Олимпиады

Математические соревнования имени Уильяма Лоуэлла Путнама

Е. М. Бронштейн

Мистер Уильям Лоуэлл Путнам в 1882 году получил в Гарварде степень бакалавра по математике и в течение ряда лет возглавлял гостевой департамент математического факультета Гарварда. Он был организатором соревнований, получивших название путнамовских. Не будет преувеличением сказать, что в них он увековечил свое имя.

Путнамовские соревнования являются одними из самых интересных интеллектуальных конкурсов. Идеи, положенные в основу их проведения, Путнам изложил в статье, опубликованной в 1921 году. Основная идея — командный подход, при котором участники защищают цвета своих университетов и колледжей. Во исполнение завещания супруга, мадам Путнам в 1927 году учредила фонд для поддержки проведения соревнований. Центром организационной деятельности стал Гарвард, в то время Президентом Гарварда был Л. Лоуэлл, брат мадам Путнам. Надо сказать, вначале речь не шла о проведении лишь математических соревнований, проводились экспериментальные соревнования по английскому языку, но, видимо, под влиянием выдающихся математиков отца и сына Биргофов, Пойа, Радо и других было решено проводить именно математические соревнования. Джордж Дэвид Биргоф сформулировал несколько основных принципов их проведения на которых базируется вся эта работа:

1. Состязания должны быть лично-командными. Команда каждого университета (колледжа) состоит из трех студентов, но участие могут принимать и другие студенты любого университета (колледжа) США и Канады. При этом подводятся как командные, так и личные итоги.

2. Общее руководство соревнованиями осуществляет Математическая ассоциация Америки — профессиональное объединение преподавателей математики учебных заведений разных типов.

Печатается с любезного разрешения Д. Альбера (MAA).

3. Призами и поощрениями отмечается значительная часть участников. Выделяются первая пятерка, первая десятка и т. д.

4. Одному из пяти лучших участников представляется возможность продолжить обучение (на магистерском уровне) в Гарварде.

Первое соревнование состоялось в 1938 году, и с тех пор они проводятся ежегодно (исключение составили только военные 1943–1945 годы). 4 декабря 1999 года студенты собрались в шестидесятый раз.

Непосредственное руководство конкурсом осуществляет Путнамовский комитет, состоящий из трех человек. В разные годы в состав комитета входили такие выдающиеся математики, как Радо, Пойа, Кац, Капланский (победитель первых соревнований), Келли, Мозер, Беллман, Рота, Коксетер. Комитет разрабатывает задания, проверяет работы участников, публикует результаты. Само соревнование проводится в одно из воскресений (в последние годы — в первое воскресение декабря). Предварительно по университетам и колледжам рассылаются задания в соответствии с заявками. В день проведения участники собираются в своих учебных заведениях, им предлагается 6 задач (A1–A6) на три часа с утра и 6 задач (B1–B6) на три часа после обеда. Наблюдатель-преподаватель обеспечивает порядок и отправляет работы в комитет. К участию допускаются студенты первой (бакалаврской) ступени, студент не может участвовать в соревнованиях более четырех раз. Интересно, что в итоги (они публикуются в журналах Математической ассоциации Америки) включаются результаты решения каждой задачи лидерами в виде 11-мерного вектора: первая компонента — число решивших задачу полностью, далее число продвинувшихся на соответствующую долю, десятая — число представивших совершенно неверные попытки решения, одиннадцатая — число участников, не представивших решений вообще. Соревнования очень популярны, ежегодно в них принимают участие около 300 команд и свыше 2000 участников. В ряде университетов в учебный план включены специальные семинары по подготовке к соревнованиям. Успехи команд и отдельных студентов — предмет гордости университетов и факультетов.

Тематика задач ограничена стандартными математическими курсами (анализ, алгебра, геометрия, дискретная математика, дифференциальные уравнения и др.). Многие задачи опираются на знание элементарной математики.

Сложность задач весьма сильно варьируется. Наряду с утешительными легкими задачами, доступными подавляющему большинству участников, есть очень трудные, которые поддаются усилиям всего нескольких участников.

Приведем задачи некоторых соревнований разных лет.

A5 (1985). Для каких целых $1 \leqslant m \leqslant 10$ справедливо равенство

$$I_m = \int\limits_0^{2\pi} \cos(x)\cos(2x)\cdot\ldots\cdot\cos(mx)\,dx = 0?$$

A6 (1985). Пусть $\Gamma(p(x)) = a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_n^2$ — функция полинома $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$. Найдите полином $g(x)$ с вещественными коэффициентами такой, что $g(0) = 1$, $\Gamma(g(x)^n) = \Gamma((3x^2 + 7x + 2)^n)$ для всех натуральных n.

B3 (1985). Пусть

$$\begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

дважды бесконечный массив натуральных чисел, в котором каждое натуральное число встречается ровно 8 раз. Докажите, что для некоторой пары индексов (m, n) выполняется неравенство $a_{m,n} > mn$.

B6 (1985). Группа по умножению $\{M_i\}$ вещественных квадратных матриц порядка n содержит r элементов. Пусть выполняется равенство $\sum\limits_{i=1}^{r} \mathrm{tr}(M_i) = 0$, где tr — след матрицы. Докажите, что матрица $\sum\limits_{i=1}^{r} M_i$ — нулевая.

A3 (1986). Вычислите сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{arcctg}(n^2 - n + 1)$.

B4 (1986). Пусть $G(r) = \min\limits_{m,n\in\mathbb{Z}} \left| r - \sqrt{m^2 + 2n^2} \right|$. Докажите или опровергните утверждение $\lim\limits_{n\to+\infty} G(r) = 0$.

B6 (1986). Пусть A, B, C, D — квадратные матрицы порядка n с элементами из поля $\mathbb{F}$, такие, что матрицы AB' , CD' — симметрические и $AD' - BC' = I$. Здесь B' — матрица, транспонированная B, I — единичная матрица. Докажите равенство $A'D - C'B = I$.

A1 (1987). На плоскости определены множества

$$A = \left\{ (x, y) : x^2 - y^2 = \frac{x}{x^2 + y^2} \right\}; \qquad B = \left\{ (x, y) : 2xy + \frac{y}{x^2 + y^2} = 3 \right\};$$
$$C = \left\{ (x, y) : x^3 - 3xy^2 + 3y = 1 \right\}; \qquad D = \left\{ (x, y) : 3yx^2 - 3x - y^3 = 0 \right\}.$$

Докажите, что $A \cap B = C \cap D$.

A5 (1987). Дано векторное поле $G(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + 4y^2}, \frac{x}{x^2 + 4y^2}, 0 \right)$. Докажите или опровергните существование векторного поля: $F(x, y, z) = (M(x, y, z), N(x, y, z), P(x, y, z))$ со свойствами

(1) функции M, N, P имеют непрерывные частные производные при $(x, y, z) \neq$ $\neq (0, 0, 0)$;

(2) $\mathrm{rot}\, F = 0$ при $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$;

(3) $F(x, y, 0) = G(x, y)$.

B4 (1987). Пусть $x(1) = 0{,}8$, $y(1) = 0{,}6$ и при $n = 1, 2, 3, \dots$

$$x(n + 1) = x(n) \cos(y(n)) - y(n) \sin(y(n)),$$
$$y(n + 1) = x(n) \sin(y(n)) + y(n) \cos(y(n)).$$

Вычислите пределы $\lim\limits_{n\to\infty} x(n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} y(n)$ или опровергните их существование.

B6 (1987). Пусть $\mathbb{F}$ — конечное поле с p^2 элементами, где p — нечетное простое число. Пусть S — множество, состоящее из $(p^2-1)/2$ различных ненулевых элементов поля, такое, что для всякого ненулевого элемента $a \in \mathbb{F}$ в точности один из двух элементов $a, -a$ входит в S. Пусть N число элементов в пересечении S с множеством $\{2a : a \in S\}$. Докажите, что число N четное.

A6 (1988). Пусть линейный оператор A в n-мерном векторном пространстве имеет $(n+1)$ собственных векторов, любые n из которых линейно независимы. Следует ли отсюда, что $A = aI$, где I — тождественный оператор, a — скаляр?

B4 (1988). Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geqslant 0)$ сходится. Докажите сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n)^{n/(n+1)}$.

A3 (1989). Докажите, что если $11z^{10} + 10iz^9 + 10iz - 11 = 0$, то $|z| = 1$.

A6 (1989). Пусть $a_n = 1$, если в двоичном разложении числа n каждый блок идущих подряд нулей состоит из четного числа цифр и 0 в противном случае. Например, $a_{36} = 1$, поскольку $36 = 100100_2$, а $a_{20} = 0$, поскольку $20 = 10100_2$. Пусть $\alpha = 1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ — формальный степенной ряд по модулю 2. Докажите, что $\alpha^3 + x\alpha + 1 = 0$ по модулю 2.

B6 (1989). Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — точка, случайно выбираемая из n-мерной области $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$ в соответствии с равномерным распределением, и $f(x)$ — функция, непрерывная на $[0,1]$, у которой $f(1) = 0$. Положим $x_0 = 0, x_{n+1} = 1$. Докажите, что математическое ожидание суммы Римана $\sum\limits_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1})$ равно $\int\limits_0^1 P(x) f(x)\, dx$, где $P(x)$ — многочлен степени n, не зависящий от функции $f(x)$ и такой, что $0 < P(x) < 1$ при $0 < x < 1$.

A3 (1990). Докажите, что любой выпуклый пятиугольник, вершины которого имеют целочисленные координаты, и никакие три из которых не лежат на одной прямой, имеет площадь, не меньшую $5/2$.

A5 (1990). Если A и B — квадратные матрицы одного порядка, для которых справедливо равенство $ABAB = 0$, то обязательно ли $BABA = 0$?

B4 (1990). Пусть G — конечная группа порядка n, порожденная элементами a и b. Докажите или опровергните следующее утверждение: существует последовательность $g_1, g_2, \ldots, g_{2n}$ такая, что
(1) каждый элемент группы встречается в последовательности 2 раза;
(2) $g_{i+1} = g_i a$ или $g_{i+1} = g_i b$ при $i = 1, 2, \ldots, 2n$. (Считать, что $g_{n+1} = g_1$.)

A3 (1991). Найдите все вещественные многочлены $p(x)$ степени $n \geqslant 2$, для каждого из которых существует последовательность вещественных чисел $r_1 < < r_2 < \ldots < r_n$ такая, что

(1) $p(r_i) = 0$ при $i = 1, 2, \ldots, n$,

(2) $p'((r_i + r_{i+1})/2) = 0$ при $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

A5 (1991). Найдите максимальное значение величины $\int\limits_0^y \sqrt{x^4 + y^2(1-y)^2}\, dx$ при $y \in [0,1]$.

B3 (1991). Существует ли число L такое, что если m и n целые числа, бо́льшие L, то прямоугольник размеров $m\times n$ можно разрезать на прямоугольники размеров 4×6 и 5×7?

B4 (1991). Пусть p — простое нечетное число. Докажите, что

$$\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\binom{p+j}{j}=(2^p+1)\pmod{p^2}.$$

A3 (1992). Для данного натурального числа m найдите все тройки натуральных чисел (n,x,y), где числа m, n взаимно простые, для которых справедливо равенство $(x^2+y^2)^m=(xy)^n$.

A5 (1992). Пусть $a_n=0(1)$, если число единиц в двоичном разложении натурального числа n соответственно четное (нечетное). Докажите, что не существует натуральных k и m таких, что $a_{k+j}=a_{k+m+j}=a_{k+m+2j}$ при $0\leqslant j\leqslant m-1$.

Решения задач

A5 (1985). Применяя формулу Эйлера $\cos\varphi=\dfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$, получим

$$I_m=\int_0^{2\pi}\cos(x)\cos(2x)\cdot\ldots\cdot\cos(mx)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2^m}\int_0^{2\pi}(e^{ix}+e^{-ix})\cdot\ldots\cdot(e^{imx}+e^{-imx})\,dx=$$

$$=\frac{1}{2^m}\int_0^{2\pi}\sum e^{ix(\pm1\pm2\ldots\pm m)}\,dx.$$

Поскольку $\int\limits_0^{2\pi}e^{ikx}dx=0$ при целом $k\neq 0$ и $\int\limits_0^{2\pi}dx=2\pi$, то $I_m\neq 0$, если при некоторой расстановке знаков справедливо равенство $(\pm1\pm2\pm\ldots\pm m)=0$.

Докажем, что это возможно тогда и только тогда, когда $m\equiv 0\pmod 4$ или $m\equiv 3\pmod 4$. Четности чисел $\pm1\pm2\ldots\pm m$ совпадают при любых расстановках знаков, следовательно, для выполнения равенства $\pm1\pm2\ldots\pm m=0$ необходима четность числа $1+2+\ldots+m=m(m+1)/2$. Это равносильно делимости на 4 одного из чисел m, $m+1$. Пусть теперь число $k=m(m+1)/4$ целое и $s=\min\{t:t+(t+1)+\ldots.+m\leqslant k\}$. Если $s+(s+1)+\ldots+m=k$, то $1+\ldots\ldots+(s-1)-s-(s+1)-\ldots-m=0$. Если $s+(s+1)+\ldots+m<k$, то число $p=k-(s+(s+1)+...+m)$ удовлетворяет неравенствам $0<p<s-1$. Если плюсы взять у чисел $p,s,(s+1),\ldots,m$ и минусы у остальных, то полученная сумма будет равна нулю. Среди чисел $1,2,\ldots,10$ найденным свойством обладают числа 3,4,7,8. Значит, ответ задачи — множество $\{1,2,5,6,9,10\}$.

A6 (1985). Пусть $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ ($a_n \neq 0$). Определим многочлен $p^T(x) = x^np(1/x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$. Очевидно, что $(p^k(x))^T = (p^T(x))^k$.

Докажем, что для любых многочленов $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, $q(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n$ выполняется равенство $\Gamma(p(x)q(x)) = \Gamma(p^T(x)q(x))$. Перемножая многочлены $p(x), q(x)$, получим

$$\Gamma((p(x)q(x)) = \sum a_i^2b_j^2 + 2 \sum_{\substack{i \neq j \\ i+n-s=j+n-t}} a_ia_jb_ib_j.$$

То же получим и для

$$\Gamma(p^T(x)q(x)) = \sum a_i^2b_j^2 + 2 \sum_{\substack{i \neq j \\ i+n-s=j+n-t}} a_ia_jb_ib_j.$$

Положим $p(x) = x+2$, $q(x) = 3x+1$. Тогда $p(x)q(x) = 3x^2+7x+2$, $p^T(x)q(x) = 6x^2 + 5x + 1$. При этом по доказанному ранее $\Gamma(p(x)q(x))^n = \Gamma(p^T(x)q(x))^n$. Таким образом, трехчлен $6x^2 + 5x + 1$ обладает нужными свойствами.

B3 (1985). Пусть, напротив, при всех (m, n) выполняется неравенство $a_{m,n} \leqslant mn$. Определим множество $T_k = \{(m, n) : a_{m,n} \leqslant k\}$. По условию $|T_k| = 8k$. С другой стороны, по предположению $S_k = \{(m, n) : mn \leqslant k\} \subset T_k$. Но

$$|S_k| = k + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + \ldots + 1 \geqslant \frac{k}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}\right)$$

при достаточно больших k. Тем самым при достаточно больших k должно выполняться неравенство $\frac{k}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}\right) \leqslant 8k$, что противоречит расходимости гармонического ряда.

B6 (1985). Пусть $S = \sum\limits_{i=1}^{r} M_i$. По условию $\operatorname{tr}(S) = 0$. Имеем $SM_j = \sum\limits_{i=1}^{r} M_iM_j = S$, поскольку $\{M_i\}$ — конечная группа по умножению. Далее, $S^2 = \sum\limits_{j=1}^{r} SM_j = \sum\limits_{j=1}^{r} S = rS$. Отсюда следует, что собственные числа матрицы S могут равняться только 0 и r. Из равенства $\operatorname{tr}(S) = 0$ следует, что единственное собственное значение матрицы S равно 0, поскольку $\operatorname{tr}(S)$ есть сумма собственных значений матрицы S. А тогда матрица $S - rI$ не имеет нулевых собственных значений, т. е. обратима. Поэтому из равенства $S^2 - rS = S(S - rI) = 0$ следует равенство $S = 0$, что и требовалось.

A3 (1986). Воспользовавшись формулой $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \dfrac{1 + \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}$, получаем $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} n - \operatorname{arcctg}(n+1)) = n^2 + n + 1$. Отсюда

$$\operatorname{arcctg} n - \operatorname{arcctg}(n+1) = \operatorname{arcctg}(n^2 + n + 1).$$

Следовательно, $\sum\limits_{n=0}^{k} \operatorname{arcctg}(n^2 + n + 1) = \operatorname{arcctg} 0 - \operatorname{arcctg} k$, что дает

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arcctg}(n^2 + n + 1) = \pi/2.$$

B4 (1986). Докажем справедливость сформулированного утверждения.

Прежде всего, проверим, что для положительного k справедлива оценка $k - \lfloor\sqrt{k}\rfloor^2 \leqslant 3\sqrt{k}$. Пусть $p = \lfloor\sqrt{k}\rfloor$. Тогда $k = p^2 + s$, где $s < 2p+1$. Следовательно, $k - \lfloor\sqrt{k}\rfloor^2 = s < 2p + 1 \leqslant 3\sqrt{k}$, что и требовалось.

Пусть $r > 0$, $m = \lfloor r\rfloor$. Тогда $r = m + d$ $(0 \leqslant d < 1)$. Положим $n = \lfloor\sqrt{md}\rfloor$. Оценим значение $r^2 - m^2 - 2n^2$. Получаем

$$(m+d)^2 - m^2 - 2n^2 = 2md + d^2 - 2\lfloor\sqrt{md}\rfloor^2 = \\ = 2(md - \lfloor\sqrt{md}\rfloor^2) + d^2 \leqslant 6\sqrt{md} + d^2 \leqslant 6\sqrt{r} + 1.$$

Окончательно имеем

$$G(r) \leqslant r - \sqrt{m^2 + 2n^2} = \frac{r^2 - m^2 - 2n^2}{r + \sqrt{m^2 + 2n^2}} \leqslant \frac{6\sqrt{r} + 1}{r}.$$

Поскольку $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{6\sqrt{r}}{r} = 0$, нужное утверждение доказано.

B6 (1986). Симметричность матрицы AB' означает, что $(AB')' = BA' = AB'$, симметричность матрицы CD' — что $(CD')' = DC' = CD'$. Из равенства $AD' - BC' = I$ следует равенство $(AD' - BC')' = I'$, т. е. $DA' - CB' = I$. Рассматривая произведение блочных матриц $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} D' & -B' \\ -C' & A'\end{pmatrix}$, получаем

$$\begin{pmatrix} AD' - BC' & -AB' + BA' \\ CD' - DC' & -CB' + DA'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix}.$$

Но тогда справедливо и равенство

$$\begin{pmatrix} D' & -B' \\ -C' & A'\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D'A - B'C & D'B - B'D \\ -C'A + A'C & -C'B + A'D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix}.$$

Отсюда, $A'D - C'B = I$, что и требовалось установить.

A1 (1987). Рассмотрим функцию $f(z) = z^2 - 1/z - 3i$ комплексного переменного $z = x + iy$. Имеем

$$\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 - \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{Im} f(z) = 2xy + \frac{y}{x^2 + y^2} - 3.$$

Пересечение $A \cap B$ в естественном смысле совпадает с множеством корней уравнения $f(z) = 0$.

Аналогично, пересечение $C \cap D$ совпадает с множеством корней уравнения $g(z) = z^3 - 3iz - 1 = 0$. Поскольку $z = 0$ не является корнем ни одного из этих уравнений, они равносильны.

Разумеется, эту задачу можно решить и без привлечения комплексных чисел, но такое решение выглядит изящнее.

A5 (1987). Такого поля не существует. Действительно, если такое поле существует, то его циркуляция по любому замкнутому контуру, являющемуся краем ориентируемой поверхности, не содержащей начало координат, равна нулю. Рассмотрим половину эллипсоида $\dfrac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$, $z \geqslant 0$. Его границей является плоский эллипс C, задаваемый уравнениями $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $z = 0$. Вычисляя интеграл $\oint_C G_x\,dx + G_y\,dy$, убеждаемся, что он отличен от нуля. При вычислении интеграла удобно использовать параметризацию $x = 2\cos\varphi$, $y = \sin\varphi$.

B4 (1987). Поскольку $x^2(1) + y^2(1) = 1$ и $x^2(n+1) + y^2(n+1) = x^2(n) + y^2(n)$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$, то $x^2(n) + y^2(n) = 1$ при тех же n. Отсюда, при любом n существует угол $\theta(n)$ такой, что $\cos\theta(n) = x(n)$, $\sin\theta(n) = y(n)$. Из данных равенств следует, что можно принять $\theta(n+1) = \theta(n) + y(n) = \theta(n) + \sin\theta(n)$, при этом в качестве $\theta(1)$ можно выбрать острый угол. Рассмотрим функцию $y = x + \sin x$. Эта функция возрастающая, причем $y(x) < \pi$ при $x < \pi$. Отсюда следует, что последовательность $\{\theta(n)\}$ сходится. Переходя к пределу в равенстве $\theta(n+1) = \theta(n) + \sin\theta(n)$, получим: $\sin \lim\limits_{n\to\infty} \theta(n) = 0$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \theta(n) = \pi k$. Из предыдущих рассуждений следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \theta(n) = \pi$. Тем самым $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = -1$, $\lim\limits_{n\to\infty} y(n) = 0$.

B6 (1987). При нечетном p число $(p^2-1)/2$ четное. Обозначим через P_1 произведение всех элементов множества S, и через P_2 произведение элементов вида $2a$ $(a \in S)$. Отсюда $P_2 = 2^{|S|}P_1$. С другой стороны, элементы вида $2a$ обладают теми же свойствами, что и элементы S, т. е. для всякого ненулевого элемента $b \in \mathbb{F}$ либо b, либо $-b$ имеет вид $2a$, $(a \in S)$. Отсюда, $P_2 = (-1)^{|S|-N}P_1 = (-1)^N P_1$ в силу четности $|S|$. Осталось доказать, что $2^{|S|} = 1$. Поскольку характеристика поля $\mathbb{F}$ равна p и 2 принадлежит минимальному подполю $\mathbb{F}$, то по малой теореме Ферма $2^{p-1} = 1$. Тогда $2^{|S|} = 2^{(p-1)(p+1)/2} = 1^{(p+1)/2} = 1$, что и требовалось.

A6 (1988). Ответ положительный. Пусть $x_1, \ldots, x_{n+1}$ — собственные векторы оператора A; $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ — соответствующие собственные значения. Достаточно доказать, что все собственные значения совпадают. Поскольку собственные значения — корни полиномиального уравнения степени n, среди них есть совпадающие — пусть $\lambda_n = \lambda_{n+1}$. Тогда все элементы двумерной линейной оболочки L_2 векторов x_n, x_{n+1} — собственные векторы оператора A с собственным значением λ_n. Обозначим через L_{n-1} $(n-1)$-мерную линейную оболочку векторов $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Из соотношения Грассмана следует, что $\dim(L_{n-1} \cap L_2) = 1$. Пусть y — ненулевой вектор из этого пересечения. Векторы $x_1, \ldots, x_{n-1}, y$ линейно зависимые. Пусть $\mu_1 x_1 + \ldots + \mu_{n-1}x_{n-1} + \mu_n y = 0$, где среди коэффициентов есть отличные от нуля. Применив к обеим частям этого равенства оператор A, получаем: $\lambda_1\mu_1 x_1 + \ldots + \lambda_{n-1}\mu_{n-1}x_{n-1} + \lambda_n\mu_n y = 0$. Если среди собственных значений есть различные, то вычтя из последней линейной комбинации предыдущую, умноженную на λ_n, приходим к выводу, что векторы $x_1, \ldots, x_{n-1}$ — линейно зависимые, а это противоречит условию.

B4 (1988). Разобьем множество натуральных чисел на два класса:

$$N_1 = \left\{n : (a_n)^{1/(n+1)} \leqslant 1/2\right\}, \quad N_2 = \left\{n : (a_n)^{1/(n+1)} > 1/2\right\}.$$

Для первого множества $(a_n)^{n/(n+1)} \leqslant (1/2)^n$, для второго — $(a_n)^{n/(n+1)} < 2a_n$. Тем самым сходятся оба ряда $\sum\limits_{n\in N_1} (a_n)^{n/(n+1)}$ (всегда) и $\sum\limits_{n\in N_2} (a_n)^{n/(n+1)}$ (вследствие сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$). Поскольку члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n)^{n/(n+1)}$ положительные, отсюда следует его сходимость.

А3 (1989). Поскольку 0 не является корнем данного уравнения, его можно разделить на z^5. Получаем уравнение $11(z^5+z^{-5})+10i(z^4+z^{-4})=0$. Рассмотрим корни уравнения, расположенные на единичной окружности $z=e^{i\varphi}$. Подставляя и используя формулы Эйлера для синуса и косинуса, получим уравнение $11\cos 5\varphi+10\sin 4\varphi=0$. Рассмотрим функцию $F(\varphi)=11\cos 5\varphi+10\sin 4\varphi$. Имеем $F(0)>0$, $F(\pi/5)<0$, $F(2\pi/5)>0,\ldots,F(9\pi/5)<0$. Тем самым на единичной окружности расположено 10 корней данного уравнения. Поскольку оно имеет не более 10 различных корней, утверждение доказано.

А6 (1989). Поскольку число $4n$ получено из n добавлением двух нулей, то $a_{4n}=a_n$. Аналогично $a_{2n+1}=a_n$. При этом, поскольку число $4n+2$ получено из n добавлением цифр 10, имеем $a_{4n+2}=0$. Разобьем формальный ряд $\alpha(x)=1+a_1x+a_2x^2+\ldots$ на две части: $\alpha_1(x)=1+a_4x^4+a_8x^8+\ldots=1+a_1x^4+a_2x^8+\ldots=\alpha(x^4)$; $\alpha_2(x)=a_1x+a_3x^3+a_5x^5+\ldots=x+a_1x^3+a_2x^5+\ldots=x\alpha(x^2)$.

Далее, для двоичных переменных a,b выполнено $a^k=a$, $(a+b)^2=a^2+b^2$ по модулю 2. Поэтому $\alpha(x^4)=(\alpha(x))^4$, $\alpha(x^2)=(\alpha(x))^2$. Отсюда, $\alpha(x)=\alpha(x^4)+x\alpha(x^2)=(\alpha(x))^4+x(\alpha(x))^2$. Тем самым, $\alpha(x)(\alpha^3(x)+x\alpha(x)-1)=0$. Поскольку у формального ряда $\alpha=1+a_1x+a_2x+\ldots$ свободный член 1, то по индукции убеждаемся, что $(\alpha^3(x)+x\alpha(x)-1)=0$. Но $(\alpha^3(x)+x\alpha(x)-1)=(\alpha^3(x)+x\alpha(x)+1)$ по модулю 2.

В6 (1989). Пусть M — описанная в условии задачи n-мерная область. Ее n-мерный объем равен

$$\int\limits_M dX=\int\limits_0^1 dx_n\int\limits_0^{x_n} dx_{n-1}\ldots\int\limits_0^{x_2} dx_1=\frac{1}{n!}.$$

Здесь dX — элемент объема множества M. Обозначим через $U(f,x_1,\ldots,x_n)$ риманову сумму $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})$. Имеем

$$A(f)=\mathbf{E}[U(f,x_1,,\ldots,x_n)]=n!\int\limits_M U(f,x_1,\ldots,x_n)\,dX.$$

Рассмотрим интеграл от слагаемого $(x_i-x_{i-1})f(x_i)$. Перейдем к повторному интегралу таким образом, чтобы интеграл по x_i являлся внешним. Имеем

$$\int\limits_0^1 f(x_i)\,dx_i\int\limits_0^{x_i}(x_i-x_{i-1})\,dx_{i-1}\int\limits_0^{x_{i-1}}dx_1\int\limits_{x_1}^{x_{i-1}}dx_2\ldots\int\limits_{x_{i-3}}^{x_{i-1}}dx_{i-2}\int\limits_{x_i}^{1}dx_{i+1}\ldots\int\limits_{x_{n-1}}^{1}dx_n.$$

Этот интеграл равен $\int\limits_0^1 f(x)P_n^{(i)}dx$, где $P_n^{(i)}=\dfrac{(1-x)^{n-i}}{(n-i)!}\cdot\dfrac{x^i}{i!}$. Таким образом,

$$P_n(x)=n!\sum_{i=1}^{n}P_n^{(i)}(x)=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(1-x)^{n-i}x^i=1-(1-x)^n.$$

Здесь использовано биномиальное разложение функции $((1-x)+x)^n$. Очевидно, что полином $P_n(x)$ обладает нужными свойствами.

A3 (1990). Докажем вначале, что площадь невырожденного треугольника с целочисленными координатами не меньше $1/2$. Опишем вокруг треугольника прямоугольник, стороны которого параллельны координатным осям. Тогда площадь треугольника равна разности площади прямоугольника с целочисленными сторонами и площадей нескольких прямоугольных треугольников с целочисленными катетами. Поскольку площадь прямоугольника целая и площади треугольников полуцелые, то площадь данного треугольника полуцелая и поэтому не меньше $1/2$.

Докажем, что в пятиугольнике найдется точка с целочисленными координатами, отличная от вершины. Среди пяти точек с целочисленными координатами найдутся две, у которых совпадают четности обеих координат. Но тогда середина соответствующего отрезка также имеет целочисленные координаты. Если такая точка находится внутри пятиугольника, то пятиугольник разбивается на пять треугольников, вершины которых целочисленные, то есть площадь пятиугольника не менее $5/2$. Если же точка находится на границе, то площадь пятиугольника не менее 2.

Проанализируем дополнительно последний случай. Пусть $v_1, \ldots, v_5$ — вершины данного пятиугольника в порядке обхода, v_0 — середина отрезка $[v_4, v_5]$ с целочисленными координатами. Исходный пятиугольник распадается на треугольник с вершинами $v_3v_4v_0$ и пятиугольник $v_1v_2v_3v_0v_5$. По доказанному площадь треугольника не меньше $1/2$, площадь пятиугольника не меньше 2. Тем самым, площадь данного пятиугольника не менее $5/2$, что и требовалось.

A5 (1990). Пусть $ABAB = 0$. Тогда $(BA)^3 = B(ABAB)A = 0$. Докажем, что в таком случае при $n = 2$ (n — порядок матрицы) выполняется равенство $(BA)^2 = 0$. Обозначим через S матрицу BA. S — матрица линейного оператора, который будем обозначать так же. Если образ оператора S двумерен, то S — линейный изоморфизм и поэтому $S^3 \neq 0$. Если образ оператора S нульмерен, то $S^2 = S^3 = 0$. Пусть теперь образ L оператора S одномерен. Если $S^2 \neq 0$, то $SL = L$, а тогда и $S^3L = L$, т.е. $S^3 \neq 0$. То же самое можно установить, используя жорданову форму матриц. Таким образом, матриц второго порядка с такими свойствами не существует.

Иначе обстоит дело при $n > 2$. Приведем пример таких матриц при $n = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

B4 (1990). Построим ориентированный граф следующим образом. Его вершины являются элементами группы; ребро (p, q) существует тогда и только тогда, когда $q = pa$ или $q = pb$. Этот граф обладает следующими свойствами:

(1) из всякой вершины исходят два ребра, поскольку из равенства $pa = pb$ следует равенство $a = b$;

(2) во всякую вершину входят два ребра. Обоснование то же;

(3) граф является сильно связным. Действительно, из всякой вершины есть путь в единичный элемент и обратно, поскольку группа порождена элементами a, b.

Известно, что граф с такими свойствами является эйлеровым, т. е. существует цикл, в котором каждое ребро встречается один раз. Выписывая вершины в порядке прохождения этого цикла, получим нужную последовательность вершин.

A3 (1991). Справедливо представление $p(x) = c(x - r_1)(x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_n)$. Отсюда

$$\begin{aligned} p'(x) = c[&(x - r_2)(x - r_3) \cdot \ldots \cdot (x - r_n) + \\ &+(x - r_1)(x - r_3) \cdot \ldots \cdot (x - r_n) + \ldots \\ &\ldots + (x - r_1)(x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_{n-1})]. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} p'(\frac{r_1 + r_2}{2}) = c[&(\frac{r_1 + r_2}{2} - r_2)(\frac{r_1 + r_2}{2} - r_3) \cdot \ldots \cdot (\frac{r_1 + r_2}{2} - r_n) + \\ &+(\frac{r_1 + r_2}{2} - r_1)(\frac{r_1 + r_2}{2} - r_3) \cdot \ldots \cdot (\frac{r_1 + r_2}{2} - r_n) + \ldots \\ &\ldots + (\frac{r_1 + r_2}{2} - r_1)(\frac{r_1 + r_2}{2} - r_2) \cdot \ldots \cdot (\frac{r_1 + r_2}{2} - r_{n-1})]. \end{aligned}$$

Поскольку сумма первых двух слагаемых равна нулю, а при $n > 2$ все остальные слагаемые отличны от нуля и имеют один и тот же знак, то равенство $p'((r_1 + r_2)/2) = 0$ возможно только при $n = 2$. Очевидно при этом, что любой квадратный трехчлен с различными вещественными корнями обладает нужными свойствами.

A5 (1991). Воспользовавшись неравенством

$$\sqrt{x^4 + y^2(1 - y)^2} \leqslant x^2 + y(1 - y),$$

получаем оценку

$$\int_0^y \sqrt{x^4 + y^2(1 - y)^2}\, dx \leqslant \int_0^y (x^2 + y(1 - y))\, dx = y^2 - 2y^3/3.$$

Максимальное значение функции $y^2 - 2y^3/3$ на отрезке $[0, 1]$ равно $1/3$. Тем самым, данный интеграл не превосходит $1/3$. Но при $y = 1$ интеграл имеет вид $\int_0^1 x^2 dx = 1/3$. Отсюда следует ответ: $1/3$.

B3 (1991). Ответ положительный.

Докажем вначале такое утверждение. Пусть натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ взаимно простые. Любое натуральное число, бо́льшее, чем $ka_1a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$, можно представить в виде $t_1a_1 + t_2a_2 + \ldots + t_ka_k$, где числа $t_1, t_2, \ldots, t_k$ неотрицательные.

Поскольку числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ взаимно простые, то 1, а значит и любое число, представимо в виде целочисленной линейной комбинации чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Пусть $m > ka_1a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$ и $m = t_1a_1 + t_2a_2 + \ldots + t_ka_k$, причем среди чисел $t_1, t_2, \ldots, t_n$ есть отрицательные (пусть для определенности $t_k < 0$). Среди положительных слагаемых есть превосходящее $a_1a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$, пусть для определенности $t_1a_1 > a_1a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$. Тогда $t_1 > a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$. Определим новые значения $t'_1 = t_1 - a_k > 0$, $t'_k = t_k + a_1 > t_k$. Остальные значения t_i оставим без изменения.

Тогда

$$t_1'a_1 + t_2a_2 + \ldots + t_k'a_k = t_1a_1 + t_2a_2 + \ldots + t_ka_k = m.$$

Продолжая аналогично, получаем нужное утверждение.

Построим теперь из данных прямоугольников пары прямоугольных блоков, имеющих общую сторону.

1. 20×6 — из прямоугольников 4×6 и 20×7 — из прямоугольников 5×7;
2. 35×7 — из прямоугольников 5×7 и 35×5 — из тех же прямоугольников (при изменении ориентации);
3. 42×4 — из прямоугольников 5×7 и 42×4 — из прямоугольников 4×6.

Применяя доказанное утверждение, получаем: при достаточно больших n из данных прямоугольников можно сложить прямоугольники размеров $20 \times n$, $35 \times n$, $42 \times n$. Поскольку числа 20, 35, 42 взаимно простые, то из того же утверждения следует, что при достаточно большом m из данных прямоугольников можно сложить прямоугольник размеров $m \times n$, что и требовалось.

B4 (1991). Рассмотрим полином $(1+(1+x))^p(1+x)^p = (2+x)^p(1+x)^p$. Найдем коэффициент этого полинома при x^p с использованием каждого из представлений. Левую часть можно представить в виде $\sum\limits_{j=0}^{p} \binom{p}{j}(1+x)^{p+j}$. Отсюда, коэффициент при x^p равен

$$\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j}\binom{p+j}{p} = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j}\binom{p+j}{j}.$$

С другой стороны, коэффициент при x^p равен

$$\sum_{j=0}^{p} 2^j \binom{p}{p-j}\binom{p}{j} = \sum_{j=0}^{p} 2^j \binom{p}{j}^2.$$

При $0 < j < p$ биномиальный коэффициент

$$\binom{p}{j} = \frac{p(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-j+1)}{j!}$$

делится на p, поскольку в силу простоты числа p знаменатель взаимно прост с p. Тогда имеем $\sum\limits_{j=0}^{p} 2^j\binom{p}{j}^2 \equiv (2^p+1) \pmod{p^2}$, что и требовалось доказать.

A3 (1992). Применяя неравенство $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$, получаем $(xy)^n \geqslant (2xy)^m$, откуда $n > m$.

Пусть p — простое число, a и b высшие степени p, на которые делятся x и y, причем $a < b$. Тогда левая часть данного равенства делится на p^{2am}, а правая на $p^{(a+b)n}$ и не делятся на более высокие степени p. Но тогда $2am = (a+b)n > 2an$, что противоречит неравенству $n > m$. Таким образом, $a = b$ и потому $x = y$. Подставляя в исходное уравнение $x = y$, получаем $2^m x^{2m} = x^{2n}$, т.е. $2^m = x^{2(n-m)}$. Отсюда, $x = 2^t$. Имеем $m = 2t(n-m)$. Отсюда, число m четное. Пусть $m = 2s$. Имеем $s = t(n-2s)$. Если $n - 2s > 1$, то простой делитель числа $n - 2s$ является общим делителем n и s, что противоречит взаимной простоте n

и m. Отсюда, $n = 2s + 1 = m + 1$. При этом $t = s$, $x = 2^s = 2^{m/2}$. Окончательно, равенство выполняется только при m четном, $n = m + 1$, $x = y = 2^{m/2}$.

А5 (1992). Очевидны равенства $a_{2n} = a_n, a_{2n+1} + a_{2n} = a_{2n+1} + a_n = 1$.

Пусть такие пары чисел k, m существуют. Выберем какую-либо из таких пар с минимальным значением m.

Пусть число $m > 1$ нечетное. Можно считать, что $a_k = a_{k+m} = a_{k+2m} = 0$, противоположный случай рассматривается аналогично. Поскольку одно из чисел $k, k+m$ четное, то $a_{k+1} = a_{k+m+1} = a_{k+2m+1} = 1$. Продолжая, получим $a_{k+2} = a_{k+m+2} = a_{k+2m+2} = 0$, и т. д. Поскольку число $m - 1$ четное, то $a_{k+m-1} = a_{k+2m-1} = a_{k+3m-1} = 0$. Одно из чисел $k + m - 1, k + 2m - 1$ четное, поэтому $a_{k+m} = 1$ или $a_{k+2m} = 1$, что противоречит исходному предположению.

Пусть число m четное. Рассмотрим равенства $a_{k+j} = a_{k+m+j} = a_{k+m+2j}$ только для четных индексов $k + j$. По предыдущему $a_{(k+j)/2} = a_{(k+m+j)/2} = a_{(k+m+2j)/2}$. Тем самым, справедливы равенства $a_{[k/2]+i} = a_{[k/2]+m/2+i} = a_{[k/2]+m/2+2i}$ при $0 \leqslant i \leqslant (m/2) - 1$. (В предыдущих равенствах при k четном следует принять $j = 2i$, при k нечетном — $j = 2i - 1$).Но это противоречит минимальности m.

Наконец, при $m = 1$ должны выполняться равенства $a_k = a_{k+1} = a_{k+2}$. Но это невозможно, поскольку одно из чисел $k, k + 1$ четное.

Утверждение доказано.