полученного из куба приставлением к каждой грани по четырехугольной пирамиде (поверхность этого многогранника состоит из 12 ромбов). Он нетривиален тем, что его вершины имеют разную степень (4 и 6).

ЗАДАЧА. Найти сопротивление между соседними вершинами X и Y правильного графа Γ , если все его ребра имеют сопротивление 1 ом.

Пусть n — общее число вершин графа (если $n = \infty$, то полагаем $\frac{1}{n} = 0$), k_1 и k_2 — степени вершин X и Y . Тогда

$$R_{\Gamma} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

Доказательство этого факта не отличается по существу от доказательства для квадратной решетки».

Я предлагаю всем заинтересовавшимся этим результатом попытаться доказать его самостоятельно⁵⁾.



№11 (ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ). Доказать, что для любого натурального числа k существует такое **нецелое** число α , что для всякого натурального числа n число $\lfloor \alpha^n \rfloor$ делится на k .

РЕШЕНИЕ. Фиксируем k . Назовем *отрезком n -го порядка* любой отрезок вида $\left[\sqrt[n]{N + \frac{1}{3}}, \sqrt[n]{N + \frac{2}{3}} \right]$, где N — натуральное число, кратное k . Таким образом, если Δ — отрезок n -го порядка, то для любой точки $X \in \Delta$, $\lfloor X^n \rfloor$ кратно k .

⁵⁾В следующем письме Андрей написал мне, что ему удалось обобщить этот результат для нахождения сопротивления между *несоседними* вершинами графа. Однако на граф ему пришлось наложить существенно более сильное ограничение, и формула для сопротивления также существенно усложнилась.

ЛЕММА. Если $\Delta = [a, b]$ — отрезок n -го порядка и $a \geq 3k + 1$, то в Δ содержится какой-то отрезок $(n + 1)$ -го порядка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $b^n - a^n = \frac{1}{3}$, откуда

$$b^{n+1} - a^{n+1} > b^n a - a^{n+1} = a(b^n - a^n) = \frac{1}{3}a \geq k + \frac{1}{3}.$$

Поэтому между числами a^{n+1} и b^{n+1} обязательно найдется отрезок вида $\left[N + \frac{1}{3}, N + \frac{2}{3}\right]$, где N делится на k . Следовательно, $\left[\sqrt[n]{N + \frac{1}{3}}, \sqrt[n]{N + \frac{2}{3}}\right] \subset \Delta$. Лемма доказана. \square

Рассмотрим теперь вложенную (согласно лемме) систему отрезков первого, второго, третьего, и т. д. порядков. Их пересечение непусто, и любое число α из этого пересечения дает решение нашей задачи. Действительно, уже отрезок первого порядка не содержит целых точек, так что α не может быть целым.



№12 (ПОСЛЕДНИЕ ЦИФРЫ СТЕПЕНИ ЧИСЛА). Как меняются последние 200000 цифр числа

$$N = 11^{10^9 8^7} - 6^{5^4 3^2}$$

при его возведении в степень $n = 1, 2, 3, \dots$?

РЕШЕНИЕ. Ответ: 200000 последних цифр чисел N и N^n совпадают.

Надо доказать, что для каждого натурального n

$$N^n \equiv N \pmod{10^{200000}}. \quad (1)$$

Найдем сначала $N \pmod{10^{200000}}$. Воспользуемся для этого φ -функцией Эйлера: $\varphi(k)$ равно числу натуральных чисел, не превышающих числа k и взаимно простых с k . Число $\varphi(k)$ легко находится по такой формуле:

$$\varphi(k) = k \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right),$$

где $p_1 < p_2 < \dots < p_s$ — все различные простые делители k . Если $k = 10^{200000}$, то единственные простые делители k равны 2 и 5, так что $\varphi(k) = k \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 4 \cdot 10^{199999}$. Напомним также знаменитую теорему Эйлера о φ -функции:

ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА. Если числа a и k взаимно просты, т. е. $(a, k) = 1$, то $a^{\varphi(k)} \equiv 1 \pmod{k}$.

Так как $9^{8^7} > 200001$, число $10^{9^{8^7}}$ делится на $\varphi(10^{200000})$, откуда по теореме Эйлера

$$11^{10^{9^{8^7}}} \equiv 1 \pmod{10^{200000}}.$$

Обозначим $m = 5^{4^{3^2}}$, тогда

$$N \equiv 1 - 6^m \pmod{10^{200000}}. \quad (2)$$

Нам достаточно доказать равенство (1) для $n = 2$, тогда оно верно и для всех $n > 2$. Возведем (2) в квадрат:

$$N^2 \equiv 1 + 6^{2m} - 2 \cdot 6^m \equiv N + 6^{2m} - 6^m \pmod{10^{200000}}.$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$6^{2m} \equiv 6^m \pmod{10^{200000}}.$$

Поскольку $m \geq 200000$, $6^{2m} \equiv 6^m \pmod{2^{200000}}$ (обе части сравнимы с 0), так что достаточно доказать, что

$$6^m \equiv 1 \pmod{5^{200000}}. \quad (3)$$

Однако доказательство сравнения (3) нельзя получить непосредственно из теоремы Эйлера, поскольку m не делится на $\varphi(5^{200000}) = 4 \cdot 5^{199999}$.

Поэтому поступим так: распишем 6^m как бином,

$$6^m = (1 + 5)^m = 1 + C_m^1 \cdot 5 + C_m^2 \cdot 5^2 + \dots + C_m^m \cdot 5^m;$$

надо доказать, что

$$C_m^1 \cdot 5 + C_m^2 \cdot 5^2 + \dots + C_m^m \cdot 5^m \text{ делится на } 5^{200000}. \quad (4)$$

Обозначим через $\deg_5 L$ наибольшую степень пятерки, на которую делится L , и дообозначим $\deg_5 \frac{L}{M} = \deg_5 L - \deg_5 M$. Тогда

$$\begin{aligned} \deg_5 C_m^r &= \deg_5 \frac{m(m-1)\dots(m-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot r} = \\ &= \deg_5 \left(m \cdot \frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2} \cdot \dots \cdot \frac{m-r+1}{r-1} \cdot \frac{1}{r} \right) = \\ &= \deg_5 \frac{m}{r} + \deg_5 \frac{m-1}{1} + \deg_5 \frac{m-2}{2} + \dots + \deg_5 \frac{m-r+1}{r-1}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $m = 5^l$, где $l = 4^{3^2}$, получаем, что $\deg_5 \frac{m-k}{k} = 0$ для всех $k = 1, 2, \dots, r-1$. Поэтому $\deg_5 C_m^r = \deg_5 \frac{m}{r}$. Значит,

$$\deg_5 (C_m^r \cdot 5^r) = \deg_5 \left(\frac{m}{r} \cdot 5^r \right) > \deg_5 m = 4^{3^2} > 200000.$$

Итак, утверждение (4), а с ним и (3), доказаны. Этим задача решена.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Гальперин Г. А., Ходулёв А. Б.* Случай плоского расположения в пространственной задаче четырех тел с одним притягивающим центром. Препринт ИПМ №41. Москва, 1983. С. 1–27.
- [2] *Пуанкаре А.* О науке. М.: Наука, 1983. С. 122–125.
- [3] *Арнольд В. И.* Избранное – 60. М.: Фазис, 1997. С. 127, 196, 213, 240, 256, 307, 474, 586, 588.
- [4] *Гальперин Г. А., Ходулёв А. Б.* Решение задачи M229 // Квант, №6, 1974. С. 24–27.
- [5] *Ходулёв А. Б.* Расселение фишек // Квант, №7, 1982. С. 28.
- [6] *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. С. 26.
- [7] *Андреев Н. Н., Юдин В. А.* Экстремальные расположения точек на сфере // Математическое Просвещение. Сер. 3, вып. 1, 1997. С. 116–125.
- [8] *Васильев Н. Б., Егоров А. А.* Задачи Всесоюзных математических олимпиад. М.: Наука, 1988. Задача 184.
- [9] *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 2, геометрия (планиметрия). М.: Наука, 1952. С. 22, зад. 53.
- [10] Труды А. Б. Ходулёва по Computer Science за 1985–1998 г. см. по адресу `cgd_publ.htm` at `rmp.kiam1.rssi.ru`