Решения задач из предыдущих выпусков

В этом номере мы помещаем решения избранных задач, опубликованных в предыдущих выпусках «Математического просвещения». В дальнейшем мы рассчитываем опубликовать все решения.

Далее номер задачи $K.L$ означает, что это L-я задача из K-го выпуска. В скобках указано, кому принадлежит приводимое решение задачи.

1.3. Условие. Может ли сумма чисел вида $a\sin(k\pi/n)$, где a — рациональное число, k, n — целые, равняться $\sqrt{1997}$?

Решение. Ответ: «может». Более того, то же самое верно для любого числа $\sqrt{a}$, $a \in \mathbb{Q}$. Докажем это утверждение для $\sqrt{2l+1}$, где l — целое.

Выражение $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ есть многочлен (многочлен Чебышёва), степень которого равна n, старший коэффициент равен 2^{n-1}, а при нечетном $n = 2l+1$ многочлен Чебышёва нечетен и его коэффициент при первой степени равен $(-1)^l(2l+1)$. Все эти факты легко получаются из рекуррентного соотношения

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t),$$

проверяемого непосредственно из определения $T_n(t)$.

Многочлен $T_{2l+1}(t)/t$ — четный и имеет нули $\pm\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2(2l+1)}$, $0 \leqslant k < l$. Отсюда следует, что

$$\prod_{k=0}^{l-1} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2(2l+1)} = \frac{\sqrt{2l+1}}{2^l},$$

и остается представить это произведение в виде требуемой суммы, пользуясь обычными тригонометрическими формулами.

Пример: $T_5(t)/t = 16t^4 - 20t^2 + 5 = 16\big(x^2 - \cos^2\frac{\pi}{10}\big)\big(x^2 - \cos^2\frac{3\pi}{10}\big)$, поэтому $\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}}{4}$, откуда и получаем требуемое представление

$$\sin\frac{\pi}{10} + \sin\frac{3\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

(*В. М. Тихомиров*)

1.7. Условие. Пусть функция непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,1]$,

$$f(0)=f(1)=0, \qquad \int\limits_0^1 \left(f'(t)\right)^2\,dt \leqslant 1.$$

Изобразите на координатной плоскости множество точек, через которые может проходить график функции $y=f(x)$.

Решение. Искомое множество является внутренностью круга $y^2 + (x-1/2)^2 \leqslant 1/4$.

Действительно, зафиксировав точку ξ, $0<\xi<1$, найдем верхнюю и нижнюю грани тех чисел η, для которых $\eta=f(\xi)$, где f — из описанного в условии задачи класса. Обозначим $\hat u(x)=\sqrt{\dfrac{1-\xi}{\xi}}\chi_{[0,\xi]}(x)-\sqrt{\dfrac{\xi}{1-\xi}}\chi_{[\xi,1]}(x)$, где χ_A — характеристическая функция множества A:

$$\chi_A=\begin{cases}1, & \text{если } x\in A,\\ 0, & \text{если } x\notin A.\end{cases}$$

Как легко понять, функция

$$\hat f(x)=\int\limits_0^x \hat u(z)\,dz$$

кусочно-линейная, равна 0 в точках 0 и 1 и имеет излом в точке $\sqrt{\xi(1-\xi)}$. Подберем числа $\hat\lambda$ и $\hat\mu$ так, чтобы функция

$$a(x)u+\frac{\hat\lambda u^2}{2},$$

где $a(x)=-\chi_{[0,\xi]}(x)+\hat\mu$, достигала своего минимума в точке $\hat u(x)$; $\hat\lambda$ и $\hat\mu$ легко вычисляются, но нам их значения не понадобятся, важно лишь, что $\hat\lambda>0$. Используя условия задачи, получаем цепочку неравенств:

$$-f(\xi)+\frac{\hat\lambda}{2}\overset{\int f'^2\leqslant 1,\ \int f'=0}{\geqslant}\int\limits_0^1\left((-\chi_{[0,\xi]}(x)+\hat\mu)f'(x)+\frac{\hat\lambda f'(x)^2}{2}\right)dx\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_0^1\left((-\chi_{[0,\xi]}(x)+\hat\mu)\hat u(x)+\frac{\hat\lambda\hat u(x)^2}{2}\right)dx=-\hat f(\xi)+\frac{\hat\lambda}{2},$$

откуда $f(\xi)\leqslant\sqrt{\xi((1-\xi)}$ и равенство достигается лишь для функции $\hat f(x)$, которая не непрерывно дифференцируема. Из симметрии $|f(\xi)|\leqslant\sqrt{\xi((1-\xi)}$. А если $|\eta|<\sqrt{\xi((1-\xi)}$, точку (ξ,η) можно получить как $(\xi,f(\xi))$, где f — непрерывно дифференцируема. *(В. М. Тихомиров)*

1.8. Условие. а) Может ли семейство подмножеств натурального ряда быть несчетным, если для любых двух подмножеств из этого семейства одно строго содержится в другом?

б) Тот же вопрос, если пересечение любых двух множеств в семействе конечно.

Решение. В обоих пунктах ответ: «может». Рассмотрим семейства множеств $M_\alpha = \bigcup_n (n^2, n^2 + \lfloor \alpha n \rfloor)$ и $N_\alpha = \bigcup_n n^2 + \lfloor \alpha n \rfloor$, где $0 < \alpha < 1$. Ясно, что при $0 < \alpha < \beta$ имеет место строгое включение $M_\alpha \subset M_\beta$ и, кроме того, при всех достаточно больших n число вида $n^2 + \lfloor \alpha n \rfloor$ не совпадает с числом вида $m^2 + \lfloor \beta m \rfloor$. Поэтому семейство M_α служит примером к п. а), а семейство N_α — к п. б). *(А. Я. Белов)*

1.10. Условие. Функция, заданная на всей вещественной прямой, бесконечно дифференцируема. В каждой точке некоторая производная (номер производной может зависеть от точки) равна нулю. Докажите, что эта функция — многочлен.

Решение. Обозначим рассматриваемую функцию через f. Для каждого многочлена p построим замкнутые множества

$$M'_p = \{x \mid f(x) = p(x)\},$$
$$M_p = M'_p \setminus \{x \mid x \text{ изолированная точка } M'_p\}$$

и докажем, что для какого-то p выполнено $M_p = \mathbb{R}$.

Покажем, что $M_{p_1} \cap M_{p_2} = \varnothing$ при $p_1 \neq p_2$. Каждая точка множества M_p по построению является предельной, а ряд Тейлора f в предельной точке $x_0 \in M_p$ однозначно восстанавливается по значениям функции на $M_p \setminus \{x_0\}$. Действительно, предположим обратное. Пусть для некоторых двух функций $f_1, f_2 \in C^\infty$ с несовпадающими в x_0 рядами Тейлора при $x_n \to x_0$ $(x_k \neq x_0,\ k > 0)$ выполнено $f_1(x_n) = f_2(x_n)$. Тогда функция $g = f_1 - f_2$ обращается в 0 на $\{x_n\}$ (сколь угодно близко от x_0), а ее ряд Тейлора — ненулевой. Применяя формулу Тейлора для первого ненулевого члена ряда Тейлора функции g, приходим к противоречию.

Обозначим $N = \mathbb{R} \setminus \cup_p M_p$. Это открытое множество. Докажем, что N пусто, после чего из связности $\mathbb{R}$ заключим, что ровно одно M_p непусто (что и требуется доказать).

Итак, предположим, что N непусто. Обозначим через $F^{(n)}$ множество нулей n-й производной f. Построим систему вложенных интервалов Δ_i индуктивно. Выберем произвольно интервал $\Delta_0 \subset N$, а каждый интервал Δ_{n+1} выберем в открытом непустом множестве $\Delta_n \setminus F^{(n+1)}$ (если $\Delta_n \subset F^{(n+1)}$, то f совпадает с многочленом на Δ_n). Нетрудно видеть, что в точках $\cap_{n=0}^{\infty} \Delta_n$ все производные f отличны от 0. Пришли к противоречию. *(Д. Ю. Бураго)*

2.1. Условие. Дана возрастающая функция $f(x)$ такая, что $f(0) > 0$, $f(1) < 1$. Докажите, что существует такое x, что $f(x) = x$ и, кроме того, x — точка непрерывности функции f.

Решение. Пусть точка x_0 удовлетворяет следующим условиям:

- ▷ Сколь угодно близко слева от x_0 есть такая точка x, что $f(x) > x$.
- ▷ Сколь угодно близко справа от x_0 есть такая точка x, что $f(x) < x$.

Тогда из монотонности функции f следует равенство $f(x_0) = x_0$. Покажем непрерывность f в точке x_0. В силу симметрии достаточно это проверить для непрерывности слева.

Пусть последовательность $x_n \to x_0$ сходится слева к точке x_0 и пусть значения $f(x_n)$ отличаются от $f(x_0) = x_0$ не менее, чем на $\varepsilon > 0$. В этом случае $f(x_n) < x_0 - \varepsilon$. Поскольку $x_n \to x_0$ слева, то в силу монотонности f неравенство $f(x) < x_0 - \varepsilon$ выполняется для всех $x < x_0$.

Но если $x_0 - x < \varepsilon$ и при этом $f(x) < x_0 - \varepsilon$, то $f(x) < x$. Следовательно, $f(x) < x$ в некоторой левой окрестности точки x_0. Получили противоречие с выбором точки x_0.

Итак, непрерывность f в точке x_0 доказана.

Остается показать существование такой точки x_0. Поскольку $f(0) > 0$ и $f(1) < 1$, то в качестве x_0 можно взять $\sup\{x | \forall\, t < x\ f(t) \geqslant t\}$.

(*А. Я. Белов*)

2.3. Условие. Пусть $a_0 = a$, $a_{n+1} = a^{a_n}$, q — произвольное натуральное число, большее 1. Докажите, что последовательность остатков от деления a_n на q стабилизируется (т.е. все остатки, начиная с некоторого, равны).

Решение. Воспользуемся следующим фактом: остатки от деления чисел вида a^n на q периодичны с периодом $q_1 < q$. Тогда при достаточно больших n остаток от деления числа n на q_1 однозначно определяет остаток от деления числа a^n на q.

Будем решать задачу индукцией по q. Можно считать, что при всех $q' < q$ остатки последовательности a_n по модулю q' при всех достаточно больших n стабилизируются. Но тогда стабилизируются и остатки последовательности $a_{n+1} = a^{a_n}$ при делении на q. А последовательность a_{n+1} получается из последовательности a_n сдвигом. (*А. Я. Белов*)

2.4. Условие. Можно ли числа от 1 до 2^{1000} раскрасить в два цвета так, чтобы не существовало арифметических прогрессий длины 2000, составленных из чисел одного цвета?

Решение. Ответ: искомая раскраска существует.

Покажем, что отлична от нуля вероятность того, что в случайно и равновероятно выбранной раскраске нет арифметической прогрессии длины 2000.

Оценим количество прогрессий длины 2000. Каждая такая прогрессия задается первыми двумя членами $i_1 < i_2$, причем не все такие пары задают прогрессию. Поэтому количество прогрессий строго меньше числа пар — т. е. числа $2^{1000}(2^{1000}-1)/2 < 2^{1999}$.

С другой стороны, вероятность того, что данная прогрессия раскрашена одинаково, равна $2/2^{2000} = 2^{-1999}$.

И сумма таких вероятностей по всем прогрессиям меньше 1. Таким образом, искомая раскраска существует.

Замечание. От вероятностей в таком рассуждении легко избавиться. Для этого нужно говорить о покрытиях подходящим образом подобранных множеств.

(*А. Я. Белов*)

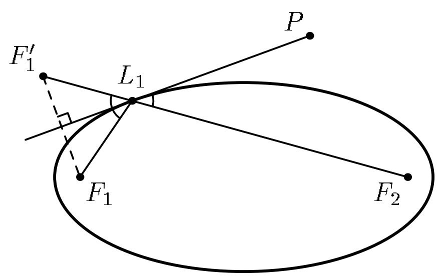
2.5. Условие. Дано выпуклое тело в пространстве. Докажите, что можно отметить 4 точки на его поверхности так, чтобы касательная (т. е. опорная плоскость) в каждой отмеченной точке была параллельна плоскости, проходящей через остальные три.

Решение. Расположим 4 точки A, B, C, D в вершинах тетраэдра максимального объема, вписанного в данное тело. Если плоскость, проходящая через D и параллельная (ABC), содержит внутреннюю точку тела, то на поверхности тела можно найти точку D', расстояние от которой до плоскости (ABC) больше расстояния от точки D до этой плоскости. Получили противоречие с максимальностью объема тетраэдра $ABCD$.

Осталось показать существование тетраэдра максимального объема, вписанного в данное тело. Прежде всего, ограничены координаты вершин, а также ограничены объемы вписанных тетраэдров (объемом самого тела). Обозначим через v точную верхнюю грань таких объемов. Рассмотрим последовательность тетраэдров, вписанных в исходное тело, объемы которых стремятся к v. Координаты вершин тетраэдров задают точку 12-мерного пространства. Извлечем из последовательности таких точек сходящуюся подпоследовательность стандартным образом: рассмотрим подпоследовательность, у которой сходятся первые координаты, из нее извлечем подпоследовательность тетраэдров со сходящимися вторыми координатами и т. д. Предельной точке соответствует тетраэдр максимального объема v, вписанный в данное тело. (*А. Я. Белов*)

2.6. Условие. Из произвольной точки P вне эллипса проведены два касательных к эллипсу луча l_1 и l_2. Кроме того, из P проведены лучи s_1 и s_2 через фокусы эллипса. Докажите, что угол между l_1 и s_1 равен углу между l_2 и s_2.

Решение. Пусть PL_1, PL_2 — касательные к эллипсу, F_1, F_2 — его фокусы, F_1', F_2' — точки, симметричные F_1, F_2 относительно прямых PL_1,



PL_2. Тогда из свойств эллипса получаем (см. рис.):

$$F_1'F_2 = F_1L_1 + F_2L_1 = F_1L_2 + F_2L_2 = F_1F_2'.$$

Следовательно, треугольники $PF_1'F_2$ и PF_1F_2' равны по трем сторонам и, значит, равны углы $F_1'PF_2$ и F_1PF_2', что равносильно утверждению задачи.

(*А. Заславский*)

3.1. Условие. A, B, C — произвольные матрицы размера 2×2. Докажите тождество Холла: $[[A,B]^2,C] = 0$. (Через $[A,B] \stackrel{\text{def}}{=} AB - BA$ обозначается *коммутатор*).

Решение. Поскольку $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, след коммутатора $[A,B] = AB - BA$ равен нулю. С другой стороны, след матрицы есть сумма ее собственных значений, а собственных значений у матрицы второго порядка два. Поэтому собственные значения матрицы $[A,B]$ — нули или противоположные числа. Если они равны нулю, то и матрица $[A,B]^2 = 0$. Если они ненулевые противоположные числа, то матрица $[A,B]$ диагонализуема и ее квадрат $[A,B]^2$ есть скалярная матрица, т.е. матрица вида $\begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$. Такая матрица лежит в центре (т.е. коммутирует со всеми матрицами). Поэтому в алгебре матриц второго порядка выполняется тождество $[[A,B]^2,C] = 0$.

(*А. Я. Белов*)

3.2. Условие. Пусть $|\varepsilon_i| < 1$ и произведение $\prod(1-\varepsilon_i)$ сходится. Верно ли, что сходится ряд $\sum \varepsilon_i$?

Решение. Ответ: не обязательно.

Положим $\varepsilon_{2n} = -\delta_n$, $\varepsilon_{2n+1} = \delta_n + \dots + \delta_n^k + \dots$, где $\delta_n \to 0$. Тогда $(1+\varepsilon_{2n})(1+\varepsilon_{2n+1}) = 1$, поэтому произведение $\prod_n (1+\varepsilon_{2n})$ сходится и равно единице.

С другой стороны,

$$\sum_m \varepsilon_m = \sum_n -\delta_n + \delta_n + \ldots + \delta_n^k + \ldots = \sum_n \frac{\delta_n^2}{1-\delta_n}.$$

Для завершения конструкции достаточно выбрать δ_n так, чтобы ряд $\sum \delta_n^2$ расходился. Например, можно положить $\delta_n = n^{-1/2}$, тогда

$$\varepsilon_k = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{n}}, & \text{если } k = 2n, \\ \dfrac{1}{\sqrt{n}-1}, & \text{если } k = 2n+1. \end{cases}$$

(*А. Я. Белов*)

3.4. Условие. а) Пусть $p > 3$ – простое число. Докажите, что на торической шахматной доске размера $p \times p$ можно расставить p ферзей так, чтобы они не били друг друга.
б) Назовем *магараджей* фигуру, которая из клетки $(0, 0)$ за один ход может попасть в клетки $(0, \pm k)$, $(\pm k, 0)$, $(\pm k, \pm k)$, $(\pm k, \pm 2k)$, $(\pm 2k, \pm k)$ (k — целое положительное число). Ответьте на вопрос пункта а) для магарадж и при $p > 7$.

Решение. Занумеруем вертикальные ряды (координата X) и горизонтальные ряды (координата Y) с помощью остатков от деления на p. Будем рассматривать шахматную доску как плоскость над $\mathbb{Z}_p$.

а) Расположим ферзей в точках с координатами $(x, 2x)$. Легко видеть, что они не бьют друг друга. Ферзь бьет вдоль линий $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, $\pm x \pm y = \text{const}$. При $p > 3$ направления этих линий отличаются от направлений прямой $y = 2x$, а две прямые либо совпадают по направлению, либо пересекаются в одной точке. (Ибо система из двух линейных сравнений по простому модулю с непропорциональными левыми частями имеет единственное решение.) Если же $p = 3$, то $2 = -1$ в $\mathbb{Z}_p$, направление прямой $y = 2x$ совпадает с линией боя ферзя и расположить трех ферзей не удается. Итак, даже на торической доске $p \times p$, где p — простое, можно поставить p ферзей так, чтобы они не били друг друга. А. К. Толпыго заметил любопытный факт: на торической шахматной доске 15×15 нельзя расставить 15 ферзей так, чтобы они не били друг друга.

б) Решение аналогично, только магараджи ставятся вдоль прямой $y = 3x$ (ходом «длинного коня»). При $p = 7$ это направление совпадает с направлением прямой $x = -2y$, ибо $-1/2 = 3$ в $\mathbb{Z}_7$. При бóльших p направление прямой $y = 3x$ не совпадает с направлением боя магараджи $ax + by = \text{const}$, $|a|, |b| \leqslant 2$.

Аналогичным образом можно при всех достаточно больших p расположить p не бьющих друг друга k-монстров на торической доске порядка p. Мы называем *k-монстром* фигуру, которая бьет по направлениям прямых $ax + by = const$, где $|a|, |b| \leqslant k$. Возникает вопрос: верно ли это для всех достаточно больших досок (не только простого порядка)?

(*А. Я. Белов*)

3.5. Условие. Дан произвольный многочлен с комплексными коэффициентами. Докажите, что корни его производной лежат внутри выпуклой оболочки корней самого многочлена.

Решение. Это известный результат Гаусса. См. Gauss, Opera omnia, т. 3, с. 112, Göttingen, Ges. d. Wiss., 1886; т. 8, с. 32, 1900; можно также обратиться к книге Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978. С. 115, 300; оттуда мы и позаимствовали ссылку на оригинальный текст Гаусса.