Доказательство теоремы Понселе по Дарбу

В. В. Прасолов

Теорема Понселе состоит в следующем. Пусть заданы две коники Γ_1 и Γ_2, не касающиеся друг друга. В комплексной ситуации из каждой точки $A_1 \in \Gamma_1$, отличной от точек пересечения Γ_1 и Γ_2, можно провести ровно две касательных к Γ_2. Поэтому можно построить ломаную $A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1}$ так, чтобы её вершины A_i лежали на Γ_1, а прямые A_1A_2, A_2A_3, … , A_nA_{n+1} касались Γ_2 (подразумевается, что $A_{i+2} \neq A_i$). Предположим, что для некоторой точки A_1 точка A_{n+1} совпала с A_1, т. е. получилась замкнутая n-звенная ломаная. Тогда и при любом выборе точки $A_1 \in \Gamma_1$ тоже получится замкнутая n-звенная ломаная.

Одно из наиболее понятных доказательств теоремы Понселе предложил Дарбу [Д]. Он заметил, что теорему Понселе удобно доказывать, используя систему координат, в которой положение точки A задаётся двумя касательными к некоторой фиксированной конике, проведёнными из точки A. В качестве фиксированной коники можно выбрать произвольную конику, поскольку проективным преобразованием любую (невырожденную) конику можно перевести в любую другую. Выберем конику, которая в однородных координатах $(x : y : z)$ задаётся уравнением $y^2 = xz$. Точки этой коники имеют координаты $(1 : t : t^2)$; при $t = \infty$ получаем точку $(0 : 0 : 1)$. Касательная в точке $(x_0 : y_0 : z_0)$ задаётся уравнением $2y_0y = x_0z + z_0x$, т. е. $t^2x - 2ty + z = 0$, где t — параметр, соответствующий точке $(x_0 : y_0 : z_0)$. Чтобы найти однородные координаты точки пересечения в точках с параметрами t_1 и t_2, нужно решить систему линейных уравнений

$$t_i^2x - 2t_iy + z = 0, \quad i = 1, 2.$$

Решая её, получаем

$$2y = x(t_1 + t_2), \quad z = xt_1t_2.$$

Пример 1. *Исходная коника $y^2 = xz$ в координатах (t_1, t_2) задаётся уравнением $(t_1 + t_2)^2 = 4t_1t_2$, т. е. $(t_1 - t_2)^2 = 0$.*

Пример 2. *Касательная к исходной конике в точке $(1 : \alpha : \alpha^2)$ задаётся уравнением $(t_1 - \alpha)(t_2 - \alpha) = 0$.*

Нам потребуется описание семейства кривых минимальной степени, проходящих через все точки пересечения n прямых общего положения на плоскости. Каждая из этих прямых пересекает такую кривую в $n - 1$ точках, поэтому степень кривой не может быть меньше $n - 1$.

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 5, 2001(140–144)

Лемма (Дарбу). *Уравнение любой кривой степени $n-1$, проходящей через все точки пересечения прямых, заданных линейными уравнениями $p_1 = 0, \ldots, p_n = 0$, имеет вид*

$$p_1 \cdot \ldots \cdot p_n \left(\frac{\lambda_1}{p_1} + \ldots + \frac{\lambda_n}{p_n} \right) = 0,$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — некоторые константы (предполагается, что все точки пересечения данных прямых попарно различны).

Доказательство. Пусть рассматриваемая кривая задаётся уравнением $C = 0$. Возьмём прямую l, пересекающую прямые $p_1, \ldots, p_n$ в n различных точках $x_1, \ldots, x_n$, и выберем числа λ_i так, чтобы в точках x_i выполнялось равенство

$$C - p_1 \cdot \ldots \cdot p_n \left(\frac{\lambda_1}{p_1} + \ldots + \frac{\lambda_n}{p_n} \right) = 0. \tag{1}$$

Для этого нужно положить

$$\lambda_i = \frac{C(x_i)}{p_1(x_i) \cdot \ldots \cdot \hat{p}_i(x_i) \cdot \ldots \cdot p_n(x_i)}.$$

Тогда равенство (1) выполняется в n различных точках каждой прямой p_i. Если равенство (1) выполняется не для всех точек плоскости, то оно задаёт кривую степени не выше $n-1$. Но эта кривая должна содержать все прямые p_i, поэтому её степень не может быть меньше n. Приходим к противоречию, поэтому $C = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n \left(\frac{\lambda_1}{p_1} + \ldots + \frac{\lambda_n}{p_n} \right) = 0$.

Выберем в качестве прямых $p_1, \ldots, p_n$ касательные к конике $y^2 = xz$ в точках с параметрами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Согласно лемме Дарбу кривая степени $n-1$, проходящая через точки пересечения этих прямых, задаётся уравнением

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{(t_1 - \alpha_i)(t_2 - \alpha_i)} = 0.$$

Тождество

$$\frac{\lambda_i}{t_1 - \alpha_i} - \frac{\lambda_i}{t_2 - \alpha_i} = \frac{(t_2 - t_1)\lambda_i}{(t_1 - \alpha_i)(t_2 - \alpha_i)}$$

показывает, что после умножения на $t_2 - t_1$ это уравнение можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{t_1 - \alpha_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{t_2 - \alpha_i}.$$

Напомним, что точки, для которых $t_1 = t_2$, лежат на исходной конике $y^2 = xz$. Пусть

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{t - \alpha_i} = \frac{P_{n-1}(t)}{Q_n(t)} = R(t),$$

где $Q_n(t) = (t - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (t - \alpha_n)$ и $P_{n-1}(t)$ — многочлен степени не выше $n-1$.

Равенство $R(t_1) = R(t_2)$ эквивалентно равенству $R_\mu(t_1) = R_\mu(t_2)$, где

$$R_\mu(t) = \frac{P_{n-1}(t)}{Q_n(t) + \mu P_{n-1}(t)}.$$

Это означает, что для всех μ точки пересечения касательных в точках с параметрами $\alpha_1(\mu), \ldots, \alpha_n(\mu)$, где $\alpha_1(\mu), \ldots, \alpha_n(\mu)$ — корни многочлена $Q_n(t) + \mu P_{n-1}(t)$, лежат на одной и той же кривой степени $n - 1$. Действительно, рациональную функцию $R_\mu(t)$ можно представить в виде

$$R_\mu(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i(\mu)}{t_1 - \alpha_i(\mu)};$$

здесь предполагается, что числа $\alpha_1(\mu), \ldots, \alpha_n(\mu)$ попарно различны.[1)]

Для $n = 3$ и $n = 4$ теорему Понселе теперь легко доказать. При $n = 3$ берём треугольник, вписанный в конику Γ_1 и описанный вокруг коники Γ_2. Существует однопараметрическое семейство троек прямых, которые касаются коники Γ_2 и точки пересечения которых лежат на конике Γ_1. При $n = 3$ все точки пересечения прямых являются вершинами рассматриваемой ломаной, а кроме того, никаких проблем с возможным слиянием точек $\alpha_i(\mu)$ не возникает по геометрическим соображениям.[2)]

Для $n = 4$ тоже нет проблем с возможным слиянием точек $\alpha_i(\mu)$, потому что в этом случае могут слиться только точки $\alpha_i(\mu)$, соответствующие соседним звеньям ломаной, а тогда получается касание коник Γ_1 и Γ_2. Но для $n = 4$ уже не все точки пересечения прямых являются вершинами рассматриваемой ломаной: для четырёхугольника помимо вершин есть ещё и точки пересечения продолжений сторон. Через эти 6 точек пересечения сторон четырёхугольника и их продолжений нужно провести кривую степени 3, причём кривая, проходящая через вершины четырёхугольника, должна быть данной коникой Γ. Такая кривая должна быть объединением коники Γ и прямой l, соединяющей точки пересечения продолжений сторон. Существует однопараметрическое семейство четвёрок прямых, которые касаются данной коники и точки пересечения которых лежат на Γ и l. Вообще говоря, вершина четырёхугольника могла бы при движении «переехать» с коники Γ на прямую l. Но Γ и l не имеют вещественных точек самопересечения.

При $n \geqslant 5$ проблемы с возможным слиянием точек $\alpha_i(\mu)$ и с переезжанием вершин ломаной с одной ветви кривой на другую становятся более сложными. Поэтому подойдём к задаче по-другому.

Рассмотрим ломаную $A_1A_2A_3\ldots$, вершины которой лежат на конике Γ_1, а звенья касаются коники Γ_2. Мы снова будем задавать положение точки координатами, связанными с коникой Γ_2. Будем предполагать, что точка A_i имеет

[1)] Совпадение чисел $\alpha_i(\mu)$ и $\alpha_j(\mu)$ при $i \neq j$ соответствует тому, что при данном значении μ вместо замкнутой n-звенной ломаной появляется (n/k)-звенная ломаная, которая обходится k раз. В действительности такого не бывает, но это требует отдельного доказательства.

[2)] В условии теоремы Понселе предполагается, что коники Γ_1 и Γ_2 не касаются. Из слияния двух точек $\alpha_i(\mu)$, соответствующих соседним звеньям ломаной, вытекает касание коник. А в треугольнике любая пара сторон соседняя.

координаты (α_{i-1},α_i). Коника Γ_1 задаётся уравнением $f(t_1,t_2)=0$, где

$$f(t_1,t_2)=at_1^2t_2^2+bt_1t_2(t_1+t_2)+c(t_1^2+t_2^2)+dt_1t_2+e(t_1+t_2)+f.$$

Выясним, каким уравнением задаётся кривая, на которой лежат точки пересечения прямых $A_{i-1}A_i$ и $A_{i+1}A_{i+2}$. Для этого нужно исключить α_i из соотношений $f(\alpha_{i-1},\alpha_i)=0$ и $f(\alpha_i,\alpha_{i+1})=0$.

Функцию f можно представить в виде

$$\begin{aligned} f(t_1,t_2) &= \alpha(t_1)t_2^2+\beta(t_1)t_2+\gamma(t_1)= \\ &= \alpha(t_2)t_1^2+\beta(t_2)t_1+\gamma(t_2). \end{aligned}$$

Чтобы исключить α_i из уравнений

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha_{i-1})\alpha_i^2+\beta(\alpha_{i-1})\alpha_i+\gamma(\alpha_{i-1}) &= 0, \\ \alpha(\alpha_{i+1})\alpha_i^2+\beta(\alpha_{i+1})\alpha_i+\gamma(\alpha_{i+1}) &= 0, \end{aligned}$$

нужно составить результант

$$\begin{vmatrix} \alpha(\alpha_{i-1}) & \beta(\alpha_{i-1}) & \gamma(\alpha_{i-1}) & 0 \\ 0 & \alpha(\alpha_{i-1}) & \beta(\alpha_{i-1}) & \gamma(\alpha_{i-1}) \\ \alpha(\alpha_{i+1}) & \beta(\alpha_{i+1}) & \gamma(\alpha_{i+1}) & 0 \\ 0 & \alpha(\alpha_{i+1}) & \beta(\alpha_{i+1}) & \gamma(\alpha_{i+1}) \end{vmatrix} = \Phi(\alpha_{i-1},\alpha_{i+1}).$$

Точки пересечения прямых $A_{i-1}A_i$ и $A_{i+1}A_{i+2}$ лежат на кривой, заданной уравнением $\Phi(t_1,t_2)=0$. Непосредственно из определения видно, что $\Phi(t_1,t_2)= =\Phi(t_2,t_1)$ и Φ делится на t_1-t_2, поэтому Φ делится на $(t_1-t_2)^2$. Рассматриваемый результант является многочленом степени 4 (по каждой переменной), поэтому получаем симметричное квадратичное соотношение $f_1(\alpha_{i-1},\alpha_{i+1})=0$, которое задаёт конику.

Покажем, что и при любом k точки пересечения прямых $A_{i-1}A_i$ и $A_{i+k-1}A_{i+k}$ будут лежать на одной конике. Предположим, что уже известны симметричные квадратичные (по каждой переменной) соотношения

$$f(\alpha_{i-1},\alpha_i)=0,\quad f_1(\alpha_{i-1},\alpha_{i+1})=0,\quad \ldots,\quad f_{k-1}(\alpha_{i-1},\alpha_{i+k-1})=0.$$

Мы хотим получить соотношение $f_k(\alpha_{i-1},\alpha_{i+k})=0$. Для этого нужно исключить α_{i+k-1} из системы уравнений $f_{k-1}(\alpha_{i-1},\alpha_{i+k-1})=0$, $f(\alpha_{i+k-1},\alpha_{i+k})=0$. В результате получим соотношение 4-й степени $\Phi(\alpha_{i-1},\alpha_{i+k})=0$. Функция $f(\alpha_{i+k-1},t)$ обращается в нуль не только при $t=\alpha_{i+k}$, но и при $t=\alpha_{i+k-2}$. Поэтому $\Phi(\alpha_{i-1},\alpha_{i+k-2})=0$. Это означает, что многочлен $\Phi(x,y)$ делится на $f_{k-2}(x,y)$, т. е. делится на соотношение, связывающее α_{i-1} и α_{i+k-2}. Остаётся проверить, что многочлен $f_k=\Phi/f_{k-2}$ симметричен.

Чтобы симметричность соотношения, связывающего α_{i-1} и α_{i+k}, была очевидна, можно это соотношение получить по-другому. Будем последовательно исключать α_i, α_{i+1}, … , α_{i+k-1} из соотношений $f(\alpha_{i-1},\alpha_i)=0$, $f(\alpha_i,\alpha_{i+1})=0$, … , $f(\alpha_{i+k-1},\alpha_{i+k})=0$, причём каждый раз полученный многочлен будем сокращать на f_j. Если воспользоваться симметричностью многочленов $f, f_1,\ldots,f_{k-1}$ и обратить последовательность вычислений, т. е. исключать $\alpha_{i+k-1},\ldots,\alpha_{i+1},\alpha_i$, из $f(\alpha_{i+k-1},\alpha_{i+k})=0,\ldots,f(\alpha_i,\alpha_{i+1})=0, f(\alpha_{i-1},\alpha_i)=0$, то в результате получим тот же самый многочлен f_k. Поэтому многочлен f_k симметричен.

Теперь при $n \geqslant 5$ теорема Понселе легко доказывается, поскольку точки $A_1, \ldots, A_5$ однозначно задают конику, а значит, точки пересечения прямых A_iA_{i+1} и $A_{i+n-1}A_{i+n} = A_{i+n-1}A_i$ лежат на той же самой конике.

Если $n = 2m$, то кривая, по которой движутся точки пересечения продолжений звеньев вписанно–описанной ломаной, должна состоять не из m коник, а из $m - 1$ коник и одной прямой, поскольку степень этой кривой равна $n - 1$. Поясним, почему одна из коник (и какая именно) вырождается в прямую.

Уравнение $f_k(\alpha_{i-1}, x) = 0$ имеет корни $\alpha_{i\pm k}$. Если $k = m$, то эти корни совпадают, поэтому многочлен f_m должен быть квадратом симметричной линейной функции.

Список литературы

[Д] *Дарбу Г.* Принципы аналитической геометрии. Л.–М.: ГОНТИ, 1938.