Что такое преобразование Фурье?

М. Кельберт

1. Ряды Фурье и дискретное преобразование Фурье

Метод преобразования Фурье играет исключительно важную роль в математической физике: Норберт Винер считал его одним из важнейших достижений человечества (см. книгу Н. Винера «Я — математик»).

С помощью преобразования Фурье можно исследовать химическое строение отдаленных планет (спектральный анализ сигналов радиотелескопов), исследовать функциональные системы человеческого организма (спектральный анализ кардиограмм, энцефалограмм) и т. д.

Много книг написано о создателе этого метода — французском математике Жане Батисте Жозефе Фурье (см., например, [2]). В них рассказывается, в частности, о его путешествии, вместе с другими учеными, в Египет, в составе знаменитой экспедиции Наполеона. Во время этого путешествия он не только занимался математикой, но и с успехом участвовал в расшифровке египетских иероглифов. На обратном пути во Францию Фурье и его коллеги, которые везли с собой археологические находки, были захвачены англичанами. Следуя благородному духу той эпохи, англичане высадили ученых на безопасный берег (в 1801 году Фурье вернулся во Францию на английском бриге "Good Design"), а впоследствии вернули во Францию захваченные ими драгоценные древние рукописи[1)].

Мы начнем обзор открытого Фурье метода с так называемых *рядов Фурье*. Выражения вида

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

называются *тригонометрическими полиномами* (степени n). Оказывается, что любая непрерывная (и не только непрерывная) функция на $(-\pi, \pi)$ может быть аппроксимирована с наперед заданной точностью тригонометрическими полиномами с подходящими коэффициентами $a_0, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$.

Это утверждение можно проиллюстрировать, сравнивая графики функций $y = x$, $y = |x|$, $y = x^2$ с графиками тригонометрических

[1)] Французы «благородной» эпохи возвращать захваченные рукописи египтянам не стали. — *Прим. ред.*

полиномов, аппроксимирующих эти функции (см. рис. 1):

$$y = 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{2}{5}\sin 5x - \frac{1}{3}\sin 6x + \frac{2}{7}\sin 7x,$$

$$y = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{4}{9\pi}\cos 3x,$$

$$y = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x - \frac{4}{9}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos 4x - \frac{4}{25}\cos 5x$$

(догадайтесь, почему в первом случае появляются только синусы, а в остальных только косинусы). Интересно заметить, что для приближения функций $y = |x|$ и $y = x^2$ с удовлетворительной точностью требуется меньше гармоник, чем в случае функции $y = x$.

Линейные комбинации функций вида $\sin\frac{kx}{T}$ и $\cos\frac{kx}{T}$, также называемые тригонометрическими полиномами, имеют период $2\pi T$. Поэтому можно так переформулировать наше утверждение: *любая периодическая функция может быть аппроксимирована тригонометрическими полиномами.*

Этот факт, обнаруженный Фурье в ходе его исследований по распространению тепла, имеет важное значение для физики. Действительно, функции синус и косинус описывают простейшие волны, называемые *монохроматическими*, т.е. волны фиксированной длины (или фиксированной частоты, если рассматривать x как время). Поскольку любую периодическую функцию можно интерпретировать как профиль некоторой волны, открытие Фурье можно выразить следующим образом: любая волна может быть представлена как суперпозиция (сумма) монохроматических волн.

Из школьного курса физики вы, вероятно, знакомы с изящной демонстрацией этого факта в опыте со стеклянной призмой. На призму направляется пучок белого света, который представляет из себя смесь электромагнитных волн различных частот. С другой стороны призмы можно увидеть несколько лучей света различных цветов от фиолетового до красного. Каждый из этих лучей соответствует электромагнитным колебаниям определенной частоты, т.е. может рассматриваться как монохроматическая волна. Итак, этот опыт экспериментально доказывает разложимость падающего пучка на монохроматические волны. Физик назовет коэффициенты этого разложения *амплитудами монохроматических волн*, а математик назовет их *коэффициентами Фурье.*

Именно коэффициенты Фурье стоят в тригонометрических полиномах, графики которых приведены на рис. 1.

Как найти эти коэффициенты? Рассуждение Фурье [1], которое с современной точки зрения нельзя назвать строгим, состоит в следующем.

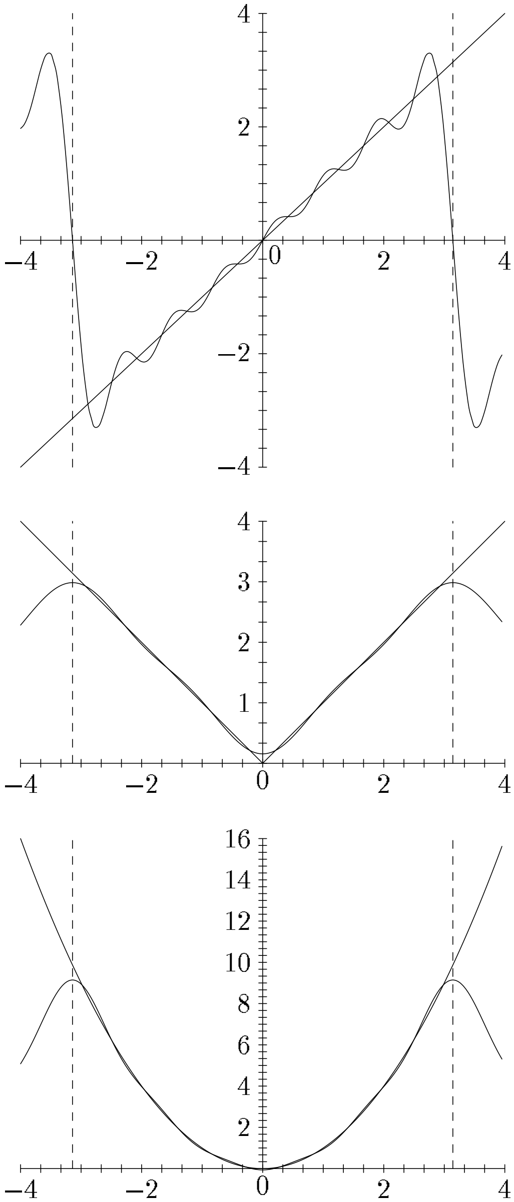

Рис. 1.

Пусть функция $f(x)$, имеющая период $2\pi T$, представлена рядом Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{nx}{T} + b_n \sin\frac{nx}{T}. \tag{1}$$

Для тригонометрических функций выполняются соотношения

$$\int\limits_{-\pi T}^{\pi T} \cos\frac{nt}{T}\sin\frac{mt}{T}\,dt = 0, \quad \int\limits_{-\pi T}^{\pi T} \cos\frac{nt}{T}\cos\frac{mt}{T}\,dt = \int\limits_{-\pi T}^{\pi T} \sin\frac{nt}{T}\sin\frac{mt}{T}\,dt = \delta_{n,m}\pi T, \tag{2}$$

где $\delta_{n,n} = 1$, $\delta_{n,m} = 0$ при $n \neq m$. Поэтому, если формально умножить равенство (1) на $\cos\dfrac{mx}{T}$ или $\sin\dfrac{mx}{T}$ и почленно проинтегрировать от $-\pi T$ до πT, «лишние» гармоники исчезнут и получится формула для коэффициентов

$$a_m = \frac{1}{\pi T}\int\limits_{-\pi T}^{\pi T} f(t)\cos\frac{mt}{T}\,dt, \qquad b_m = \frac{1}{\pi T}\int\limits_{-\pi T}^{\pi T} f(t)\sin\frac{mt}{T}\,dt. \tag{3}$$

Заметим, что в силу формулы Эйлера $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ любой тригонометрический полином может быть записан в следующем виде

$$c_{-n}e^{-inx} + \ldots + c_{-1}e^{-ix} + c_0 + c_1e^{ix} + \ldots + c_ne^{inx},$$

где $c_k = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$, $k > 0$, $c_0 = a_0$, $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$, $k < 0$. Поэтому формулы (1) и (3) можно переписать в более удобном виде (полагая $T = 1$)

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad c_k = (2\pi)^{-1}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx. \tag{4}$$

Если более внимательно приглядеться к опыту с призмой, то можно заметить, что получается «непрерывный спектр», а не дискретный набор лучей. Для описания таких разложений имеется *интегральная формула Фурье*. Ее можно получить, подставляя выражения (3) в формулу (1) и переходя формально к пределу $T \to \infty$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} du \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)\,dt = \int\limits_0^{\infty} [a(u)\cos xu + b(u)\sin xu]\,du, \tag{5}$$

где

$$a(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ut\,dt, \quad b(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin ut\,dt.$$

Теория рядов Фурье и непрерывного преобразования Фурье достаточно сложна и преподносит немало неожиданностей. Однако не обязательно владеть этой теорией в полном объеме для того, чтобы успешно использовать преобразование Фурье (или, как говорят математики, гармонический анализ) для решения практических задач. Дело в том, что экспериментальные данные, которые обрабатываются на компьютерах, обычно представляются в виде конечной (быть может, очень длинной) последовательности чисел. В этом случае применяется дискретное преобразование Фурье, с которым работать гораздо легче. Мы начнем с определения дискретного преобразования Фурье и обсудим его связь с проблемой сжатия (редукции) данных.

Что такое дискретный аналог ряда Фурье? Периодические функции с периодом 2π можно рассматривать как функции на окружности единичного радиуса. Пусть $z = e^{2\pi i/m}$. Дискретным аналогом этой окружности служит набор точек $z^j = e^{2\pi ij/m}$, $(j = 1, \ldots, m)$, а периодической функции — периодическая последовательность $(y_1, y_2, \ldots)$, $y_k = y_{k+m}$. Назовем *дискретным преобразованием Фурье* последовательности $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ следующую (вообще говоря, комплексную) последовательность

$$c_j = \sum_{k=1}^{m} y_k z^{kj}, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{6}$$

Любая такая последовательность может быть легко восстановлена с помощью формулы обращения Фурье

$$y_k = m^{-1} \sum_{j=1}^{m} c_j z^{-kj}, \tag{7}$$

где c_j, $j = 1, \ldots, m$, — коэффициенты Фурье, определенные выше.

Иными словами, исходная последовательность чисел $\bar{y}$ (которую можно периодически продолжить в обе стороны) представляется в виде ряда по «элементарным гармоникам» $e^{-2\pi ij/m}$ с коэффициентами c_j. Равенства (6) и (7) являются дискретными аналогами соотношений (4).

Приведем примеры дискретного преобразования Фурье при малых значениях m:

$(\boldsymbol{m = 2})$ $c_1 = y_2 - y_1, c_2 = y_1 + y_2$;

$(\boldsymbol{m = 3})$ $c_1 = y_3 - \frac{1}{2}(y_2 + y_1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(y_1 - y_2)$,

$c_2 = y_3 - \frac{1}{2}(y_2 + y_1) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(y_1 - y_2)$, $\qquad c_3 = y_1 + y_2 + y_3$;

$(\boldsymbol{m = 4})$ $c_1 = y_4 - y_2 + i(y_1 - y_3)$, $\qquad c_2 = y_2 - y_1 - y_3 + y_4$;

$c_3 = y_4 - y_2 + i(y_1 - y_3)$, $\qquad c_4 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$.

Проверьте, что и в общем случае $c_m = y_1 + y_2 + \ldots + y_m$.

Задача 1. Докажите, что для альтернирующего дискретного сигнала $y_k = (-1)^k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, и четного m выполнено $c_{m/2} = m$, $c_k = 0$, $k \neq m/2$.

Задача 2. Докажите формулу обращения.

Подсказка. Проверьте, что, как и в случае рядов Фурье, «лишние» гармоники исчезнут при суммировании.

Можно сказать, что формула обращения задает представление последовательности в виде тригонометрического полинома, в то время как формула, определяющая преобразование Фурье, дает коэффициенты этого полинома.

Во многих приложениях объем необходимой числовой информации слишком велик даже для современных мощных компьютеров. В этом случае возникает проблема *сжатия данных* (т. е. сокращения числового массива таким образом, чтобы можно было воспроизвести исходные данные с достаточной точностью). Приближение функций с помощью тригонометрических полиномов часто оказывается полезным при решении этой проблемы.

Предположим, что значения $y_1 = f(x_1), \ldots, y_m = f(x_m)$ функции $f(x)$, явное аналитическое выражение для которой не известно, измеряются в некотором эксперименте и по данным $y_1, \ldots, y_m$ нам удалось численно оценить коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Часто оказывается, что функция

$$\hat{f}(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

хорошо приближает функцию $f(x)$, даже когда число элементарных гармоник n значительно меньше объема данных m. В этом случае достаточно запомнить в памяти компьютера только коэффициенты Фурье вместо исходного объема данных.

Поскольку значения функции $y_i = f(x_i)$ известны экспериментатору лишь в отдельных точках x_i, $i = 1, \ldots, m$, коэффициенты Фурье функции $f(x)$ должны определяться по этой последовательности. Аналогичная ситуация возникает при вычислениях на компьютерах, если аналитическое выражение для функции $f(x)$ недоступно или является достаточно сложным.

Поэтому в дальнейшем мы будем интересоваться не коэффициентами Фурье непрерывных функций, а коэффициентами Фурье конечных последовательностей $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_m)$. Эффективная процедура их вычисления имеет большое практическое значение. Она называется *быстрым преобразованием Фурье* (*БПФ*).

2. Китайская теорема об остатках

Любое натуральное число, не превосходящее $M = \prod_{j=1}^{k} m_j$, где числа m_j — попарно взаимно простые, может быть единственным образом восстановлено, если известны остатки от деления этого числа на m_j, $j = 1, \ldots, k$.

Эта теорема была открыта в древнем Китае в первом столетии нашей эры, ее обычно называют *китайской теоремой об остатках* или *теоремой Сон-Ши*.

Для доказательства этой теоремы нам потребуются некоторые факты из элементарной теории чисел (в частности, из теории остатков).

Упражнение. Найдите остаток от деления числа 62^{50} на 5.

Мы опустим некоторые определения, относящиеся к элементарной теории чисел. Их можно найти в любом учебнике (например, [3]). Нам потребуется также следующая теорема, доказательство которой советуем придумать, вспомнить или прочитать в учебнике.

Теорема 1. *Пусть M и m — взаимно простые числа. Тогда существуют целые числа N и n такие, что $NM + nm = 1$.*

Сформулируем теперь китайскую теорему об остатках. Поскольку эта теорема имеет ключевое значение для нас, приведем ее доказательство.

Теорема 2. *Пусть $M = \prod_{j=1}^{k} m_j$ — произведение попарно взаимно простых чисел. Тогда для любых c_j, $0 \leqslant c_j < m_j$, существует единственное решение следующей системы сравнений*

$$c \equiv c_j \pmod{m_j}, \quad j = 1, \ldots, k, \tag{8}$$

такое что $0 \leqslant c < M$.

Доказательство. Прежде всего докажем единственность решения. Пусть c и c' два различных решения (8), не превосходящих M. Тогда

$$c = Q_j m_j + c_j, \qquad c' = Q'_j m_j + c_j, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Число $c - c' = (Q_j - Q'_j)m_j$ делится без остатка на любое m_j, а, значит, и на $M = \prod_{j=1}^{k} m_j$, поскольку числа m_j не имеют общих делителей. С другой стороны, $0 \leqslant c, c' < M$, т.е. $-M < c - c' < M$. Поэтому $c - c' = 0$.

Для доказательства существования решения используем теорему 1. Положим $M_j = \dfrac{M}{m_j}$ и найдем такие N_j и n_j, что $M_j N_j + m_j n_j = 1$. Покажем, что

$$c = \sum_{r=1}^{k} c_r N_r M_r \mod M \tag{9}$$

и есть решение системы (8). Действительно, для каждого $j = 1, \ldots, k$

$$c = \sum_{r=1}^{k} c_r N_r M_r \equiv c_j N_j M_j \pmod{m_j},$$

поскольку M_r делится без остатка на m_j (при всех $r \neq j$). А так как $M_j N_j + m_j n_j = 1$, то $M_j N_j = 1 \pmod{m_j}$ и потому $c = c_j \pmod{m_j}$. Это завершает доказательство теоремы. □

Упражнения. 1. Пусть $m_1 = 3, m_2 = 4, m_3 = 5$. Найдите такое число, не превосходящее 59, что его остатки при делении на 3, 4 и 5 равны $c_1 = 2$, $c_2 = 1$ и $c_3 = 2$, соответственно.

2. Разобьем двоичную запись некоторого числа $A = (\ldots a_1 a_0)_2$ на блоки длины k. Обозначим $A_j = a_{(j-1)k} + 2a_{(j-1)k+1} + \ldots + 2^{k-1} a_{jk-1}$. Например,

$$47 = 101111, \quad k = 3, \quad A_1 = 1 + 2 + 4, \quad A_2 = 1 + 4.$$

Докажите, что остатки от деления числа A на $2^k - 1$ и на $2^k + 1$ такие же, как у чисел $A_1 + A_2 + \ldots$ и $A_1 - A_2 + \ldots$, соответственно. В приведенном выше примере

$$47 \equiv (7+5) \equiv 5 \pmod{7}, \qquad 47 \equiv (7-5) \equiv 2 \pmod{9}.$$

3. Пусть заданы остатки $u_1, \ldots, u_k$ от деления некоторого числа на попарно взаимно простые числа $m_1, \ldots, m_k$. То число, которое может быть восстановлено по китайской теореме об остатках, будем обозначать $\langle u_1, \ldots, u_k \rangle$ или $\langle (u_1)_{m_1}, \ldots, (u_k)_{m_k} \rangle$. Докажите следующие равенства

а) $\langle u_1, \ldots, u_k \rangle \pm \langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \langle u_1 \pm v_1, \ldots, u_k \pm v_k \rangle$,

б) $\langle u_1, \ldots, u_k \rangle \langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \langle u_1 v_1, \ldots, u_k v_k \rangle$
(здесь произведение чисел понимается по модулю $M = m_1 \cdot \ldots \cdot m_k$).

Читатель может сейчас спросить: почему эти факты интересны и как они связаны с преобразованием Фурье? Оказывается, что китайская теорема об остатках дает способ быстрого вычисления коэффициентов Фурье.

3. Быстрое преобразование Фурье

Для прямого вычисления преобразования Фурье по формуле (6) нужно осуществить порядка m^2 операций умножения и порядка m^2 операций сложения. Это много или мало? Будем рассуждать в терминах времени вычисления для компьютеров. Перемножение двух чисел на персональном компьютере среднего быстродействия занимает 10^{-5} секунд. Для последовательности данных длины порядка $n = 10^4$ (что типично, например, для геофизических приложений) получаем, что вычисление преобразования Фурье занимает порядка 20 минут. Это очень долго для одной последовательности данных.

Для многих типов компьютеров время, нужное для перемножения чисел, гораздо больше времени, требуемого для сложения чисел. Поэтому мы будем стараться уменьшить именно количество умножений, не обращая внимания на количество сложений.

Как сократить число умножений? Вспомним, как нас учили делать это в начальной школе: для того, чтобы вычислить $23 \cdot 37 + 29 \cdot 37$ мы запишем это число в виде $(23+29) \cdot 37$. Тогда вместо двух умножений нам достаточно выполнить одно.

Внимательный читатель мог заметить, что многие из чисел z^{kj}, $j, k = 1, \ldots, m$, появляющиеся в (6), в действительности совпадают. Используем этот факт для того, чтобы сократить число умножений. Китайская теорема об остатках может в этом существенно помочь.

Предположим, что число m записывается в виде $m = m_1 m_2$, где m_1 и m_2 — взаимно простые числа.

Пусть k_1 и k_2 — остатки от деления индекса k, появляющегося в (6), на m_1 и m_2, соответственно. Аналогично формуле (9), число k можно представить в виде $k = k_1 M_2 m_2 + k_2 M_1 m_1$, где M_1 и M_2 единственным образом определяются из соотношений $m_1 M_1 + m_2 M_2 \equiv 1 \pmod m$, $0 < M_1, M_2 < m$.

Теперь представим преобразование Фурье, т.е. сумму в правой части (6), как двойную сумму по индексам k_1 и k_2, пробегающим значения от 0 до $m_1 - 1$ и $m_2 - 1$, соответственно. Пусть также j_1 — остаток от деления $M_2 j$ на m_1, а j_2 — остаток от деления $M_1 j$ на m_2.

Заметим, что $j = m_2 j_1 + m_1 j_2 \pmod m$. Для доказательства достаточно просуммировать равенства $M_2 j = m_1 p + j_1$, $M_1 j = m_2 q + j_2$, умноженные на m_2 и m_1 соответственно. Здесь p и q неотрицательные целые числа.

Далее, введем обозначения $\beta = z^{M_2 m_2^2}$, $\gamma = z^{M_1 m_1^2}$ и заметим, что $z^{m_1 m_2} = 1$. Если теперь вынести общие множители из внутренней суммы по индексу j_2, то получится следующий результат

$$c_{j_1, j_2} = \sum_{k_1=0}^{m_1-1} \beta^{j_1 k_1} \sum_{k_2=0}^{m_2-1} \gamma^{j_2 k_2} \Gamma(k_1, k_2), \tag{10}$$

где $c_{j_1, j_2} = c_{j_1 m_2 + j_2 m_1}$, $\Gamma(k_1, k_2) = y_{k_1 M_2 m_2 + k_2 M_1 m_1}$.

Заметим, что имеется лишь m_1 весов $\beta^{j_1 k_1}$ и m_2 весов $\gamma^{j_2 k_2}$, которые хранятся в памяти компьютера. Поэтому для вычисления одной внутренней суммы по формуле (10) требуется выполнить m_2 умножений, а для вычисления всех m_1 внутренних сумм при $k_1 = 0, \ldots, m_1 - 1$ требуется выполнить $m = m_1 m_2$ умножений. После этого остается умножить эти внутренние суммы на m_1 весов $\beta^{j_1 k_1}$, так что всего требуется $m_1 m$ умножений. Все остальные операции в формуле (10) являются сложениями.

Итак, если число m не является простым, мы можем вычислить преобразование Фурье за $\leqslant m^{3/2}$ умножений[2)]. Если мы сможем разложить m_1 и m_2 на произведение взаимно простых чисел, число умножений сократится еще более. Разумеется, некоторые трудности возникают из-за порядка вычисления коэффициентов a_j, но их можно преодолеть, затрачивая относительно небольшое дополнительное время.

Проиллюстрируем правило перенумерации индексов следующим примером. Пусть $m = m_1 \times m_2 = 3 \times 7$. Ясно, что $1 \times 7 + 19 \times 3 = 64 \equiv 1 \pmod{21}$. Поэтому $M_1 = 1$, $M_2 = 19$. Представим исходную последовательность чисел $a_0, \ldots, a_{20}$ в виде таблицы $a(k_1, k_2)$: в клетку (k_1, k_2), $k_1 = 0, 1, 2$, $k_2 = 0, 1, \ldots, 6$, ставим элемент с индексом $k = 7k_1 + 15k_2 \pmod{21}$, поскольку $19 \times 3 \equiv 15 \pmod{21}$. Получаем расстановку индексов на входе:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 15 & 9 & 3 & 18 & 12 & 6 \\ 7 & 1 & 16 & 10 & 4 & 19 & 13 \\ 14 & 8 & 2 & 17 & 11 & 5 & 20. \end{array}$$

В клетке (k_1, k_2), $k_1 = 0, 1, 2$, $k_2 = 0, 1, \ldots, 6$, выходной таблицы стоит элемент с индексом $j_1 \equiv 19j \equiv j \pmod 3$, $j_2 \equiv j \pmod 7$. Получаем расстановку индексов на выходе:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 3 & 6 & 9 & 13 & 15 & 18 \\ 7 & 10 & 13 & 16 & 19 & 1 & 4 \\ 14 & 17 & 20 & 2 & 5 & 8 & 11. \end{array}$$

В действительности, описанный выше алгоритм, называемый алгоритмом Гуда – Томаса, был первым (1960–63) алгоритмом быстрого вычисления дискретного преобразования Фурье, хотя приоритет обычно приписывается Кули – Тьюки (1965). Причина этого в том, что алгоритм Кули – Тьюки был широко разрекламирован и использует более простой метод упорядочения коэффициентов.

В заключение опишем алгоритм Кули – Тьюки. При фиксированных m_1 и m_2 (здесь m_1 и m_2 могут иметь общие простые множители) введем

[2)]При $m = 2^n$ есть алгоритм вычисления дискретного преобразования Фурье, использующий $O(m \log m)$ умножений, который также называется быстрым преобразованием Фурье. Об этом алгоритме и его применении к задаче быстрого умножения чисел можно прочитать в книгах Кнут Д. Искусство программирования на ЭВМ. В 3 т. Т. 2. М.: Мир, 1977, Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир, 1979. — *Прим. ред.*

индексы j_1, j_2, k_1, k_2 с помощью соотношений $j = m_2 j_1 + j_2$, $k = m_1 k_2 + k_1$, где $j_1, k_1 = 0, 1, \ldots, m_1 - 1$ и $j_2, k_2 = 0, 1, \ldots, m_2 - 1$. Переходя к суммированию по k_1, k_2 в (6) так же, как и в первом из описанных выше алгоритмов, получим равенство

$$a_j \equiv a_{j_1, j_2} = \sum_{k_1=0}^{m_1-1} z^{jk_1} \sum_{k_2=0}^{m_2-1} \gamma^{k_2 j_2} y_{k_1, k_2},$$

где $\gamma = z^{m_1}$, $y_{k_1,k_2} = y_{m_1 k_2 + k_1}$, $a_j = a_{m_2 j_1 + j_2}$. Подробнее об алгоритмах БПФ можно прочитать в книгах [4], [5], [6], [7], [8].

4. Обработка изображений

Понятие дискретного преобразования Фурье естественно обобщается на двумерный случай, когда данные образуют не последовательность чисел, а двумерный массив $y(k, l)$, $1 \leqslant k \leqslant K$, $1 \leqslant l \leqslant L$. Преобразование Фурье этого массива (матрицы) образует новый массив, элементы которого имеют следующий вид

$$V(j, m) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L} z_1^{kj} z_2^{lm} y(k, l), \tag{11}$$

где $z_1 = e^{2\pi i/K}$, $z_2 = e^{2\pi i/L}$.

Двумерное преобразование Фурье — это не просто математическая абстракция, оно полезно во многих прикладных задачах, включая обработку изображений. Под *изображением* мы понимает двумерную таблицу, элементы которой отвечают уровням яркости фотографии в точке с декартовыми координатами (kh, lh), где h — размер элементарной ячейки (разрешение) изображения. Эта простая модель изображения вполне удовлетворительна при анализе фотографий поверхности Земли и других планет, сделанных из космоса.

Преобразование Фурье позволяет значительно сократить количество информации, которое необходимо использовать для восстановления изображения. Обычно достаточно запомнить лишь несколько первых гармоник (коэффициентов Фурье), чтобы воспроизвести изображение с приемлемой точностью при помощи обратного преобразования Фурье

$$\hat{y}(k, l) = \frac{1}{m^2} \sum_{j=1}^{\hat{j}} \sum_{m=1}^{\hat{m}} z_1^{-kj} z_2^{-lm} V(j, m).$$

Шляпка над y указывает на то, что $\hat{y}(k, l)$ только приблизительно совпадает с $y(k, l)$ в случае, когда $\hat{j} < K$, $\hat{m} < L$.

Оказывается, что во многих практических ситуациях точность такой аппроксимации является достаточно хорошей, даже когда K, L значительно больше, чем $\hat{j}$, $\hat{m}$. В качестве примера обсудим использование преобразования Фурье для сжатия информации при исследовании формы морской поверхности. Воспользуемся идеализированной моделью, предполагая, что уровень контрастности в любой точке пропорционален высоте морской волны. Предположим также, что длина волны равна p в некотором направлении и q в перпендикулярном к нему направлении, это означает, что

$$y(k,l) = A \cos\frac{2\pi k}{p} \cos\frac{2\pi l}{q},$$

где A — амплитуда волны. Легко проверить, что $V(j,m) = A$, если $j = \frac{K}{p}$, $m = \frac{L}{q}$, и нулю во всех остальных случаях (для простоты мы предположим, что $\frac{K}{p}$, $\frac{L}{q}$ — целые числа). Таким образом, для восстановления этого изображения достаточно знать только три числа $(p, q, V(\frac{K}{p}, \frac{L}{q}))$.

В случае произвольного массива $y(k,l)$ отбрасывание членов с большими значениями k и l в сумме (11) приводит к более сглаженному изображению, чем первоначальное. Это скорее положительное свойство, поскольку мелкомасштабные флуктуации обычно вызваны шумом и их удаление при обработке приводит к улучшению качества изображения.

Американский исследователь Роналд Брайсвелл использовал двумерное преобразование Фурье для анализа источников радиоволн на поверхности Солнца по радиоастрономическим данным. Построенные им карты солнечной активности были высоко оценены специалистами НАСА, которые использовали их для обеспечения безопасности астронавтов, принимавших участие в лунных полетах.

5. Покрытия целочисленного тора

Алгоритмы быстрого вычисления многомерного преобразования Фурье интересовали исследователей с середины 70-х годов (см., например, [9] в случае простого $n = p$). В 1988 году инженер Исидор Гертнер (он получил образование в Каунасе, Литва, и теперь работает в США) придумал новый метод быстрого вычисления многомерного преобразования Фурье ([10]). Мы поясним его идею в случае двумерного массива данных $n \times n$. Этот массив можно периодически продолжить на всю решетку $\mathbb{Z}^2$ и рассматривать как двумерный дискретный тор. Метод Гертнера требует вычисления N одномерных преобразований Фурье, где N равно минимальному числу линий

$$L_{m,r} = \{(k,l) : km + lr \equiv 0 \pmod{n}\},$$

покрывающих квадрат

$$T_n = \{(k,l) : k = 0,\dots,n-1,\ l = 0,\dots,n-1\}.$$

Переменные m, r, определяющие «линию», пробегают значения $0, 1, \dots, n-1$.

Слово *линия* записано в кавычках потому, что в действительности каждая «линия» $L_{m,r}$ на (k,l)-плоскости представляет из себя семейство параллельных линий $km + lr = 0, km + lr = n, km + lr = 2n, \dots$

Утверждение «линии покрывают квадрат» означает, что (i) все линии проходят через начало координат $(0,0)$ и (ii) любая другая точка с целочисленными координатами (рассматриваемая как точка двумерного тора) принадлежит в точности одной линии.

Обозначим через $v(n)$ минимальное число линий $L_{m,r}$, $(m,r) \in T_n$, покрывающих T_n. Ключевая идея метода Гертнера состоит в так называемом *дискретном преобразовании Радона*. Этот метод безусловно заслуживает отдельной статьи, поэтому мы ограничимся лишь следующей задачей.

Задача 3*. Попробуйте разработать алгоритм быстрого двумерного преобразования Фурье.

Подсказка. Рассмотрим семейство параллельных линий, перпендикулярных линии $L_{m,r}$. Просуммируем элементы таблицы вдоль каждой такой перпендикулярной линии и затем вычислим одномерное преобразование Фурье полученных сумм. Выполним эту процедуру для каждой из $v(n)$ линий покрытия.

Интересно явно вычислить число $v(n)$ минимально необходимых одномерных преобразований Фурье. Следующая теорема относится к покрытию n-мерного тора.

Теорема 3. *Если $n = p$ — простое число, то $v(p) = p+1$, и искомое покрытие состоит из следующих линий:*

$$k \equiv 0 \pmod p, \quad k + l \equiv 0 \pmod p, \quad k + 2l \equiv 0 \pmod p, \dots,$$
$$k + (p-1)l \equiv 0 \pmod p, \quad l \equiv 0 \pmod p.$$

Упражнение. Проиллюстрируйте это утверждение рисунком при $n = 5$. Проверьте, что указанные линии действительно покрывают все точки квадрата T_5.

Подсказка. Линия $L_{1,2}$ проходит через точки $(1,2), (2,4), (3,1), (4,3)$; а линия $L_{1,3}$ проходит через точки $(1,3)$, $(2,1)$, $(3,4)$, $(4,2)$; остальное очевидно.

Доказательство теоремы 3. Вначале проверим, что $v(p) \geqslant p+1$. Из определения линии $L_{m,r}$ вытекает, что она не может покрывать более, чем p точек квадрата T_p, потому что для любого фиксированного k такое l, что $km + lr \equiv 0 \pmod p$ находится единственным образом. Если бы существовало два решения, скажем, l_1 и l_2, то $(l_1 - l_2)r \equiv 0 \pmod p$. Поскольку p — простое число, то это равенство влечет $l_1 = l_2$.

Кроме того, каждая линия $L_{m,r}$ содержит $(0,0)$. Поскольку квадрат T_p содержит p^2 точек, очевидным образом справедливо следующее неравенство

$$v(p) \geqslant \frac{p^2+p-1}{p}, \quad \text{т. е. } v(p) \geqslant p+1.$$

Покажем теперь, что каждая точка (k', l') квадрата T_p принадлежит по крайней мере одной линии $L_{1,r}$, $r = 0, 1, \ldots, p-1$ или $L_{0,1}$. Действительно, предположим, что (k', l') не принадлежит $L_{0,1}$. Числа k', $k'+l'$, $\ldots$, $k' + (p-1)l'$ имеют различные остатки при делении на p (проверьте это), а поскольку их количество в точности равно p, одно из них должно делиться на p без остатка. Это означает, что (k', l') принадлежит одной из линий $L_{1,r}$, что завершает доказательство. $\square$

Задача 4. Предположим, что p простое число и $k \geqslant 1$. Докажите, что

$$v(p^k) = (p+1)p^{k-1}.$$

Задача 5. Пусть p_1, p_2 — два различных простых числа. Тогда

$$v(p_1 p_2) = p_1 p_2 + p_1 + p_2 + 1.$$

Задача 6. Найдите семейство 12 линий, покрывающих квадрат T_6. Докажите, что число линий в этом семействе не может быть уменьшено.

Отметим, что традиционные методы быстрого вычисления двумерного преобразования Фурье массива $n \times n$ требуют $2n$ вычислений одномерного преобразования Фурье. Таким образом, метод Гертнера примерно вдвое сокращает число операций, когда $n = p$ — простое число. В 1991 г. М. Кельберт и А. Мазель нашли $v_d(n)$ для любого n и массивов любой размерности d (см. [11]).

Приведем эту формулу. Разложим n в произведение $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_l^{k_l}$, где $p_1, \ldots, p_l$ — простые числа. Тогда

$$v_d(n) = n^{d-1} \prod_{i=1}^{l} \left(1 + \frac{1}{p_i} + \ldots + \frac{1}{p_i^{d-1}}\right). \tag{12}$$

Проверьте, что при $d = 2$ эта формула содержит результат теоремы 3 и задач 4 и 5.

Из формулы (12) видно, что при дискретизации изображения выгодно выбрать в качестве n простое число, а не степень двойки, как это обычно делается в приложениях. Например, в двумерном случае, при $n = 32$, 33 и $n = 35$ нужно использовать одномерное преобразование Фурье 48 раз, а при $n = 31$ только 32 раза.

В размерностях $d > 2$ разница оказывается более существенной. Например, при $d = 3$ и $n = 31$ одномерное преобразование Фурье нужно использовать 993 раза, а при $n = 32$, 33, 35 — 1792, 1729 и 1767 раз, соответственно.

Список литературы

[1] *Fourier J. B. J.* The Analytical Theory of Heat. Cambridge Univ. Press, 1878.

[2] *Grattan-Guinness I.* Joseph Fourier, 1768-1830: a survey of his life and work, based on a critical edition of his monograph on the propagation of heat. Cambridge: MIT Press, 1972.

[3] *Хассе Г.* Лекции по теории чисел. М.: Иностранная литература, 1953.

[4] *Blahut R. E.* Digital Transmission of Information. Reading, MA: Addison-Wesley, 1990.

[5] *Blahut R. E.* Fast Algorithms for Digital Signal Processing. Reading, MA.: Addison-Wesley, 1985.

[6] *Nussbaumer H. J.* Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms. Berlin: Springer-Verlag, 1981.

[7] *Brigham E. O.* The Fast Fourier Transform and its Applications. London: Prentice Hall Intern., 1988.

[8] *McClellan J. H., Rader C. M.* Number Theory in Digital Signal Processing. London: Prentice Hall Intern., 1979.

[9] *Auslander L., Feig E., Winograd S.* New algorithm for multi-dimensional discrete Fourier transform // IEEE Trans. ASSP, 1983. Vol. 31. No 2. P. 388–403.

[10] *Gertner I.* New efficient algorithm to compute the two-dimensional discrete Fourier transform // IEEE Trans. ASSP, 1988. Vol. 36. No 7. P. 1036–1050.

[11] *Кельберт М., Мазель А.* Быстрое вычисление многомерного дискретного преобразования Фурье // Проблемы передачи информации, 1991. Т. 27. №2. С. 107–110.