Алгоритм Евклида, цепные дроби, числа Фибоначчи и квадрирование прямоугольников

С. Б. Гашков

1. Алгоритм Евклида и квадрирование прямоугольников

Свой знаменитый алгоритм Евклид придумал для решения задачи о соизмеримости двух отрезков[1]. Общей мерой отрезков с длинами l_1 и l_2 называется такой отрезок длины l, который можно уложить без остатка как в первом отрезке (очевидно, ровно l_1/l раз), так и во втором (соответственно l_2/l раз).

Как известно, алгоритм заключается в следующем. Меньший отрезок (длины l_2) укладывается в большем (длины l_1) максимально возможное число, скажем a_1, раз, после чего остается отрезок длины $l_1 - a_1 l_2$, которую обозначим l_3 (на алгебраическом языке это называется делением с остатком). Отрезок l_3 укладывается, скажем, a_2 раз в отрезке l_2, и получается в остатке отрезок l_4. Потом отрезок l_4 укладывается a_3 раз в отрезке l_3, и получается в остатке отрезок l_5 и т. д.

Кстати, сам Евклид индукцию не проводил, а повторил шаг алгоритма три раза, и мы тоже последуем ему в этом. Работу алгоритм заканчивает на том шаге, скажем с номером k, когда полученный на предыдущем шаге отрезок l_{k+1} укладывается на отрезке l_k ровно $a_k = l_k/l_{k+1}$ раз. Тогда в качестве общей меры l отрезков l_1 и l_2 берется отрезок l_{k+1}.

В современной терминологии длину отрезка l_{k+1} — общей меры отрезков l_1 и l_2 — называют наибольшим общим делителем (НОД) l_1 и l_2 и обозначают (l_1, l_2).

Обозначим $e(m, n)$ число шагов алгоритма Евклида, примененного к натуральным числам m и n. Ясно,что введенная функция симметрична, т. е. не меняется при перестановке своих аргументов, и зависит только от отношения m/n.

[1] Сам он свой метод алгоритмом конечно не называл, термин этот стал популярен в нашем веке и происходит от искажения имени Аль Хорезми — жившего тысячу лет назад в Хорезме выдающегося математика, название одной из книг которого дало имя целому разделу математики — алгебре.

Алгоритм Евклида — один из наиболее часто употребляемых в математике и любая информация о функции $e(m,n)$, оценивающей скорость его работы, интересна. Однако, несмотря на простоту определения, функция $e(m,n)$ ведет себя очень нерегулярно и с трудом поддается исследованию. До сих пор наиболее известным результатом о ней остается найденная в первой половине 19-го века[2)] оценка

$$e(m,n) \leqslant \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(\max(m,n)+1/2)) \rfloor - 1,$$

где $\phi = (\sqrt{5}+1)/2$ — так называемое золотое сечение, а $\lfloor a \rfloor$ — целая часть числа a. Другими словами, число делений в алгоритме Евклида нахождения (m,n) не превосходит

$$\lfloor \log_\phi (\sqrt{5}(\max (m,n)+1/2)) \rfloor - 1,$$

причем оценка точная, в чем мы скоро убедимся.

Работу алгоритма Евклида можно представить также следующим образом: в прямоугольник размера $l_1 \times l_2$ укладываем a_1 квадратов размера $l_2 \times l_2$, в оставшийся прямоугольник размера $l_2 \times l_3$ укладываем a_2 квадратов размера $l_3 \times l_3$ и т. д., пока не покроем прямоугольник размера $l_1 \times l_2$ квадратами k разных размеров в общем количестве $a_1 + \ldots + a_k$ штук.

Обозначим $E(m,n)$ наименьшее число квадратов в полученном с помощью алгоритма Евклида покрытии прямоугольника размера $m \times n$.

В дополнение к верхней оценке функции $e(m,n)$ далее будет доказана также двойственная к ней в некотором смысле нижняя оценка функции $E(m,n)$

$$E(m,n) \geqslant \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(\max(m,n)-1/2)) \rfloor,$$

справедливая при любых взаимно простых m,n. Будет показано также, что указанная оценка точная, т. е. она достигается для бесконечно многих m,n.

Вопрос о ее достижимости хотя бы по порядку для произвольного значения $\max(m,n)$ не ясен. Близко к этому вопросу стоит поставленная Н. М. Коробовым[3)] проблема о существовании для любого n такой правильной дроби m/n, что в ее разложении в цепную дробь все элементы будут ограничены, и тогда

$$E(m,n) < C \log n, \quad e(m,n) < c \log n,$$

где c, C — некоторые константы.

[2)] Известным французским математиком Ламе.

[3)] В прошлом победителем первой Московской математической олимпиады, ныне известным специалистом по теории чисел и вычислительной математике.

Если считать целью алгоритма Евклида покрытие прямоугольника квадратами, то он действует как «жадный алгоритм»[4]: на каждом шаге помещает в прямоугольник на свободное место квадрат максимальных размеров. На первый взгляд кажется, что он строит минимальное по числу используемых квадратов покрытие. Однако это не так и в этом мы скоро убедимся. Поэтому имеет смысл обозначить $K(m,n)$ наименьшее число квадратов в покрытии прямоугольника размера $m \times n$ и рассмотреть задачу о вычислении этой величины. В общем случае она оказывается чрезвычайно трудной.

Задача 1. Докажите, что $K(5,6) = 5$, $E(5,6) = 6$.

Возникает вопрос: а почему мы предполагаем, что m, n — натуральные, может быть имеет смысл также рассмотреть задачу о разбиении на квадраты прямоугольников и с несоизмеримыми сторонами? Ответ на этот вопрос дает доказанная в начале 20-го века известным немецким математиком М. Деном теорема о том, что если прямоугольник разрезан произвольным образом на квадраты, то его стороны соизмеримы со сторонами всех этих квадратов и друг с другом.

Рассмотрим теперь следующий класс покрытий (в другой терминологии — разбиений или разрезаний) прямоугольника. Разрежем прямоугольник на два прямоугольника, потом какой-нибудь из них разрежем на два прямоугольника и так далее до тех пор, пока не получим разбиение исходного прямоугольника на квадраты. Такие разбиения назовем гильотинными разбиениями (покрытиями) и обозначим минимальное число квадратов в таком разбиении прямоугольника $m \times n$ через $H(m,n)$.

Легко проверить,что все введенные функции симметричны и зависят только от отношения m/n, поэтому далее мы будем предполагать, что m и n взаимно просты, т. е. не имеют общего делителя, отличного от 1. Далее будет показано, что возможны неравенства $K(m,n) < H(m,n)$ и $H(m,n) < E(m,n)$.

Мы вернемся к функциям $K(m,n)$ и $H(m,n)$ позднее, а сейчас покажем, как функции $E(m,n)$ и $e(m,n)$ связаны с важным понятием цепной дроби.

2. Алгоритм Евклида и цепные дроби.

Понятие цепной дроби одно из важнейших в математике, ему посвящены целые книги (например «Цепные дроби» А. Я. Хинчина) и многие статьи в журнале «Квант» (например Е. М. Никишина и Ю. В. Нестеренко

[4] Термин «жадный алгоритм» употребляется в серьёзном смысле для обозначения подобного типа алгоритмов.

в №5,6 за 1983 г.). Далее мы расскажем о некоторых малоизвестных задачах, связанных с цепными дробями и числами Фибоначчи (о них тоже написаны книги, например Н. Н. Воробьевым, которая так и называется — «Числа Фибоначчи»).

Заметим, что если в процессе применения алгоритма Евклида к числам l_1 и l_2 в результате последовательных делений с остатком получается последовательность частных $a_1, \ldots, a_k$, то дробь l_1/l_2 равна так называемой цепной дроби

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_k}}}.$$

Это легко доказать, проверяя последовательно, что

$$\frac{l_i}{l_{i+1}} = a_i + \cfrac{1}{a_{i+1} + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_k}}}, \quad i = k, \ldots, 1.$$

Поэтому ясно, что произвольную (как правильную, так и неправильную) положительную дробь можно представить в виде цепной дроби с натуральными элементами a_i

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_k}}},$$

где возможно $a_1 = 0$. Запись числа в виде цепной дроби неоднозначна, так как

$$\frac{1}{a_k} = \frac{1}{(a_k - 1) + \frac{1}{1}}.$$

Чтобы сделать ее однозначной, далее используем только запись, в которой последний элемент $a_k \neq 1$. Будем использовать также сокращенную запись цепной дроби:

$$a_1 + \frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\ldots\frac{1}{+a_k}.$$

С объявлением однозначности записи числа в виде цепной дроби мы поторопились, так как можно рассматривать цепные дроби с нецелыми элементами. Но для дробей с натуральными элементами это верно. Действительно, из равенства

$$\frac{l_1}{l_2} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_k}}}$$

следует, что a_1 равно целой части дроби l_1/l_2, так как дробь

$$\cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_k}}}$$

очевидно меньше 1, и поэтому определяется однозначно, откуда следует, что и дробь

$$a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_k}}}$$

определяется однозначно, значит аналогичным образом получаем, что элемент a_2 определяется однозначно, и т. д.

Поэтому для любой положительной дроби $r = m/n$ с натуральными числителем и знаменателем однозначно определена как высота (число этажей) $e(r)$ так и сумма элементов $E(r)$ изображающей ее цепной дроби с натуральными элементами. Ясно, что указанные величины совпадают с введенными ранее функциями $e(m, n)$, $E(m, n)$.

Разумеется, алгоритм Евклида заканчивает работу не всегда, а лишь когда отрезки l_1 и l_2 соизмеримы, то есть когда отношение l_1/l_2 — рациональное число и только в этом случае соответствующая цепная дробь будет конечной. Если же упомянутое отношение иррационально, например отношение боковой стороны равнобедренного треугольника с углом 72 градуса при основании к этому основанию, то алгоритм Евклида будет работать бесконечно и породит бесконечную цепную дробь, в рассматриваемом случае весьма замечательную

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}.$$

Задача 2. Найдите геометрически, чему равно отношение боковой стороны к основанию в упоминавшемся выше треугольнике и докажите его иррациональность, не пользуясь алгоритмом Евклида.

Мы не будем касаться здесь вопроса о сходимости бесконечных цепных дробей[5], но все же заметим, что в рассматриваемом случае эта дробь равна пределу последовательности конечных цепных дробей

$$1, \quad 1 + \frac{1}{1}, \quad 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}, \quad 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}, \quad \dots, \quad 1 + \cfrac{1}{1 + \dots + \cfrac{1}{1}},$$

[5] См. об этом, например, упоминавшуюся книжку А. Я. Хинчина.

также весьма замечательных. Если обозначить n-ю дробь в этой последовательности через ϕ_n и преобразовать ее от n-этажного вида к обыкновенному, то получим дробь $G_n/F_n = \phi_n$. Сравнивая соседние дроби, замечаем, что

$$\phi_n = 1 + \frac{1}{\phi_{n-1}}, \quad F_n = G_{n-1},\ G_n = F_{n-1} + G_{n-1}.$$

Последнее соотношение можно преобразовать к виду $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$, и заметить, что $\phi_n = F_{n+1}/F_n$.

3. Числа Фибоначчи

Последовательность $\{F_n\}$, определенная равенствами $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n = 2, 3, \dots,$ — это и есть знаменитая последовательность Фибоначчи[6].

Обозначая предел последовательности ϕ_n через ϕ и переходя к пределу в обоих частях равенства

$$\phi_n = 1 + \frac{1}{\phi_{n-1}}\,,$$

получаем уравнение

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}\,,$$

у которого на роль ϕ годится только положительный корень

$$\phi = (\sqrt{5} + 1)/2$$

— золотое сечение.[7]

Среди огромного числа фактов о числах Фибоначчи нам понадобятся только три, которые мы сейчас и докажем.[8] Несколько утверждений, которые не будут использоваться далее, мы приведем без доказательства в виде задач, в том числе и обоснование проведенного выше предельного перехода.

Лемма 1. *Для чисел Фибоначчи справедливы тождество*

$$F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$$

[6] Она появилась в 13 веке в книге Леонардо Пизанского, по прозвищу Фибоначчи, в задаче, в которой шла речь о размножении кроликов.

[7] О роли этого числа в математике и в искусстве см., например, замечательные книги Д. Пидо «Геометрия и искусство» и книгу Г. Коксетера «Введение в геометрию».

[8] Доказательства первых двух фактов, также как и решения большинства следующих далее задач, можно найти в упоминавшейся книге Н. Н. Воробьева, а третий факт — в вышедшей в серии «Библиотечка Кванта» книге Р. Хонсбергера «Задачи с изюминкой».

и неравенство

$$F_{n+m} \leqslant F_{n+1}F_{m+1} \leqslant F_{n+m+1},$$

в котором левое неравенство обращается в равенство при $m = 1$ *или* $n = 1$, *а правое — при* $m = 0$ *или* $n = 0$.

Доказательство тождества проведем индукцией по m. База индукции при $m = 1, 2$ очевидно справедлива, а для выполнения шага индукции достаточно проверить равенство

$$F_{n+m+1} = F_{n+m} + F_{n+m-1} = (F_mF_{n+1}+F_{m-1}F_n) + (F_{m-1}F_{n+1}+F_{m-2}F_n) = \\ = (F_m + F_{m-1})F_{n+1} + (F_{m-1} + F_{m-2})F_n = F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n.$$

Неравенство следует из тождества так как

$$F_{n+m+1} = F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n,$$
$$F_{n+m} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n \leqslant F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_{n+1} = F_{n+1}F_{m+1}.$$

Следующая лемма довольно удивительна: в ней целое число выражается через иррациональное.

Лемма 2. *Справедлива формула Бине*[9]

$$F_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}.$$

Доказательство также проведем по индукции. База индукции при $n = 0, 1$ очевидно справедлива, так как

$$\frac{\phi - (-\phi)^{-1}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = 1,$$

а для выполнения шага индукции достаточно проверить равенства

$$\phi^2 = \phi + 1, \quad (-\phi)^{-2} = (-\phi)^{-1} + 1,$$

из них вывести почленным умножением равенства

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \phi^{n-1}, \quad (-\phi)^{-n-1} = (-\phi)^{-n} + (-\phi)^{-n+1},$$

и заметить, что тогда

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}} + \frac{\phi^{n-1} - (-\phi)^{-n+1}}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^{n+1} - (-\phi)^{-n-1}}{\sqrt{5}}.$$

Лемма 3. *Неравенство* $F_n \leqslant m$ *справедливо тогда и только тогда, когда*

$$n \leqslant \lfloor \log_\phi (\sqrt{5}(m + 1/2)) \rfloor.$$

Неравенство $F_n \geqslant m$ *справедливо тогда и только тогда, когда*

$$n \geqslant \lfloor \log_\phi (\sqrt{5}(m - 1/2)) \rfloor + 1.$$

[9] Бине — французский математик 19 века.

Для доказательства перепишем неравенство $F_n \leqslant m$ с помощью формулы Бине в виде
$$\frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}} \leqslant m,$$
что равносильно неравенству
$$\frac{\phi^n}{\sqrt{5}} \leqslant m + \frac{(-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}} < m + \frac{1}{2}\,,$$
так как если
$$\frac{\phi^n}{\sqrt{5}} < m + \frac{1}{2}\,,$$
то
$$F_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}} < m + \frac{1}{2} - \frac{(-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}} < m + 1,$$
и значит $F_n \leqslant m$. Неравенство
$$\frac{\phi^n}{\sqrt{5}} < m + \frac{1}{2}$$
равносильно
$$n < \log_\phi(\sqrt{5}(m + 1/2)),$$
а значит и неравенству
$$n \leqslant \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(m + 1/2)) \rfloor,$$
так как $\log_\phi(\sqrt{5}(m + 1/2))$ не может быть целым числом, ведь в противном случае
$$\frac{\phi^k}{\sqrt{5}} = m + \frac{1}{2}\,,$$
откуда
$$F_k = \frac{\phi^k - (-\phi)^{-k}}{\sqrt{5}} = m + \frac{1}{2} - \frac{(-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}} = m + \alpha, \quad 0 < \alpha < 1,$$
что невозможно, так как F_k — целое число.

Второе утверждение леммы очевидно равносильно первому.

Отметим, что из леммы 3 вытекает, что последовательность
$$\Phi(m) = \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(m + 1/2)) \rfloor$$
обратна к последовательности Фибоначчи F_n в том смысле, что
$$\Phi(F_n) = n.$$

Задача 3. Проверьте, что F_n — ближайшее целое к числу $\phi^n/\sqrt{5}$.

Задача 4. Докажите, что
$$F_{m+1}F_n - F_m F_{n+1} = (-1)^m F_{n-m}.$$

Лемма 4. *Справедливы тождества*

$$F_{n-1}/F_n + F_{n-1}/F_{n+1} = (F_nF_{n+1} + (-1)^n)/F_nF_{n+1},$$
$$F_{n-2}/F_n + F_n/F_{n+1} = (F_nF_{n+1} + (-1)^{n+1})/F_nF_{n+1},$$
$$F_{n-1}/F_n + F_n/F_{n+2} = (F_nF_{n+2} + (-1)^n)/F_nF_{n+2},$$
$$F_{n-2}/F_n + F_{n+1}/F_{n+2} = (F_nF_{n+2} + (-1)^{n+1})/F_nF_{n+2}.$$

Для доказательства первого из них перепишем его в виде

$$F_{n-1}F_{n+1} + F_{n-1}F_n = F_nF_{n+1} + (-1)^n,$$

потом в виде

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (F_{n-1} - F_{n+1})F_n = (-1)^n,$$

и заметим, что тождество

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

является частным случаем тождества предыдущей задачи.

Для доказательства второго перепишем его в виде

$$F_{n-2}F_{n+1} + F_n^2 = F_nF_{n+1} + (-1)^{n+1},$$

и преобразуем к уже знакомому виду

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}.$$

Для доказательства третьего перепишем его в виде

$$F_{n+2}F_{n-1} + F_n^2 = F_nF_{n+2} + (-1)^n,$$

и преобразуем к виду

$$F_{n+2}F_{n-1} - F_nF_{n+1} = (-1)^n,$$

который является частным случаем предыдущей задачи.

Для доказательства последнего тождества перепишем его в виде

$$F_{n-2}F_{n+2} + F_nF_{n+1} = F_nF_{n+2} + (-1)^{n+1},$$

и преобразуем к уже знакомому виду

$$F_nF_{n+1} - F_{n+2}F_{n-1} = (-1)^{n+1}.$$

Задача 5. Выведите из предыдущей задачи тождества

$$\phi_{n+1} - \phi_n = \frac{(-1)^{n+1}}{F_nF_{n+1}}, \quad \phi_{n+2} - \phi_n = \frac{(-1)^n}{F_nF_{n+2}},$$

а из них — монотонность подпоследовательностей $\{\phi_{2n}\}$ и $\{\phi_{2n+1}\}$. Опираясь на доказанные утверждения, докажите сходимость последовательности $\{\phi_n\}$.

Задача 6. Докажите, что $(F_n, F_{n+1}) = 1$.

Задача 7. Если продолжить последовательность Фибоначчи в «отрицательную» сторону с сохранением равенства $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$, то будут выполняться равенства $F_{-k-1} = (-1)^k F_k$ и сохранятся все формулы предыдущих задач.

Следующая задача обобщает обе предыдущие.

Задача 8. (*Люка.*) Докажите, что $(F_n, F_m) = F_{(n,m)}$.

Задача 9. Докажите, что разложение числа F_{n-3}/F_n в цепную дробь имеет вид

$$\frac{1}{4+}\cdots\frac{1}{+4+a_k},$$

где $k = 1 + m$; $a_k = 0$, если $n = 3m$; $a_k = 1/3$, если $n = 3m + 1$; $a_k = 1/5$, если $n = 3m + 2$.

4. Цепные дроби и числа Фибоначчи

Цепную дробь

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

можно рассматривать с произвольными, а не только натуральными элементами. Если выполнить все действия, указанные в ней, то ее можно преобразовать в обыкновенную; выражение ее числителя и знаменателя через $a_0, a_1, \ldots, a_n$ обозначим

$$[a_0, \ldots, a_n] \text{ и } [a_1, \ldots, a_n].$$

Ясно, что выражение $[a_0, \ldots, a_n]$ представляет из себя многочлен от переменных $a_0, \ldots, a_n$. Непосредственно проверяется, что

$$[a_0, \ldots, a_n] = a_0[a_1, \ldots, a_n] + [a_2, \ldots, a_n].$$

Можно считать, что это равенство справедливо и при $n = 1$, если последней скобке в этом случае приписать значение 1.

Применяя алгоритм Евклида к числителю и знаменателю дроби

$$\frac{[a_0, \ldots, a_n]}{[a_1, \ldots, a_n]},$$

где числа a_i — натуральные, замечаем, что она несократима, так как в результате его работы получается как раз цепная дробь

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}},$$

и

$$([a_0, \ldots, a_n], [a_1, \ldots, a_n]) = ([a_{n-1}, a_n], [a_n]) = ([a_n], 1) = 1.$$

Лемма 5. *Число одночленов в многочлене $[a_1, \ldots, a_n]$ равно F_{n+1} и при любых натуральных $a_1, \ldots, a_n$ справедливо неравенство*

$$F_{n+1} \leqslant [a_1, \ldots, a_n],$$

которое обращается в равенство лишь при $a_1 = \ldots = a_n = 1$, и неравенство

$$[a_1, \ldots, a_n] \leqslant F_{1+a_1+\ldots+a_n},$$

которое обращается в равенство при $a_1 \leqslant 2$, $a_n \leqslant 2$, $a_2 = \ldots = a_{n-1} = 1$, а также при $n = 1$, $a_1 = 3$.

Доказательство. Первое утверждение леммы следует из второго, поэтому достаточно доказать индукцией по n, что

$$F_{n+1} \leqslant [a_1, \ldots, a_n] \leqslant F_{1+a_1+\ldots+a_n},$$

причем равенство

$$F_{n+1} = [a_1, \ldots, a_n]$$

справедливо лишь при $a_1 = \ldots = a_n = 1$, а равенство

$$[a_1, \ldots, a_n] = F_{1+a_1+\ldots+a_n}$$

— лишь при $a_1 = \ldots = a_{n-1} = 1$, $a_n \leqslant 2$, или $a_1 = 2$, $a_2 = \ldots = a_{n-1} = 1$, $a_n \leqslant 2$ или $n = 1$, $a_1 = 3$.

Удобно начинать индукцию с $n = 0$, полагая формально как и раньше $[a_1, \ldots, a_n] = 1$, $F_{1+a_1+\ldots+a_n} = F_1 = 1$ при $n = 0$, тогда неравенства леммы очевидно обращаются в равенства. Заметим, что $F_k = k-1$ при $k = 2, 3, 4$, а потом $F_k > k - 1$, так как

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} \geqslant k - 1 + k - 2 > k$$

(здесь в неявном виде тоже проводится индукция).

База индукции ($n = 0, 1$) теперь очевидна, так как

$$F_2 = 1 \leqslant a_1 \leqslant F_{1+a_1}.$$

Проведем индукционный переход. Согласно равенству

$$[a_1, \ldots, a_n] = a_1[a_2, \ldots, a_n] + [a_3, \ldots, a_n]$$

и предположению индукции справедливы неравенства

$$F_n \leqslant [a_2, \ldots, a_n] \leqslant F_{1+a_1+\ldots+a_n}, \quad F_{n-1} \leqslant [a_3, \ldots, a_n] \leqslant F_{1+a_3+\ldots+a_n},$$

следовательно,

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \leqslant [a_2, \ldots, a_n] + [a_3, \ldots, a_n] \leqslant [a_1, \ldots, a_n] =$$
$$= a_1[a_2, \ldots, a_n] + [a_3, \ldots, a_n] \leqslant a_1 F_{1+a_2+\ldots+a_n} + F_{1+a_3+\ldots+a_n} \leqslant$$
$$\leqslant F_{a_1+1} F_{1+a_2+\ldots+a_n} + F_{a_1} F_{1+a_3+\ldots+a_n},$$

и равенство $F_{n+1} = [a_1, \ldots, a_n]$ справедливо лишь при $a_1 = \ldots = a_n = 1$. Согласно лемме 1 имеем

$$F_{u+v} = F_{u-1}F_v + F_u F_{v+1}.$$

Отсюда следует, что

$$[a_1, \ldots, a_n] \leqslant F_{a_1+1} F_{1+a_2+\ldots+a_n} + F_{a_1} F_{a_2+\ldots+a_n} = F_{1+a_1+\ldots+a_n},$$

и неравенство доказано. Равенство возможно лишь когда

$$F_{a_1+1} = a_1, \quad F_{a_1} = 1, \quad F_{a_2+\ldots+a_n} = F_{1+a_3+\ldots+a_n},$$

и $[a_2, \ldots, a_n] = F_{1+a_2+\ldots+a_n}$, т. е. только в случае, когда

$$a_1 \leqslant 2, \quad a_2 = 1, \quad [a_2, \ldots, a_n] = F_{1+a_2+\ldots+a_n}, \; n \geqslant 3$$

или когда $a_1 \leqslant 2$, $a_2 \leqslant 2$, $n = 2$ и, следовательно, согласно предположению индукции лишь когда

$$a_1 = 2, \quad a_2 = \ldots = a_{n-1} = 1, \quad a_n \leqslant 2,$$

или $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 1, a_n \leqslant 2$. Тем самым шаг индукции сделан и лемма доказана.

В заключение раздела предлагаем читателю несколько важных утверждений о цепных дробях в качестве задач. Эти утверждения далее нам, однако, не понадобятся.

Задача 10. (*Правило Эйлера.*) Докажите индукцией по n, что многочлен

$$[a_0, \ldots, a_n]$$

можно получить следующим образом: берем произведение всех элементов, затем всевозможные произведения, которые можно получить, опустив какую-нибудь пару соседних элементов, затем из этих произведений получаем новые, выбрасывая произвольным образом пары соседних элементов и так далее, и наконец суммируем все различные из получившихся произведений (если $n+1$ четно, то на последнем шаге получается «пустое» произведение, не содержащее вообще сомножителей; как принято, его значение по определению полагаем равным 1).

Задача 11. Докажите, что

$$[a_0, \ldots, a_n] = [a_n, \ldots, a_0],$$

т. е. при изменении порядка элементов на противоположный числитель дроби не меняется.

Задача 12. Докажите, что

$$[a_0, \dots, , a_n] = a_n[a_0, \dots, a_{n-1}] + [a_0, \dots, a_{n-2}].$$

Дробь, образованная первыми k этажами, называется k-й подходящей дробью для исходной дроби. Ее величина изображается обыкновенной дробью

$$\frac{[a_0, \dots, a_k]}{[a_1, \dots, a_k]},$$

которую для краткости далее обозначаем $\frac{p_k}{q_k}$.

Дробь

$$\frac{[a_{k+1}, \dots, a_n]}{[a_{k+2}, \dots, a_n]},$$

называется k-м остатком и обозначается r_k.

Задача 13. Проверьте, что

$$\frac{[a_0, \dots, a_n]}{[a_1, \dots, a_n]} = \frac{[a_0, \dots, a_{k-1}, r_k]}{[a_1, \dots, a_{k-1}, r_k]}.$$

Задача 14. Докажите, что при $k \geqslant 2$ справедливы равенства

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}.$$

Докажем наконец, что справедлива

Теорема. *Для любых натуральных m и n*

$$e(m, n) \leqslant \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(\max(m, n) + 1/2)) \rfloor - 1,$$

другими словами, высота цепной дроби для числа m/n не больше

$$\lfloor \log_\phi (\sqrt{5}(\max(m, n) + 1/2)) \rfloor - 1,$$

и при $(m, n) = 1$

$$E(m, n) \geqslant \lfloor \log_\phi (\sqrt{5}(\max(m, n) - 1/2)) \rfloor,$$

другими словами, сумма элементов цепной дроби для числа m/n, не меньше

$$\lfloor \log_\phi (\sqrt{5}(\max(m, n) - 1/2)) \rfloor.$$

Оба неравенства достижимы, а именно, справедливо следующее экстремальное свойство чисел Фибоначчи: среди всех несократимых правильных дробей вида s/F_k наименьшую сумму элементов соответствующей цепной дроби имеют только дроби F_{k-2}/F_k и F_{k-1}/F_k, а наибольшую по высоте цепную дробь имеет F_{k-1}/F_k.

Доказательство. Пусть m/n — несократимая правильная дробь и

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\cdots\frac{1}{+a_k}.$$

Тогда $n = [a_1, \dots, a_k]$ и из доказанных в лемме 4 неравенств имеем

$$F_{k+1} \leqslant n \leqslant F_{1+a_1+\ldots+a_k}\ ,$$

откуда и из леммы 3 немедленно следует неравенство теоремы. Остальное вытекает из равенств

$$\underbrace{\frac{1}{1+}\cdots\frac{1}{+1}\frac{1}{+2}}_{k-1} = \underbrace{\frac{1}{1+}\cdots\frac{1}{+1}\frac{1}{+1}}_{k} = \frac{F_k}{F_{k+1}},$$

$$\underbrace{\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\cdots\frac{1}{+1}\frac{1}{+2}}_{k-2} = \underbrace{\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\cdots\frac{1}{+1}\frac{1}{+1}}_{k-1} = 1 + \frac{F_{k-2}}{F_{k-1}} = \frac{F_{k-1}}{F_{k+1}}.$$

Теорема доказана.

5. Формулы и ветвящиеся цепные дроби

Далее рассмотрим некоторые классы арифметических формул, представляющих, или, как еще говорят, реализующих рациональные числа. Будем рассматривать следующие множества операций

$$B_1 = \{x + y, x^{-1}, 1\},\ B_2 = \{x + y, (x^{-1} + y^{-1})^{-1}, 1\},$$

которые назовем базисами. Определим индуктивно понятие формулы над базисом B_i и реализуемого ею числа следующим образом.

Константы 1 объявляем формулами. Если Φ_1 и Φ_2 — формулы в базисе B, и r_1, r_2 — реализуемые ими числа, а $\omega \in B$ — любая базисная операция, то $\Phi = \omega(\Phi_1, \Phi_2)$ по определению является формулой, реализующей число $\omega(r_1, r_2)$. Если операция $\omega(x)$ есть операция обращения x^{-1}, то $\omega(\Phi_1)$ является формулой, реализующей функцию $\omega(f_1)$.

Сложностью формулы назовем число символов констант 1 в формуле. Сложностью числа r назовем минимальную сложность реализующей его формулы и обозначим ее $L_B(r)$. Обозначим через $L(r)$ знаменатель обычной несократимой дроби, равной r.

Например,

$$((1+1)^{-1} + (1+1+1)^{-1})^{-1}, \quad 1 + (1^{-1} + 1^{-1} + 1^{-1} + 1^{-1} + 1^{-1})^{-1}$$

— формулы в базисе B_2, реализующие число 6/5 со сложностью 5 и 6 соответственно. Отсюда видно, что

$$L_{B_2} \leqslant 5,$$

но равенство

$$L_{B_2} = 5$$

(на самом деле вытекающее из задачи 1) требует доказательства. Заметим, что, например, запись

$$((2)^{-1} + (3)^{-1})^{-1}$$

в смысле нашего определения формулой не является.

Понятие формулы в базисе B_1 по существу равносильно понятию ветвящейся цепной дроби. Определим последнее понятие по индукции. Обычные цепные дроби считаем частным случаем ветвящихся цепных дробей. Если R_i, $i = 1, \ldots, n$, — ветвящиеся цепные дроби, a — натуральное число, то дробь

$$\frac{1}{a + R_1 + \ldots + R_n}$$

тоже назовем ветвящейся, а все элементы дробей R_i и число a — ее элементами. Сумму ветвящихся цепных дробей и произвольного целого a тоже считаем ветвящейся цепной дробью, а ее элементами — все элементы слагаемых и число a.

Задача 15. Для любой дроби r число $L_{B_1}(r)$ равно наименьшей сумме элементов в ветвящихся цепных дробях, представляющих r.

Докажем, что для любой дроби r

$$L_{B_1}(r) = L_{B_2}(r).$$

Действительно, так как функция $\left(x^{-1} + y^{-1}\right)^{-1}$ выражается в базисе B_1 в виде бесповторной суперпозиции, то любую формулу в базисе B_2 можно без изменения сложности преобразовать в формулу в базисе B_1, откуда $L_{B_2}(r) \geqslant L_{B_1}(r)$. Любая подформула вида Φ^{-1} формулы в базисе B представима в виде $(\Phi_1^{-1} + \ldots + \Phi_n^{-1})^{-1}$, где Φ_i — подформулы меньшей сложности или константы 1. Тогда формула Φ эквивалентна формуле той же сложности

$$((\ldots((\Phi_1^{-1} + \Phi_2^{-1})^{-1})^{-1} + \Phi_3^{-1})^{-1})^{-1} \ldots + \Phi_n^{-1})^{-1} =$$
$$= \gamma(\gamma(\ldots\gamma(\gamma(\Phi_1, \Phi_2), \Phi_3)\ldots), \Phi_n),$$

где $\gamma(x, y) = (x^{-1} + y^{-1})^{-1}$, построенной в базисе $B_1 \cup B_2$, и содержащей на один символ $^{-1}$ меньше. Повторяя это преобразование, получим для любой формулы в базисе B_1 эквивалентную ей формулу той же сложности в базисе B_2. Значит, $L_{B_2}(r) \leqslant L_{B_1}(r)$, откуда $L_{B_2}(r) = L_{B_1}(r)$.

Задача 16. Для любой дроби r

$$L_{B_i}(r) = L_{B_i}(1/r).$$

Определим теперь понятие последовательно-параллельной электрической цепи из единичных резисторов. Один единственный резистор считаем П-цепью с сопротивлением единица. Если R_1 и R_2 — П-цепи с сопротивлениями r_1 и r_2 соответственно, то цепь, которая получается из цепей R_i параллельным соединением, имеет сопротивление $(r_1^{-1}+r_2^{-1})^{-1}$, а цепь, получающаяся из тех же цепей R_i последовательным соединением, имеет сопротивление r_1+r_2. Наименьшее число единичных сопротивлений, из которых можно построить П-цепь с сопротивлением r обозначим $L_{\Pi}(r)$.

Задача 17. Докажите, что $L_{\Pi}(r)=L_{B_i}(r)$.

Задача 18. Установите взаимно однозначное соответствие между H-разбиениям прямоугольника $m\times n$ и П-цепями с сопротивлением m/n и выведите отсюда, что $H(n,m)=H(m,n)=L_{\Pi}(m/n)=L_{B_i}(n/m)$.

Отметим, что задача о вычислении функции $L_{\Pi}(r)$ фактически рассматривалась в книге «Четыреста избранных задач из журнала American Mathematical Monthly», но сделанные там утверждения неверны, в чем мы предлагаем читателю убедиться самостоятельно.

Простейшие оценки введенных функций дают следующие утверждения. Если дробь $r=m/n$, то полагаем $E(r)=E(n,m)$.

Теорема 2. *Для любой дроби* r

$$L_{B_i}(r)\leqslant E(r)\leqslant \max\{L(r),L(1/r)\},$$

причем равенство достигается лишь для дробей вида $1/q$, *и для дробей вида* $1-1/q=1/(1+1/(q-1))$.

Доказательство. Очевидно, что любую конечную цепную дробь с натуральными элементами можно преобразовать в формулу в базисе B_1 сложности равной сумме элементов цепной дроби (заменяя каждый элемент a на формулу $1+\ldots+1$). Поэтому $L_{B_1}(r)\leqslant E(r)$.

Неравенство $E(r)\leqslant L(r)$ доказывается индукцией по высоте цепной дроби для r, которую можно считать правильной. База $(n=1)$ очевидна.

Шаг индукции. Так как

$$r=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{r_1}}$$

где $r_1=[a_2,\ldots,a_n]$, то согласно предположению индукции $E(r_1)\leqslant L(r_1)$, значит

$$E(r)=E(r_1)+a_1\leqslant E(r_1)+a_1+(E(r_1)-1)(a_1-1)=E(r_1)a_1+1\leqslant \\ \leqslant L(1/r_1)a_1+1\leqslant L(r).$$

Равенство возможно, лишь когда $E(r_1)=1$ или $a_1=1$ и одновременно

r_1 — натуральное, т. е. либо когда $r = 1/(a_1 + 1)$, либо когда

$$r = 1/(1 + 1/a_2) = a_2/(1 + a_2).$$

Теорема 3. *Справедливо соотношение*

$$H(p, q) = L_{B_i}(p/q) \geqslant \max(p, q)/\min(p, q).$$

Равенство достигается только на дробях вида $1/q$.

Докажем индукцией, что $1/L_{B_2}(r) \leqslant r$. Пусть Φ — формула сложности $L(r)$ в базисе B_2, реализующая r. Можно считать, что Φ не содержит подформул вида $((\Phi_1)^{-1})^{-1}$. Рассмотрим оба возможных случая. Пусть $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, Φ_i реализует r_i и имеет сложность $L_i = L(r_i)$. Тогда $L(r) = L_1 + L_2$, $r = r_1 + r_2$. Согласно предположению индукции $r_i \geqslant 1/L_i$, откуда

$$r = r_1 + r_2 \geqslant 1/L_1 + 1/L_2 > 1/L.$$

Если же $\Phi = (\Phi_1 + \Phi_2)^{-1}$, то в силу предположения индукции

$$1/r_i \geqslant 1/L_i,$$

откуда

$$1/r = r_1 + r_2 \leqslant L_1 + L_2 = L,$$

причем равенство возможно лишь когда $r_i = L_i$, т. е. $r = 1/L$.

Следующая теорема показывает, в частности, что $H(n, m)$ может быть гораздо меньше $E(n, m)$ и устанавливает точное неравенство между ними.

Теорема 4. *Справедливы соотношения*

$$E(m, n) \geqslant H(m, n) = L_{B_i}(m/n) \geqslant \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(\max(m, n) - 1/2)) \rfloor \geqslant \\ \geqslant \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(E(m, n) - 1/2)) \rfloor,$$

а для $q = F_n F_{n+1}$ *или* $F_n F_{n+2}$, $n \geqslant 2$,

$$H(q + 1, q) = L_{B_i}(1 + 1/q) = \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(E(q + 1, q) - 1/2)) \rfloor = \\ = \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(q + 1/2)) \rfloor.$$

Доказательство. Первое неравенство уже доказано в теореме 2. Второе неравенство будет доказано в следующем разделе в теореме 6. Последнее неравенство вытекает из предыдущего и второго неравенства теоремы 2.

Докажем последние утверждения. Пусть $q = F_n F_{n+1}$. Применяя в зависимости от четности n одно из равенств

$$F_{n-1}/F_n + F_{n-1}/F_{n+1} = (F_n F_{n+1} + (-1)^n)/F_n F_{n+1},$$
$$F_{n-2}/F_n + F_n/F_{n+1} = (F_n F_{n+1} + (-1)^{n+1})/F_n F_{n+1},$$

и пользуясь доказанными в теореме 1 равенствами

$$E(F_{n-1}/F_n) = E(F_{n-2}/F_n) = n-1,$$

получаем, что

$$L_{B_i}(1+1/q) \leqslant L_{B_i}(F_{n-1}/F_n) + L_{B_i}(F_{n-1}/F_{n+1}) \leqslant n-1+n = 2n-1$$

или

$$L_{B_i}(1+1/q) \leqslant L_{B_i}(F_{n-2}/F_n) + L_{B_i}(F_n/F_{n+1}) \leqslant n-1+n = 2n-1.$$

Применяя неравенство леммы 1

$$F_{n+k} < F_{n+1}F_{k+1} < F_{n+k+1}, \quad n,k \geqslant 2,$$

замечаем, что при $n \leqslant 2$

$$F_{2n-1} < q = F_nF_{n+1} < F_{2n},$$

значит $q+1 \leqslant F_{2n}$, откуда согласно лемме 3

$$\lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(q+1/2)) \rfloor = 2n-1,$$

а согласно теореме 2

$$L_{B_i}(1+1/q) \geqslant \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(q+1/2)) \rfloor = 2n-1,$$

значит

$$L_{B_i}(1+1/q) = 2n-1 = \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(q+1/2)) \rfloor.$$

Пусть теперь $q = F_nF_{n+2}$. Применяя в зависимости от четности n одно из равенств

$$F_{n-1}/F_n + F_n/F_{n+2} = (F_nF_{n+2} + (-1)^n)/F_nF_{n+2},$$

$$F_{n-2}/F_n + F_{n+1}/F_{n+2} = (F_nF_{n+2} + (-1)^{n+1})/F_nF_{n+2}$$

получаем аналогично предыдущему, что

$$L_{B_i}(1+1/q) \leqslant 2n.$$

Опять применяя неравенство леммы 1 замечаем, что при $n \leqslant 2$

$$F_{2n} < q = F_nF_{n+2} < F_{2n+1},$$

откуда опять согласно лемме 3

$$\lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(q+1/2)) \rfloor = 2n,$$

и согласно теореме 2

$$L_{B_i}(1+1/q) = 2n = \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(q+1/2)) \rfloor.$$

6. Второе доказательство

Неравенства, доказанные в последней теореме, показывают в частности, что любая нижняя оценка для $H(m,n) = L_{B_i}(m,n)$ автоматически будет и оценкой для $E(m,n)$, однако полученные в предыдущем разделе оценки не позволяют вывести оценку для $E(m,n)$. Нетривиальную нижнюю оценку для $H(m,n)$ получил О. М. Касим-Заде.

Далее приводится более простое доказательство несколько более слабого утверждения, из которого однако можно вывести такую же нижнюю оценку для $H(m,n)$, что и для $E(m,n)$, дав тем самым для последней второе доказательство. Для этого нам потребуются две леммы, имеющие и самостоятельный интерес.

Лемма 6. *Если* $0 \leqslant y_i, p_i, q_i \leqslant x_i$ *и* $p_i + q_i \leqslant x_i + y_i$, $i = 1,2$, *то* $p_1p_2 + q_1q_2 \leqslant x_1x_2 + y_1y_2$, *причем при* $0 < y_i < x_i$, $i = 1,2$, *равенство возможно лишь когда* $p_i = x_i$, $q_i = y_i$ *или когда* $p_i = y_i$, $q_i = x_i$, $i = 1,2$.

Для доказательства сначала заметим, что при условиях $p \leqslant x, 0 \leqslant b \leqslant$ $\leqslant a$ и $p + q \leqslant x + y$ справедливо неравенство $pa + qb \leqslant xa + yb$. Действительно,

$$pa + qb - xa - yb = (x - p)(b - a) + b(p + q - x - y) \leqslant 0.$$

В силу симметричности условия, можно считать, что $p_1 \geqslant q_1$. Тогда, применяя два раза сформулированное выше неравенство, получаем, что

$$p_1p_2 + q_1q_2 \leqslant p_1x_2 + q_1y_2 \leqslant x_1x_2 + y_1y_2.$$

При $p_1 > q_1 > 0$ равенство возможно лишь когда $p_i = x_i$, $q_i = y_i$, $i = 1,2$. При $q_1 = 0$ равенство невозможно, ибо тогда $p_1 + q_1 < x_1 + y_1$. При $p_1 = q_1 > 0$ равенство опять невозможно, ибо тогда равенства $p_1 + q_1 =$ $= x_1 + y_1$, $p_1 = x_1$ несовместны.

Лемма 7. *В условиях предыдущей леммы справедливо неравенство*

$$p_1q_2 + p_2q_1 + q_1q_2 \leqslant x_1y_2 + x_2y_1 + x_1x_2.$$

При $0 < y_i < x_i$, $i = 1,2$, *равенство возможно лишь когда* $p_i = y_i$, $q_i = x_i$, $i = 1,2$.

Для доказательства заметим, что при $p_1 + q_1 \leqslant x_1$ справедливо неравенство

$$p_1q_2 + p_2q_1 + q_1q_2 \leqslant (p_1 + q_1)(p_2 + q_2) \leqslant x_1(x_2 + y_2) < x_1y_2 + x_2y_1 + x_1x_2,$$

и, аналогично, такое же строгое неравенство справедливо при $p_2 + q_2 \leqslant x_2$.

Считая далее, что $p_i + q_i > x_i$, имеем:

$$p_1q_2 + p_2q_1 + q_1q_2 = (p_1 + q_1)(p_2 + q_2) - p_1p_2 =$$
$$= (p_1 + q_1)(p_2 + q_2) - (p_1 + q_1 - q_2)(p_2 + q_2 - q_2) \leqslant$$

$$\leqslant (p_1+q_1)(p_2+q_2)-(p_1+q_1-x_1)(p_2+q_2-x_2)=$$
$$=(p_1+q_1)x_2+x_1(p_2+q_2)-x_1x_2 \leqslant (x_1+y_1)x_2+(x_2+y_2)x_1-x_1x_2=$$
$$=x_1y_2+x_2y_1+x_1x_2.$$

Теорема 5. (*О. М. Касим-Заде.*) *Пусть p/q — несократимая дробь, p,q — целые числа, $L_{B_i}(p/q)=L$. Тогда*

$$|p|,|q| \leqslant F_{L+1}, \quad |p|+|q| \leqslant F_{L+2}.$$

Оба неравенства докажем по индукции. База индукции ($L=1$) очевидна.

Шаг индукции. Пусть Φ — формула сложности L в базисе B_1. Тогда или $\Phi=\Phi_1+\Phi_2$, где Φ_i — формулы сложности L_i, $L_1+L_2=L$, или $\Phi=\Phi_1^{-1}$, где Φ_1 имеет сложность L. В последнем случае обоснование шага индукции очевидно.

Рассмотрим первый случай. Согласно предположению индукции формулы Φ_i реализуют дроби p_i/q_i, такие, что

$$|p_i|,|q_i| \leqslant F_{L_i+1}, \quad |p_i|+|q_i| \leqslant F_{L_i+2},$$

p_i, q_i — целые числа. Тогда формула Φ реализует дробь p/q, такую, что $q=q_1q_2$, и $p=p_1q_2+q_1p_2$. Применяя лемму 6 при $x_i=F_{L_i+1}$, $y_i=F_{L_i}$ и используя лемму 1, получаем неравенство

$$|p| \leqslant |p_1|\,|q_2|+|q_1|\,|p_2| \leqslant F_{L_1+1}F_{L_2+1}+F_{L_1}F_{L_2}=F_{L_1+L_2+1}.$$

Также доказывается неравенство для $|q|$.

Оценим теперь $|q|+|p|$. Применяя лемму 7 при $x_i=F_{L_i+1}$, $y_i=F_{L_i}$ и используя лемму 1 получаем неравенство

$$|q|+|p| \leqslant |p_1|\,|q_2|+|q_1|\,|p_2|+|q_1|\,|q_2| \leqslant$$
$$\leqslant F_{L_1+1}F_{L_2+1}+F_{L_1+1}F_{L_2}+F_{L_1}F_{L_2+1}=F_{L_1+1}F_{L_2+2}+F_{L_1}F_{L_2+1}=$$
$$=F_{L_1+L_2+2}.$$

Обещанная нижняя оценка дается следующей теоремой.

Теорема 6. *Для любой несократимой дроби p/q, где p, q — натуральные числа, справедливы неравенства*

$$H(p,q)=L_{B_i}(p/q) \geqslant \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(\max(q,p)-1/2)) \rfloor,$$
$$H(p,q)=L_{B_i}(p/q) \geqslant \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(p+q-1/2)) \rfloor -1.$$

Докажем неравенство

$$L_B(p/q) \geqslant \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(\max(p,q)-1/2)) \rfloor.$$

Обозначив $L_B(p/q)$ через L и применив предыдущую теорему, получаем, что $\max(p, q) \leqslant F_{L+1}$. Отсюда и из леммы 3 получаем, что

$$L + 1 \geqslant \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(\max(p, q) - 1/2)) \rfloor + 1,$$

а значит и наше неравенство. Неравенство

$$L_{B_0}(p/q) \geqslant \lfloor \log_\phi(\sqrt{5}(p + q - 1/2)) \rfloor - 1$$

доказывается аналогично, только вместо первого неравенства предыдущей теоремы используем неравенство $p + q \leqslant F_{L+2}$.

7. Квадрирование прямоугольников и электрические цепи

Заменив в процессе построения произвольной П-цепи Ξ на каждом шаге параллельное соединение подцепей на последовательное, а последовательное соединение подцепей на параллельное, получаем новую цепь Ξ^*, которую назовем двойственной к цепи Ξ. Очевидно, что двойственная цепь для цепи Ξ^* совпадает с цепью Ξ.

Задача 19. Докажите, что двойственные друг другу цепи имеют взаимно обратные сопротивления и выведите отсюда последнее равенство предыдущей задачи.

Вернемся к произвольным разбиениям прямоугольника на квадраты. Им можно сопоставить плоские электрические цепи, состоящие из единичных сопротивлений.[10] Для этого выделим в прямоугольнике все горизонтальные отрезки, состоящие из сторон квадратов разбиения и не удлиняемые с сохранением этого свойства (в их число входят и обе горизонтальные стороны прямоугольника). В середине каждого из выделенных отрезков возьмем точку. Две точки соединяем отрезком, если некоторый квадрат разбиения касается обоих отрезков, на которых выбирались эти точки.

Если от первоначального чертежа оставить только выбранные точки и соединяющие их отрезки, то получится плоское изображение графа. Графом называется объект, состоящий из некоторого множества вершин и некоторого множества ребер, соединяющих эти вершины попарно. Если вершинам графа сопоставить точки на плоскости, а ребрам — отрезки, соединяющие соответствующие вершины, то получается изображение графа. Изображение называется плоским, если отрезки в нем пересекаются только в вершинах. Граф, имеющий плоское изображение, называется также плоским. Если ориентировать каждое ребро рассматриваемого графа в направлении от одной горизонтальной стороны прямоугольника

[10] Это было сделано четырьмя английскими математиками для решения задачи разбиения квадрата на попарно не равные квадраты. Интересная история поиска решения этой задачи описана в книжке И. М. Яглома «Как разрезать квадрат».

к другой и написать на каждом ребре длину стороны квадрата, изображаемого этим ребром, то получим ориентированный граф с нагруженными ребрами, называемый двухполюсной сетью (полюсами являются вершины, изображающие горизонтальные стороны прямоугольника).

Заметим, что сумма чисел, приписанных всем ребрам, выходящим из одного полюса, равна сумме чисел, приписанных всем ребрам, входящим в другой полюс, и обе они равны длине горизонтальной стороны прямоугольника. Если заменить каждое ребро графа на единичный резистор, то получим электрическую схему, соответствующую нашему разбиению. Если считать, что сила тока в каждом резисторе равна числу, приписанному соответствующему ребру, то для каждой вершины сумма втекающих в нее токов будет равна сумме вытекающих. Действительно, обе эти суммы равны длине горизонтального отрезка, в центре которого выбиралась рассматриваемая вершина.

Назовем гранью любую часть плоскости, ограниченную двумя ориентированными цепями ребер графа с общими началом и концом. Число вершин графа обозначим b, а число граней — r. Для каждой грани суммы чисел, приписанных ребрам обоих цепей, равны друг другу. Действительно, каждой грани можно сопоставить вертикальный отрезок внутри прямоугольника, состоящий из сторон квадратов разбиения и ограниченный сверху и снизу подобными же горизонтальными отрезками, тогда обе рассматриваемые суммы равны длине этого отрезка. Каждую из этих сумм можно интерпретировать как сумму падений напряжения на каждой из рассматриваемых цепей. В итоге получим $b + r$ уравнений Кирхгофа для рассматриваемой схемы. Падение напряжения между полюсами схемы равно длине вертикальной стороны прямоугольника, а ее сопротивление — отношению вертикальной и горизонтальной сторон.

Электрическую схему можно сопоставить нашему разбиению и другим способом, а именно, повернув прямоугольник на 90°. Эту схему назовем двойственной к первоначальной схеме.

Задача 20. Проверьте, что для П-цепей введенное понятие двойственности совпадает со старым.

В теории графов двойственным графом к данному плоскому графу называется граф, у которого вершинами являются грани исходного графа, а ребра, соединяющие вершины, соответствуют ребрам, принадлежащим одновременно обоим цепям, ограничивающим грани, соответствующие этим вершинам. Число вершин в двойственном графе равно числу граней в исходном и наоборот, а число ребер в обоих графах одинаково. Обозначим число ребер p.

Задача 21. Установите связь между понятием двойственности для плоских электрических цепей и двойственностью для плоских графов.

При решении следующей задачи полезно использовать знаменитую формулу Эйлера: для любого плоского графа $b - p + r = 1$.

Задача 22. Перечислите все графы не более чем с девятью ребрами, соответствующие не П-разбиениям.

Задача 23. (*Московская олимпиада* 1940 *года.*) Докажите, что прямоугольник нельзя разбить не более чем на 6 разных квадратов.

Задача 24. Докажите, что имеются только два разных разбиения прямоугольника не более чем на девять разных квадратов и покажите, что $L(61, 69) = 9$.

Теперь мы можем убедиться, что $K(m, n)$ иногда бывает меньше $H(n, m)$. Действительно, из теоремы 5 следует, что $L_{\Pi}(61, 69) \geqslant 10$.

Можно даже доказать, что для некоторых последовательностей m_k и n_k

$$K(m_k, n_k)/H(m_k, n_k) < 0{,}89.$$

Для этого рассмотрите электрическую цепь с вершинами $1, 2, \ldots, 8$ и единичными резисторами, соединяющими пары вершин (1,2), (1,3), (2,3), (2,6), (3,4), (3,5), (4,5), (4,7), (5,6), (5,7), (6,8), (7,8). Проверьте, что при напряжении между полюсами 1 и 8, равном 377, по резисторам пойдет ток (в направлении от меньших номеров к большим) силы 123, 138, 10, 113, 68, 75, 7, 61, 28, 54, 141, 115 соответственно. Постройте по этой цепи разбиение прямоугольника 256×377 на 12 квадратов со сторонами 123, 138, 10, 113, 68, 75, 7, 61, 28, 54, 141, 115. Рассмотрите последовательность прямоугольников размера $p_n \times q_n$, определяемую рекуррентными формулами

$$p_{n+1} = p_n^2 + q_n^2, \quad q_{n+1} = p_n q_n, \quad p_0 = 377, q_0 = 256,$$

и докажите по индукции, что $(p_n, q_n) = 1$ и $L(p_n, q_n) \leqslant 2^n \cdot 12$ (в доказательстве неравенства шаг индукции обосновывается тем, что прямоугольник $p_n \times q_n$ разбивается на два прямоугольника, подобных прямоугольнику $p_{n-1} \times q_{n-1}$). Отсюда следует, что

$$L(p_n, q_n)/\log_\phi p_n < 12/\log_\phi 377 < 0{,}89.$$

Далее примените теорему 5.

Отметим в заключение без доказательства, что

$$K(m, n) > \log_2(m + n).$$