Венгерская задача о квадратах

С. А. Дориченко

Автору этой заметки стала известна от венгерских математиков задача об оценке отношения периметра к площади для фигур, образованных объединением одинаковых квадратов. Этот сюжет был положен в основу следующей задачи, предложенной школьникам 10 – 11 классов на осеннем туре 22-го Турнира Городов, который состоялся 29 октября 2000 года:

а) *Несколько черных квадратов со стороной* 1 *см прибиты к белой плоскости одним гвоздем толщины* 0,1 *см. Образовалась многоугольная черная фигура. Может ли периметр этой фигуры быть больше, чем* 1 *км?* (*Гвоздь не задевает границ квадратов.*)

б) *Та же задача, но гвоздь имеет толщину* 0 (*то есть точка*).

в) *Несколько черных квадратов со стороной* 1 *лежат на белой плоскости, образуя многоугольную черную фигуру* (*возможно, состоящую из нескольких кусков и имеющую дырки*). *Может ли отношение периметра этой фигуры к ее площади быть больше* 100 000*?*

Ответ во всех трех случаях отрицательный. Конечно, пункты а) и б) следуют из пункта в), они были добавлены, чтобы облегчить решение последнего, весьма трудного, пункта.

Пункт а) этой задачи был решен некоторыми школьниками, решение пункта в) пока не встретилось (проверка еще не закончена, так как получены еще не все работы).

Заметим также, что для рассматриваемых фигур известны и гораздо лучшие (на несколько порядков) оценки отношения периметра к площади (см. подробности в статье автора исходной задачи: Tamas Keleti, “A Covering Property of Some Classes of Sets in $\mathbb{R}^n$”, Acta Univ. Carol. — Math. Phys. Vol. 39 (1998) No. 1–2, p. 111–118. Corollary 12 and Remark 14), но точная оценка сверху до сих пор неизвестна. Может быть, ее удастся получить кому-нибудь из наших читателей?

Решение задачи о квадратах. Пункт а). Гвоздь пересекается с плоскостью, к которой прибиты квадраты, по кругу, обозначим его центр через O, а радиус — через r. Получившаяся черная фигура является многоугольником, обозначим его $A_1A_2\dots A_n$. Соединим точку O с вершинами этого многоугольника. Тогда наша фигура разобьется на непересекающиеся треугольники $OA_1A_2, OA_2A_3, \dots, OA_nA_1$ (это следует из того, что точка O принадлежит всем квадратам). Обозначим соответственно через $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ углы этих треугольников при вершине O.

Рассмотрим один из треугольников, скажем OA_1A_2, и оценим длину стороны A_1A_2.

Отрезок A_1A_2 лежит на стороне одного из исходных квадратов. Так как по условию гвоздь лежит целиком внутри этого квадрата, расстояние от точки O

до прямой, содержащей A_1A_2, больше r. Поэтому площадь треугольника OA_1A_2 больше $\frac{1}{2}\cdot r\cdot A_1A_2$. С другой стороны, эта площадь равна $\frac{1}{2}\cdot OA_1\cdot OA_2\cdot\sin\alpha_1$, и поскольку OA_1 и OA_2 меньше диагонали квадрата (то есть $\sqrt{2}$), площадь треугольника OA_1A_2 меньше $\sin\alpha_1$. Получаем неравенство:

$$\frac{1}{2}\cdot r\cdot A_1A_2<\sin\alpha_1,\quad \text{откуда } A_1A_2<\frac{2}{r}\cdot\sin\alpha_1.$$

Записав для каждой стороны фигуры аналогичное неравенство и просуммировав их, получим:

$$A_1A_2+\ldots+A_nA_1<\frac{2}{r}\cdot(\sin\alpha_1+\ldots+\sin\alpha_n)<\frac{2}{r}\cdot(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)=\frac{4\pi}{r}.$$

Так как $r=1/20$ см, мы получаем, что периметр фигуры не превосходит 80π см, что меньше $80\cdot 3{,}15=252$ см и подавно меньше 1 км.

Пункт в). Оказывается, общую задачу можно свести к предыдущей. Для этого наложим на плоскость квадратную сетку с шагом $1/2$, в узлах которой вобьем гвоздики радиуса $1/20$ (то есть для каждого узла сетки нарисуем круг радиуса $1/20$ с центром в этом узле).

Лемма. *Для каждого из исходных квадратов найдется гвоздик сетки, целиком содержащийся в этом квадрате.*

Доказательство. Впишем в каждый из исходных квадратов окружность радиуса $1/2$. Достаточно доказать, что для каждой такой окружности найдется гвоздик сетки, целиком в ней содержащийся. Пусть ω — одна из этих окружностей, M — ее центр. Точка M лежит внутри одного из квадратиков сетки, расстояние от M до ближайшей из вершин этого квадратика не больше половины диагонали квадратика, то есть не больше $1/2\sqrt{2}$. Тогда гвоздик с центром в этой вершине будет целиком содержаться в окружности ω, так как ее радиус равен $1/2$, что больше $1/2\sqrt{2}+1/20$. Лемма доказана.

Разобьем теперь исходные квадраты на группы по правилу: в одну группу входят квадраты, целиком содержащие конкретный гвоздик сетки (возможно, некоторые квадраты попадут сразу в несколько групп).

Применив для каждой группы неравенство из пункта а), получим, что периметр фигуры, образованной квадратами одной группы, не больше 80π.

Пусть всего групп N. Тогда периметр всей нашей фигуры не больше $80\pi N$. С другой стороны, так как площадь каждого гвоздика равна $\pi/400$, и гвоздики не перекрываются, общая площадь нашей фигуры не меньше $\pi N/400$. Поэтому отношение периметра нашей фигуры к ее площади не превосходит 32 000, что меньше 100 000.