Математический мир

Математика в двадцатом веке†

М. Атья

Эта статья основана на записи лекции, прочитанной в Филдсовском институте, Торонто, в июне 2000. В ней рассмотрено несколько ключевых тем, которые характеризуют математику двадцатого века. Кроме того, обсуждается влияние физики и сделаны некоторые предположения о возможном развитии математики в двадцать первом веке.

Благодарю вас за то, что вы пригласили меня сюда для участия в этой программе[1)]. Конечно, когда вы говорите о конце одного века и начале другого, перед вами два пути, и оба трудны. Можно дать обзор развития математики за прошедшие сто лет; а можно предсказать, какой будет математика в следующие сто лет. Я выбрал более сложную из этих задач. Предсказывать может каждый, и нас не будет поблизости, когда станет видно, в чем мы оказались неправы. Но дать представление о прошлом — здесь каждый может не согласиться с нами.

Всё, что я могу сделать, — это изложить вам свой личный взгляд. Невозможно охватить всё, и потому я пропущу некоторые важные разделы нашего сюжета, отчасти из-за того, что я в них не специалист, а отчасти потому, что они освещены в других источниках. Например, я ничего не скажу о великих событиях в области, лежащей между логикой и вычислениями и связанной с именами таких людей, как Гильберт, Гёдель и Тьюринг. Не скажу много и о приложениях математики, не считая теоретической физики, так как они весьма многочисленны и нуждаются в специальном рассмотрении. Каждое из них требует

† Bulletin of the London Mathematical Society, 2002. Vol. 34. No 1. P. 1–15. Перевод Б. Р. Френкина.

1) Мировой математический симпозиум 2000 года, Торонто, 7–9 июня, 2000.

отдельной лекции; возможно, вы больше услышите о них из некоторых других лекций в рамках этого собрания. Более того, бессмысленно даже пытаться дать перечень теорем или хотя бы знаменитых математиков за последние сто лет. Это было бы довольно нелепое занятие. Так что взамен я попытаюсь выбрать ряд тем, на мой взгляд, проходящих красной нитью через многие области математики, и выделить главные события.

Сначала позвольте сделать общее замечание. Столетие — понятие условное. На самом деле мы не верим, что по прошествии ста лет что-то внезапно останавливается и начинается снова. Поэтому, описывая математику XX века, я не буду особенно церемониться с датами. Если что-то началось в 1890-е годы и продолжалось в 1900-е, я не буду обращать внимания на эту подробность. Я намерен действовать как астроном и оперировать достаточно приближенными числами. В действительности многое зародилось в девятнадцатом веке и лишь пришло к воплощению в двадцатом.

Одна из трудностей моей задачи в том, что очень нелегко сегодня посмотреть на вещи глазами математика 1900 года, ибо столь многие достижения математики прошлого века впитаны нашей культурой и нами. Очень нелегко почувствовать время, когда люди мыслили не в наших терминах. На самом деле, если вы делаете подлинно важное открытие в математике, вам приходится совершенно исчезнуть! Вы просто растворяетесь в общей культуре. Поэтому при взгляде назад надо попытаться вообразить, на что была похожа иная эпоха, когда люди мыслили не так, как мы.

От локального к глобальному

Теперь я намереваюсь перечислить и обсудить некоторые темы. Мою первую тему, в общем, можно определить как переход от локального к глобальному. В классический период люди в целом предпочитали изучать вещи в малом масштабе, в локальных координатах и т. п. В нашем веке центр тяжести сместился к исследованию и осмыслению поведения глобального, в крупном масштабе. А так как глобальное поведение понять труднее, это часто делается на качественном уровне, и очень важными становятся топологические идеи. Не кто иной, как Пуанкаре, стал первопроходцем в топологии и предсказал, что топология станет важной компонентой математики XX века. Между прочим, Гильберт этого не сделал, когда составлял свой знаменитый перечень математических проблем. В этом перечне топология едва обнаруживается. Но для Пуанкаре было совершенно ясно, что она станет мощной силой.

Позвольте назвать несколько областей, и вы увидите, что́ я имею в виду. Рассмотрим, например, комплексный анализ («теорию функций», как его называли). Он был центром математики XIX века, сферой деятельности таких великих фигур, как Вейерштрасс. Для них функцией была функция одного комплексного переменного, а для Вейерштрасса — степенной ряд: нечто такое, что́ можно потрогать руками, записать и явно описать или же задать формулой. Функции были формулами; это было нечто явно заданное. Но затем работы Абеля, Римана и их последователей увели нас от этого, и теперь функции определялись не столько явными формулами, сколько своими глобальными свойствами: где расположены их особенности, каковы их области определения, где они принимают свои значения. Эти глобальные свойства стали характеризовать различия между функциями. Локальное продолжение оказалось лишь одним из способов для этого.

Сходная история произошла и с дифференциальными уравнениями. Решить дифференциальное уравнение — первоначально это означало найти явное локальное решение: нечто такое, что́ можно записать и потрогать руками. По мере дальнейшего развития стали появляться и неявные решения. Их уже не всегда можно было описать удобными формулами. Глобальные свойства решения в действительности определялись его сингулярностями: весьма похоже по духу на происшедшее в комплексном анализе, хотя и отличается в деталях.

В дифференциальной геометрии классические работы Гаусса и других авторов были посвящены изучению малых частей пространства, малых долей кривизны и локальных уравнений, описывающих локальную геометрию. Отсюда вполне естественно перейти к большим масштабам, чтобы понять глобальную картину искривленной поверхности в целом, а также соответствующую топологию. Когда вы переходите от малого к большому, именно топологические свойства становятся самыми важными.

Теория чисел претерпела сходную эволюцию, хотя на первый взгляд она и не укладывается в эту схему. Специалисты по теории чисел различают так называемую «локальную теорию», в которой говорится об отдельном простом числе — одном в данный момент — либо о конечном множестве простых чисел, и «глобальную теорию», где все простые рассматриваются одновременно. Эта аналогия между простыми числами и точками, между локальным и глобальным, имела существенное влияние на развитие теории чисел, и на нее оказали воздействие идеи, возникшие в топологии.

Что касается физики, то, разумеется, классическая физика связана с темой локальности, так как вы выписываете дифференциальное уравнение, управляющее поведением в малом масштабе, а после этого должны изучить крупномасштабное поведение физической системы. На самом деле вся физика так или иначе пытается предсказать — со всеми вытекающими следствиями, — что произойдет при переходе от малого масштаба, где вы понимаете происходящее, к большому масштабу.

Повышение размерности

Моя вторая тема будет совсем иной. Я называю ее повышением размерности. Вновь начнем с классической теории функций комплексного переменного: первоначально она состояла в очень подробном и тщательном изучении функций одного переменного. Переход к двум и более переменным по существу произошел в нашем столетии, и в этой области обнаружились новые явления. Не всё оказалось таким же, как в случае одного переменного. Имеются совершенно новые черты, и теория функций n переменных стала занимать всё более преобладающее положение. Это история одного из крупнейших достижений нашего столетия.

Точно так же дифференциальные геометры в прошлом предпочитали изучать кривые и поверхности. Теперь мы изучаем геометрию n-мерных многообразий, и нужно вдуматься, чтобы осознать это как важнейшее изменение. В прежние времена вы имели дело с кривыми и поверхностями, то есть с объектами, которые можно реально видеть в пространстве. Высшие размерности были несколько условными вещами, которые вы представляете математически, но, быть может, не принимаете всерьез. Идея принимать их всерьез и изучать на равных с низшими размерностями в действительности принадлежит XX столетию. Не так уж очевидна была для наших предшественников в XIX веке и мысль об увеличении числа функций, о том, чтобы изучать не одну, а несколько функций, то есть векторнозначные функции. Так что мы видим увеличение числа как независимых, так и зависимых переменных.

Линейная алгебра всегда имела дело с бóльшим числом переменных, но и рост размерности здесь оказался более крутым. Он привел от конечных размерностей к бесконечным, от линейного пространства к гильбертову — с бесконечным числом переменных. Разумеется, здесь участвовал и анализ. После функций от многих переменных вы можете рассмотреть функции от функций — функционалы. Это функции на пространстве функций. Все они имеют принципиально бесконечное число переменных: мы называем это вариационным исчислением. Схожий сюжет развивался и в области общих (нелинейных) функций: этот объект не нов, но вышел на передний план в XX веке. Такова моя вторая тема.

От коммутативного к некоммутативному

Третья тема — переход от коммутативного к некоммутативному. Возможно, это одна из самых характерных особенностей математики и особенно алгебры XX века. Особенно важным оказался некоммутативный аспект алгебры, и, конечно, его корни лежат в XIX веке. Эти корни разнообразны. Вероятно, самой крупной неожиданностью были работы Гамильтона по кватернионам. Они оказали огромное воздействие, прежде всего за счет идей, ориентированных на физику. Были также работы Грассмана по внешним алгебрам — другой алгебраической системе, которую теперь поглотила наша теория дифференциальных форм. Разумеется, другими ключевыми достижениями стали работы Кэли по матрицам и работы Галуа; в основе первых лежала линейная алгебра, в основе вторых — теория групп.

Всё это — различные пути и подходы к введению в алгебру некоммутативного умножения, которое, как я уже сказал, столь обыденно в алгебраическом аппарате XX века. Мы об этом не думаем, но в XIX веке все предыдущие примеры были, каждый по-своему, колоссальными прорывами. Разумеется, с разных сторон совершенно неожиданно пришли приложения этих идей. Применение матриц и некоммутативного умножения в физике пришло с квантовой теорией. Самый важный пример существенного применения некоммутативной алгебры в физике — это коммутационные соотношения Гейзенберга, развитые затем фон Нейманом в его теорию операторных алгебр.

Теория групп также была важнейшим элементом математики XX века, и к этому я вернусь позже.

От линейного к нелинейному

Моя следующая тема — переход от линейного к нелинейному. Большие разделы классической математики либо существенно линейны, либо если не совсем линейны, то приблизительно линейны и изучаются посредством соответствующих возмущений. Подлинно нелинейные явления гораздо сложнее, и ими по-настоящему серьезно занялись лишь в нашем столетии.

Этот сюжет начинается с геометрии: сначала — евклидова геометрия, геометрия плоскости, пространства, прямых линий, всё — линейное; а затем через ряд вариантов неевклидовой геометрии происходит переход к римановой геометрии, более общей, где объекты существенно нелинейны. В дифференциальных уравнениях при серьезном изучении нелинейных процессов вы сталкиваетесь с целым набором новых явлений, которых вы не увидите в классической области. Здесь я бы отметил лишь два: солитоны и хаос, — два очень разных элемента теории дифференциальных уравнений, которые стали особенно заметными и популярными в нашем столетии. Они представляют собой противоположные крайности. Солитоны представляют неожиданно организованное поведение нелинейных дифференциальных уравнений, а хаос — неожиданно дезорганизованное. Оба явления присутствуют при различных режимах процесса, и оба интересны и важны, но это принципиально нелинейные явления. И здесь вы можете проследить вплоть до последней четверти XIX века раннюю историю работ по солитонам, но они малозаметны.

Что касается физики, то, конечно, уравнения Максвелла (основные уравнения теории электромагнетизма) являются линейными уравнениями в частных производных. В противоположность им знаменитые уравнения Янга — Миллса нелинейны, а эти уравнения, как предполагается, управляют силами, ответственными за структуру материи. Уравнения Янга — Миллса нелинейны, так как это по существу матричный вариант уравнений Максвелла и нелинейный член возникает из-за того, что матрицы не коммутируют. Так что мы видим здесь интересную связь между нелинейностью и некоммутативностью. Некоммутативность порождает нелинейность определенного рода, и это очень интересно и важно.

Геометрия против алгебры

Пока что я коснулся лишь некоторых общих тем. Теперь я хочу поговорить о дихотомии в математике, которая всё время была с нами, то отступая, то выходя на первый план; она дает мне возможность сделать некоторые философские обобщения и замечания. Я имею в виду дихотомию между геометрией и алгеброй. Геометрия и алгебра — это две формальные опоры математики, обе весьма древние. Геометрия восходит к грекам и к более ранним временам; алгебра восходит к арабам и индийцам, так что обе эти ветви играли в математике фундаментальную роль, но их взаимоотношения были непросты.

Позвольте начать с истории вопроса. Евклидова геометрия была первым примером математической теории, и она оставалась строго геометрической, пока Декарт не ввел алгебраические координаты на объекте, который теперь называется декартовой плоскостью. Это была попытка свести геометрическое мышление к алгебраическим манипуляциям. Разумеется, это был огромный прорыв — или большая атака на геометрию со стороны алгебраистов. Если в области анализа сопоставить работы Ньютона и Лейбница, то они принадлежат разным традициям: Ньютон был по существу геометр, Лейбниц — по существу алгебраист; и для этого были веские, глубокие причины. Для Ньютона геометрия, как и развитый им анализ, — это попытка математически описать законы природы. Он имел дело с физикой в широком смысле слова, а физика существовала в мире геометрии. Если вы хотели понять, как устроены вещи, вы мыслили в терминах физического мира, в терминах геометрических картин. Когда Ньютон развивал анализ, он хотел придать ему такой вид, чтобы насколько возможно приблизиться к физическому контексту, стоявшему за ним. Поэтому Ньютон использовал геометрические рассуждения, так как это позволяло не удаляться от исходного смысла. С другой стороны, Лейбниц имел цель, и честолюбивую цель, формализовать всю математику, превратив ее в большую алгебраическую машину. Это было прямо противоположно подходу Ньютона. При этом они использовали совершенно различные обозначения. Как мы знаем, в большом споре между Ньютоном и Лейбницем победили обозначения Лейбница. Мы обозначаем производные, следуя его способу. Дух Ньютона по-прежнему присутствует там, но он был погребен на долгое время.

В конце XIX века, сто лет назад, двумя главными фигурами были Пуанкаре и Гильберт. Я уже упоминал о них, и они были, говоря нестрого, последователями Ньютона и Лейбница соответственно. Мысль Пуанкаре развивалась больше в духе геометрии, топологии, используя их идеи как интуитивную основу. Гильберт был больше формалист, он хотел аксиоматизировать, формализовать и представлять в строгом формальном виде. Они несомненно принадлежат разным традициям, хотя великого математика всегда нелегко классифицировать.

Готовя это выступление, я подумал, что следовало бы включить в перечень и некоторые имена из нашего нынешнего поколения, принадлежащие продолжателям этих традиций. О ныне живущих людях говорить очень трудно — кого из них включить в перечень? Потом я подумал: кто стал бы возражать, оказавшись на любой из сторон этого замечательного перечня? В итоге были выбраны два имени: Арнольд как наследник традиции Пуанкаре – Ньютона и Бурбаки в качестве, я думаю, наиболее известного последователя Гильберта. Невозможно усомниться, что взгляд Арнольда на механику и физику заключается в том, что они по сути геометричны, если вернуться к Ньютону; всё, что было в промежутке — если исключить немногих людей вроде Римана, который несколько выпадает из общего ряда, — явилось ошибкой. Бурбаки попытался выполнить в значительном объеме формалистскую программу Гильберта по аксиоматизации и формализации математики и достиг определенного успеха. Каждая точка зрения имеет свои достоинства, но между ними существует напряжение.

Позвольте пояснить мой собственный взгляд на различие между геометрией и алгеброй. Геометрия, разумеется, является наукой о пространстве; здесь нет вопроса. Если я смотрю на присутствующих в этом помещении, я вижу сразу многих; за одну-единственную секунду или микросекунду я могу вобрать громадное количество информации, и это, конечно, не случайно. Наш мозг устроен таким образом, что он тесно связан со зрением. Зрение, как я узнал от друзей, работающих в нейрофизиологии, использует где-то около 80 или 90 процентов коры мозга. В мозгу имеется около 17 различных центров, каждый из которых специализирован на определенной части процесса зрения: одни центры имеют дело с вертикальным, другие с горизонтальным, третьи — с цветом, перспективой, некоторые, наконец, — со смыслом и интерпретацией. Понимание и осмысление мира, который мы видим, явилось очень важной частью нашей эволюции. Поэтому пространственная интуиция и пространственное восприятие составляют необыкновенно мощное орудие, и вот почему геометрия реально является столь мощной ветвью математики — не только в вещах, явно геометрических, но даже в тех, которые такими не выглядят. Мы пытаемся придать им геометрическую форму, поскольку это позволяет использовать нашу интуицию. Наша интуиция — это наше самое могучее орудие. Это становится очевидным, когда вы пытаетесь объяснить какой-то математический вопрос студенту или коллеге. Вы проводите долгое, трудное рассуждение, и наконец студент понимает. Что же студент говорит? Студент говорит: «Вижу!» Видение — синоним понимания, и мы применяем слово «восприятие» для обозначения и того, и другого. По крайней мере это верно для английского языка. Интересно было бы сравнить, как обстоит дело в других. Я считаю очень существенным, что развитие человеческого мозга придало ему такую колоссальную емкость, позволяющую усваивать громадное количество информации за мгновенный зрительный акт, и математика использует и совершенствует эту способность.

С другой стороны, алгебра (и, возможно, вы не думали о ней подобным образом) существенно связана с временем. Каким бы разделом алгебры вы ни занимались, выполняется последовательность операций — одна за другой, а «одна за другой» означает, что вам пришлось иметь дело с временем. В статичном мире невозможно вообразить себе алгебру, но геометрия по существу статична. Я могу просто сидеть здесь и смотреть, и пусть ничего не меняется, но я всё же могу смотреть. Алгебра, однако, связана со временем, поскольку вы имеете дело с операциями, выполняемыми последовательно, причем говоря «алгебра», я подразумеваю не только современную алгебру. Любой алгоритм, любой процесс вычисления — это последовательность шагов, выполняемых один за другим; современный компьютер делает это вполне очевидным. Современный компьютер получает информацию в виде потока нулей и единиц и выдает ответ.

Алгебра имеет дело с действиями во *времени*, а геометрия — с *пространством.* Это два ортогональных аспекта нашего мира, и им соответствуют две различные точки зрения в математике. Так что дискуссия или диалог между математиками прошлого об относительном значении геометрии и алгебры представляет собой нечто очень, очень важное.

Разумеется, не стоило бы думать об этом как о дискуссии, в которой одна сторона проигрывает, а другая выигрывает. Я люблю представлять это с помощью аналогии: «Следует ли быть алгебраистом или геометром?» похоже на вопрос «Предпочли бы вы быть глухим или слепым?». Если вы слепы, вы не видите пространство; если же вы глухи, вы не слышите, а слышание происходит во времени. В общем, мы предпочитаем иметь обе способности.

В физике существует приблизительно аналогичное разграничение между концепциями и экспериментами. Физику составляют две части: теория — концепции, идеи, слова, законы — и экспериментальный аппарат. Я считаю, что концепции в широком смысле слова геометричны, поскольку они относятся к тому, что происходит в реальном мире. Эксперимент, с другой стороны, больше напоминает алгебраическое вычисление. Вы что-то делаете во времени; вы измеряете какие-то величины; вы подставляете их в формулы, но основные концепции, стоящие за экспериментами, составляют часть геометрической традиции.

Можно было бы включить эту дихотомию в философский и литературный контекст, сказав, что алгебра для геометра — это «искушение Фауста». Как вы знаете, дьявол в трагедии Гёте предлагает Фаусту всё, что тот пожелает (в данном случае — любовь прекрасной женщины), в обмен на продажу его души. Алгебра — это дьявольское искушение математика. Дьявол говорит: «Я дам тебе эту мощную машину, она ответит на любой вопрос, какой пожелаешь. Всё, что от тебя требуется, — отдать мне свою душу: откажись от геометрии, и ты получишь эту чудесную машину.» (Ныне вы можете понимать под ней компьютер!) Конечно, мы предпочитаем иметь и то, и другое; вероятно, мы бы захотели обмануть дьявола: сделать вид, что продаем свою душу, и не отдать ее. Тем не менее опасность для нашей души здесь есть, поскольку, начиная алгебраическое вычисление, вы по существу перестаете думать; вы перестаете думать геометрически, вы перестаете думать о смысле.

Я тут несколько суров к алгебраистам, но по существу цель алгебры всегда состояла в построении формулы, которую можно заложить в машину, повернуть рукоятку и получить ответ. Вы взяли нечто, имевшее смысл; вы превратили его в формулу и извлекли ответ. При такой процедуре вам больше не нужно думать о том, чему соответствуют в геометрии отдельные этапы алгебраической выкладки. Вы теряете интуитивное понимание, и это может оказаться важным в разные моменты. Вы не должны полностью отказываться от интуиции! Возможно, позже вы захотели бы вернуться к ней. Вот что я понимаю под искушением Фауста. Я уверен в его коварстве.

Эта дихотомия между геометрией и алгеброй породила гибриды, в которых они смешиваются, и разделение между алгеброй и геометрией не столь прямолинейно и наивно, как я только что говорил. Например, алгебраисты часто пользуются диаграммами. Что такое диаграмма, как не уступка геометрической интуиции?

Технические приемы в целом

Теперь позвольте перейти к темам, которые относятся не столько к содержанию математики, а скорее к используемым техническим приемам и методам. Я хочу описать несколько общих методов, применяемых в целом ряде областей.

Теория гомологий. По традиции, теорию гомологий трактуют как ветвь топологии. Она имеет дело со следующей ситуацией. У вас есть топологическое пространство со сложной структурой, и вы хотите извлечь из нее некие простые сведения относительно подсчета дыр или чего-то подобного, какие-то аддитивные линейные инварианты, которые можно связать с пространством сложной структуры. Вы конструируете, если угодно, линейные инварианты в нелинейной ситуации. Говоря геометрически, вы рассуждаете о циклах, которые можно складывать и вычитать, и тогда получается то, что называется группой гомологий пространства. Гомология — это важный алгебраический инструмент, который был введен в первой половине века ради получения информации о топологических пространствах. Из геометрии была извлечена некая алгебра.

Гомология появляется и в других контекстах. Второй исток теории гомологий восходит к Гильберту и изучению многочленов. Многочлены как функции нелинейны, и их можно перемножать, переходя к более высоким степеням. Глубокая идея Гильберта состояла в том, чтобы рассматривать «идеалы», линейные комбинации многочленов с общими нулями. Он искал образующие этих идеалов. Множества этих образующих могут оказаться избыточными. Гильберт искал соотношения между образующими, а затем — соотношения между соотношениями. Он получил иерархию таких соотношений, которые были названы «гильбертовыми сизигиями», и эта теория Гильберта открыла путь, весьма неочевидный, для попыток свести нелинейную ситуацию — изучение многочленов — к линейной. По существу Гильберт построил сложную систему линейных соотношений, которая заключала в себе некоторые сведения о нелинейных объектах — многочленах.

Эта алгебраическая теория на самом деле аналогична упомянутой топологической, и ныне они сплавились в то, что называется «гомологической алгеброй». В алгебраической геометрии одним из великих триумфов

1950-х годов стало развитие когомологической теории пучков и ее распространение в аналитическую геометрию трудами французской школы Лере, Картана, Серра и Гротендика. Тут мы встречаем комбинацию из топологических идей Римана — Пуанкаре, алгебраических идей Гильберта и некоторой дозы анализа, добавленной для баланса.

Оказывается, теория гомологий имеет и еще более широкие приложения, а именно в других ветвях алгебры. Можно вводить группы гомологий, которые всегда представляют собой линейные объекты, сопоставляемые нелинейным. Возьмите группы, например конечные, или алгебры Ли: и тем, и другим сопоставляются группы гомологий. Важные применения теории гомологий имеются в теории чисел, через посредство группы Галуа. Таким образом, теория гомологий оказалась одним из мощнейших инструментов для анализа целого ряда ситуаций, характерным явлением в математике XX века.

K-ТЕОРИЯ. Более позднее происхождение имела другая теория, во многих отношениях весьма похожая на теорию гомологий; она получила широкие приложения и проникла во многие разделы математики. Эта теория появилась лишь в середине XX века, хотя ее корни можно обнаружить много раньше. Она называется «K-теорией» и в действительности тесно связана с теорией представлений. Теория представлений, скажем, конечных групп восходит к прошлому веку, но ее современная форма, K-теория, имеет более позднее происхождение. K-теорию можно рассматривать также как попытку, исходя из теории матриц (в которой умножение не коммутативно), построить абелевы или линейные инварианты матриц. Следы, размерности, определители — это абелевы инварианты в теории матриц, а K-теория — это способ систематизировать работу с ними; иногда ее называют «стабильной линейной алгеброй». Идея этой теории состоит в том, что если матрицы A и B не коммутируют, то они станут коммутировать, когда вы поместите их в ортогональные позиции в двух разных блоках большой матрицы. Так как предметы в большом пространстве можно переставлять, то, рассуждая нестрого, можно надеяться, что этого уже окажется достаточно для получения некоторой информации. Это и составляет основу K-теории как метода. Аналогия между K-теорией и теорией гомологий состоит в том, что обе они пытаются извлечь линейную информацию из сложных нелинейных ситуаций.

В алгебраической геометрии эту идею впервые развил с замечательным успехом Гротендик, в тесной связи с только что обсуждавшейся темой, а именно с теорией пучков, и со своими работами по теореме Римана — Роха.

В топологии Хирцебрух и я восприняли эти идеи и применили их в чисто топологическом контексте. В том смысле, в каком работы Гротендика связаны с работами Гильберта по сизигиям, наши результаты больше связаны с результатами Римана и Пуанкаре по гомологиям, причем вместо многочленов фигурируют непрерывные функции. Наши работы сыграли также роль в теории индекса эллиптических линейных операторов.

С другой стороны, алгебраический аспект этой темы с потенциальными приложениями к теории чисел был развит Милнором, Квилленом и другими авторами. На этом направлении возникло много интересных вопросов.

В функциональном анализе благодаря работам многих авторов, в частности Каспарова, непрерывная K-теория была распространена на некоммутативные C^*-алгебры. Непрерывные функции, определенные на всем пространстве, образуют коммутативную алгебру относительно умножения, но в других ситуациях возникают ее некоммутативные аналоги, и функциональный анализ оказывается весьма естественной средой для вопросов такого рода.

Итак, K-теория — это еще одна область, где целый ряд различных разделов математики находит для себя достаточно простой формализм, хотя в каждом случае имеются весьма трудные технические вопросы, специфичные для данного предмета и связанные с другими его аспектами. Этот инструмент не универсален; скорее это универсальная схема, с аналогиями и сходством между различными случаями.

Ален Коннес перенес многие из этих результатов в «некоммутативную дифференциальную геометрию».

Заслуживает внимания, что совсем недавно Виттен в работах по теории струн (новейшему направлению в теоретической физике) обнаружил очень интересные способы, как сделать K-теорию естественной средой для так называемых «сохраняющихся величин». Тогда как раньше считалось, что естественным контекстом для них является теория гомологий, теперь представляется, что K-теория обеспечивает лучшие результаты.

Группы Ли. Другое обобщающее понятие, и оно не является чисто техническим, — это группы Ли. В целом группы Ли, под которыми в первую очередь понимаются ортогональные, унитарные и симплектические группы вместе с некоторыми исключительными, сыграли очень важную роль в истории математики XX века. Опять-таки они известны с XIX века. Как известно, Софус Ли был норвежским математиком XIX столетия, и он, Феликс Клейн и другие авторы значительно продвинули «теорию непрерывных групп», как она называлась. Для Клейна первоначально это был путь к объединению различных типов геометрии — евклидовой и неевклидовой. Хотя эта тема возникла в девятнадцатом веке, она достигла подлинного завершения в двадцатом. Двадцатый век прошел под знаком полного господства теории групп Ли как своего рода единой схемы для изучения многих вопросов.

Я уже отметил роль идей Клейна в геометрии. Клейн понимал геометрии как однородные пространства, в которых можно перемещать предметы без искажения, и потому геометрии определяются соответствующими группами изометрий. Группа евклидовых движений дает евклидову геометрию; гиперболическая геометрия порождается другой группой Ли. Таким образом, каждая однородная геометрия соответствует иной группе Ли. Но последующие авторы, развивая геометрические работы Римана, стали больше заниматься неоднородными геометриями, где кривизна меняется от точки к точке и пространство не имеет глобальных симметрий. Тем не менее группы Ли всё еще играли фундаментальную роль, поскольку они появляются на инфинитезимальном уровне, благодаря тому что в касательном пространстве имеются евклидовы координаты. Поэтому в касательном пространстве теория групп Ли возникает снова, в бесконечно малом масштабе, но так как нужно сопоставлять различные точки в различных местах, то нужно перемещать предметы и при этом использовать различные группы Ли. Соответствующую теорию развил Эли Картан, и она служит основой современной дифференциальной геометрии. Эта схема оказалась существенной и в теории относительности Эйнштейна. Разумеется, теория Эйнштейна сильно стимулировала развитие всей дифференциальной геометрии.

В ходе двадцатого столетия упомянутый выше глобальный подход привел к изучению групп Ли и дифференциальной геометрии на глобальном уровне. Его важное направление, представленное работами Бореля и Хирцебруха, дало информацию о так называемых «характеристических классах». Это топологические инварианты, которые связывают три ключевых раздела математики: группы Ли, дифференциальную геометрию и топологию.

В направлении, более близком к анализу, мы получаем, как теперь говорят, некоммутативный гармонический анализ. Он обобщает теорию Фурье, в которой ряды и интегралы Фурье по существу соответствуют коммутативным группам Ли на окружности и на прямой. Если заменить их более сложными группами Ли, мы получаем очень красивую и тонко разработанную теорию, которая связывает теорию представлений групп Ли с анализом. Это было основным делом жизни Хариш-Чандры.

Что касается теории чисел, то вся «программа Лэнглендса», как ее называют, будучи тесно связана с теорией Хариш-Чандры, реализуется в рамках теории групп Ли. Каждой группе Ли соответствует своя теория чисел и своя программа Лэнглендса, осуществленная в той или иной степени. Это повлияло на многие работы в алгебраической теории чисел второй половины нашего столетия. В эту тему вписывается и изучение модулярных форм, включая доказательство Эндрю Уайлзом последней теоремы Ферма.

Можно было бы подумать, что группы Ли по-настоящему важны лишь в геометрическом контексте из-за необходимости непрерывного изменения, но их аналоги над конечными полями приводят к конечным группам, и таким путем возникает большинство конечных групп. Таким образом, методы некоторых разделов теории Ли применимы даже в дискретной ситуации — для конечных или локальных полей. Здесь много работ, относящихся к чистой алгебре; например, работы, связанные с именем Георга Люстига, где изучается теория представлений таких конечных групп и встречаются аналоги многих методов, упомянутых выше.

Конечные группы. Это приводит нас к конечным группам и напоминает мне: в связи с классификацией конечных простых групп я должен признаться в следующем. Несколько лет назад я дал интервью; в то время классификация конечных простых групп подходила к концу, и меня спросили, чтó я об этом думаю. Я опрометчиво сказал, что не считаю ее особенно важной. Причина состояла в том, что, как показала эта классификация, бóльшую часть простых групп мы уже знали раньше, и перечень исключений был невелик. В некотором смысле это завершало тему, не открывая чего-то существенно нового. Когда сфера деятельности закрывается, вместо того чтобы расширяться, я не очень переживаю, но, конечно, многие мои друзья, работающие в этой области, были очень и очень сердиты. После этого мне надо было носить нечто вроде пуленепробиваемого жилета!

Здесь нашлось спасительное исключение. В действительности я отметил, что в списке так называемых «спорадических групп» самая большая получила имя «Монстра». Я считаю, что именно открытие этого Монстра явилось самым впечатляющим результатом классификации. Оказывается, Монстр — крайне интересный зверь, и еще не совсем понятый. Здесь обнаруживаются неожиданные связи с другими большими разделами математики — с эллиптическими модулярными функциями и даже с теоретической физикой, например с квантовой теорией поля. Это оказалось интересным побочным следствием классификации. Сами по себе классификации, как я сказал, закрывают дверь; но Монстр ее открыл.

Воздействие физики

Теперь позвольте перейти к другой теме, а именно воздействию физики. На протяжении веков физика была связана с математикой, и обширные разделы математики, как например исчисление бесконечно малых, развивались ради решения задач физики. Возможно, в середине XX века это стало менее очевидным, поскольку бо́льшая часть чистой математики весьма успешно развивалась независимо от физики, но в последней четверти столетия положение вещей драматически изменилось. С вашего позволения, я попробую кратко осветить взаимодействие физики с математикой, и в частности с геометрией.

В XIX веке Гамильтон усовершенствовал классическую механику, введя в нее формализм, ныне называемый гамильтоновым. Классическая механика породила то, что мы называем «симплектической геометрией». Эта ветвь геометрии могла бы развиться и много раньше, но фактически ее серьезное исследование началось в последние два десятилетия. Она оказалась весьма богатым по содержанию разделом геометрии. Геометрия в том смысле, в каком я здесь употребляю это слово, имеет три ветви: риманову геометрию, комплексную и симплектическую, соответственно трем типам групп Ли. Среди них симплектическая геометрия — наиболее новый раздел и, возможно, в некотором смысле наиболее интересный. Во всяком случае, он чрезвычайно тесно связан с физикой в силу обстоятельств своего развития в связи с гамильтоновой механикой, а позднее — в связи с квантовой механикой.

Далее, уравнения Максвелла, уже упоминавшиеся мной, основные линейные уравнения электромагнетизма, стимулировали работы Ходжа по гармоническим формам и их приложение к алгебраической геометрии. Эта теория оказалась необычайно плодотворной и подвела фундамент под многое сделанное в геометрии начиная с 1930-х годов.

Я уже говорил об общей теории относительности и работах Эйнштейна. Разумеется, огромный вклад внесла квантовая механика, не только в связи с коммутационными соотношениями, но, что более существенно, выявив значение гильбертова пространства и спектральной теории.

Более конкретной и очевидной была связь кристаллографии в ее классическом виде с симметриями кристаллических структур. Конечные группы симметрий, возникающие на точечных множествах, изучались в первую очередь из-за приложений в кристаллографии. В нашем столетии оказалось, что в физике возможны и более глубокие приложения теории групп. У элементарных частиц, из которых, как считается, состоит материя, обнаружились скрытые симметрии в самом малом масштабе; там прячутся группы Ли, вы не можете их видеть, но при изучении реального поведения частиц эти симметрии становятся явными. И вы формулируете модель, в которой симметрия играет существенную роль; в различные распространенные сейчас теории в качестве изначальных групп симметрий встроены широко известные группы Ли вроде $SU(2)$ или $SU(3)$. Таким образом, эти группы Ли выступают в качестве строительных блоков материи.

При этом появляются не только компактные группы Ли. В физике встречаются и определенные некомпактные группы, например, группа Лоренца. Именно физики первыми начали изучать теорию представлений некомпактных групп Ли. Эти представления должны реализоваться в гильбертовом пространстве, поскольку неприводимые представления компактных групп конечномерны, а некомпактные группы требуют бесконечной размерности, и именно физики первыми это осознали.

В последней четверти XX века, которую мы только что завершили, произошло настоящее нашествие новых идей из физики в математику. Возможно, это одно из наиболее замечательных событий всего столетия. Наверное, ему следовало бы посвятить отдельную лекцию, но главное здесь — выдающееся влияние квантовой теории поля и теории струн, породившее новые результаты, идеи и методы во многих разделах математики. Я здесь имею в виду, что физики смогли предсказать некоторые математические факты, основываясь на своем понимании физической теории. Конечно, это не были строгие доказательства, но они опирались на очень мощный фундамент из интуиции, частных случаев и аналогий. Эти результаты, предсказанные физиками, в свое время были вновь проверены математиками и оказались по существу верными, даже несмотря на то, что доказать их трудно и многие из них еще не доказаны полностью.

Итак, в этом направлении за последние 25 лет имеется огромное продвижение. Результаты носят очень детализированный характер. Физики не просто говорят: «Вот это должно быть правильно». Они говорят: «Вот точная формула, а вот первые десять случаев (где встречаются числа более чем с 12 знаками)». Они дают точные ответы на сложные вопросы, а не какие-то догадки; ответы, которые можно вычислить только на компьютере. Квантовая теория поля оказалась замечательным инструментом, очень трудным в математическом смысле, но неожиданно ценным в смысле приложений. Это действительно захватывающая тема последних 25 лет.

Вот некоторые составляющие этой темы: работы Доналдсона по четырехмерным многообразиям; работы Воэна Джонса по инвариантам узлов; зеркальная симметрия, квантовые группы; и для полноты я уже упомянул Монстра.

Каков предмет всего этого? Как я уже упоминал, двадцатый век увидел рост числа измерений, кончившийся бесконечностью. Физики пошли дальше. В квантовой теории они фактически пытаются весьма подробно исследовать бесконечномерное пространство в глубину. Бесконечномерные пространства, с которыми они имеют дело, — это обычно функциональные пространства разного рода. Они очень сложно устроены, не только из-за бесконечной размерности, но сложна и их алгебра, а также геометрия и топология, и с ними связаны большие группы Ли — бесконечномерные группы Ли. И так же как большие разделы математики XX века связаны с развитием геометрии, топологии, алгебры и анализа на конечномерных группах Ли и многообразиях, эта часть физики связана с аналогичными исследованиями в бесконечных размерностях; это, конечно, совсем другая история, — но с огромными результатами.

Позвольте пояснить это чуть подробнее. В квантовых теориях поля дело происходит в пространстве и времени; пространство считается в действительности трехмерным, но существуют упрощенные модели, в которых рассматривается одно измерение. В одномерном пространстве и одномерном времени физики обычно встречаются, говоря математически, с такими группами, как группа диффеоморфизмов окружности или группа дифференцируемых отображений окружности в компактную группу Ли. Два этих важнейших примера бесконечномерных групп Ли появляются в квантовых теориях поля при рассмотрении таких размерностей, и это вполне осмысленные математические объекты, которые уже некоторое время изучаются математиками.

В таких (1+1)-мерных теориях можно в качестве пространства-времени взять риманову поверхность, и это приводит к новым результатам. Например, пространство модулей римановых поверхностей данного рода — это классический объект, восходящий к девятнадцатому веку. Квантовая теория поля привела к новым результатам относительно когомологий этих пространств модулей. Другое довольно похожее пространство модулей связано с плоскими G-расслоениями над римановой поверхностью рода g. Эти пространства очень интересны, и квантовая теория поля дает для них точные результаты. В частности, имеются замечательные формулы для объемов, где используются значения дзета-функций.

Другое приложение таких теорий связано с подсчетом кривых. Допустим, вы рассматриваете плоские алгебраические кривые данной степени и данного типа и, например, хотите знать, сколько из них проходят через такое-то множество точек. Тогда вы сталкиваетесь с перечислительными проблемами алгебраической геометрии, которые были классическими в прошлом веке. Они очень трудны. Они были решены с помощью современного аппарата, который называется «квантовая когомология», и это тоже часть сюжета, берущего начало в квантовой теории поля. Можно рассмотреть и более трудные вопросы, относящиеся к кривым не на плоскости, а на искривленных многообразиях. Это другая замечательная история с конкретными результатами, известная под названием зеркальной симметрии. Всё это возникает из квантовой теории поля в размерности $1 + 1$.

Если добавить одно измерение, получив двумерное пространство и одномерное время, то здесь появляется теория инвариантов узлов, принадлежащая Воэну Джонсу. Она получила изящное объяснение — или истолкование — в терминах квантовой теории поля.

Отсюда же возникают и так называемые «квантовые группы». В них особенно занятно название. Это, бесспорно, не группы! Если вы попросите меня дать определение квантовой группы, мне потребуется еще полчаса. Это сложные объекты, но нет сомнения, что они глубоко связаны с квантовой теорией. Они возникли из физики, а ныне реально применяются даже строгими алгебраистами, которые используют их при определенных вычислениях.

Если мы сделаем еще один шаг, перейдя к полноразмерной теории (три измерения плюс одно), то именно ей соответствует теория четырехмерных многообразий Доналдсона, и именно такая теория поля оказала наибольшее воздействие на математику. Например, она привела Зейберга и Виттена к построению альтернативной теории, которая основана на физической интуиции, но дает и великолепные математические результаты. Всё это — отдельные примеры. Есть и много других.

Еще есть теория струн, и это уже пройденный этап! Необходимо сказать и о M-теории; она богата содержанием и также имеет целый ряд математических аспектов. Полученные здесь результаты еще до конца не усвоены и долго не оставят математиков без работы.

Историческое резюме

А теперь позвольте подвести краткий итог. Позвольте взглянуть на историю в целом: что же произошло в математике? Не стремясь к строгости, я бы соединил XVIII и XIX столетия, назвав это эрой классической математики; в эту эпоху, связанную для нас с Эйлером и Гауссом, создавалась и развивалась вся великая классическая математика. Можно было подумать, что наступает конец математики, но XX век оказался, наоборот, по-настоящему плодотворным. Об этом я и говорил здесь.

Говоря нестрого, XX век можно разделить на две половины. Мне представляется, что первая половина по преимуществу являлась, как я это называю, «эпохой специализации». В эту эпоху был очень влиятелен подход Гильберта: пытаться всё формализовать, аккуратно определить, а затем последовательно делать в каждой области всё, что возможно. С этой тенденцией, как я сказал, ассоциируется имя Бурбаки; здесь внимание сосредоточено на том, чтó вы можете сделать в данное время в рамках определенных систем, алгебраических или иных. Вторая половина

XX века в гораздо большей мере стала, как я бы выразился, «эпохой объединения», когда границы нарушаются, методы переносятся из одной области в другую и идет колоссальное скрещивание. Наверное, это сверхупрощение, но я думаю, что оно кратко выражает некоторые аспекты развития математики в XX веке.

Что же можно сказать о XXI веке? Я уже говорил, что XXI век может стать эпохой квантовой математики или, если угодно, бесконечномерной математики. Что это могло бы означать? Квантовая математика означает, в широком смысле, «подлинное понимание анализа, геометрии, топологии, алгебры в различных нелинейных функциональных пространствах», а «подлинное понимание» для меня означает, что найдены вполне строгие доказательства всех тех замечательных фактов, о которых размышляли физики.

Надо сказать, что если вы подходите к бесконечной размерности наивно и задаете наивные вопросы, то обычно вы получаете неверные ответы, либо же эти ответы оказываются глупыми. Интуиция, применения и мотивировки, связанные с физикой, позволили физикам задать разумные вопросы о бесконечной размерности и сделать весьма тонкие вещи, которые *приводят* к осмысленным ответам. Так что этот путь разработки бесконечного анализа отнюдь не прост. Здесь необходимо действовать разумно. У нас в руках множество нитей. Перед нами лежит карта: вот что следует сделать, но путь еще долог.

Что еще может произойти в XXI веке? Я бы хотел отметить некоммутативную дифференциальную геометрию Коннеса. Эта великолепная обобщающая теория создана Аленом Коннесом. Здесь опять соединяется всё. Соединяется анализ, алгебра, геометрия, топология, физика, теория чисел, и всё это вносит свой вклад. Эта схема позволяет делать в контексте некоммутативного анализа то, что обычно делают дифференциальные геометры, включая взаимодействие с топологией. Есть веские причины, чтобы хотеть это сделать: приложения (возможные или нет) в теории чисел, геометрии, дискретных группах и т.д., а также в физике. Сейчас как раз исследуется интересная взаимосвязь с физикой. Как далеко это пойдет, чего удастся достичь — это еще предстоит увидеть. Я определенно ожидаю значительного развития этой области по крайней мере в первом десятилетии следующего столетия; может быть, здесь появится связь с так и не построенной до сих пор (строгой) квантовой теорией поля.

Двигаясь в другом направлении, мы находим так называемую «арифметическую геометрию» или геометрию Аракелова, которая стремится объединить как можно больше из алгебраической геометрии и некоторых разделов теории чисел. Это очень плодотворная теория. Она хорошо начала, но впереди еще долгий путь. Кто знает?

Конечно, все эти направления соприкасаются. Я ожидаю, что физика распространит свое влияние повсюду, даже в теорию чисел; Эндрю Уайлз не согласен, и только время даст ответ.

Вот контуры, которые я могу различить в предстоящем десятилетии, но есть и нечто такое, что́ я называю джокером в колоде: спуск в геометрию малых размерностей. Рядом со всей бесконечномерной фантастикой геометрия малых размерностей приводит в смущение. Размерности, с которых мы начинали, с которых начинали наши предшественники, во многих отношениях остаются загадкой. Мы называем «малыми» размерности 2, 3 и 4. Вот пример: работы Тёрстона по трехмерной геометрии направлены на классификацию геометрий, которые можно реализовать на трехмерных многообразиях. Эта теория гораздо глубже двумерной. Программа Тёрстона еще отнюдь не завершена, и ее осуществление, несомненно, стало бы крупнейшим успехом.

Другой замечательный трехмерный сюжет — это работы Воэна Джонса, чьи идеи по существу пришли из физики. Они дают новую информацию о трехмерном случае, почти ортогональную к той, которая содержится в программе Тёрстона. Как связать вместе эти два сюжета — остается труднейшей проблемой, но недавно появились намеки на возможность моста. Так что вся эта область, не выходящая за пределы малых размерностей, тоже имеет связи с физикой, но при этом остается по-настоящему загадочной.

Наконец, я хотел бы отметить, что в физике весьма заметную роль играют «двойственности». Эти двойственности, вообще говоря, появляются тогда, когда квантовая теория имеет две разные реализации в классическом случае. Простой пример — двойственность между положением и импульсом в классической механике. При этом пространство заменяется двойственным к нему, и в линейных теориях эта двойственность — не что иное, как преобразование Фурье. Но чем заменить преобразование Фурье в нелинейных теориях — трудная проблема. Большие разделы математики связаны с обобщением двойственностей на нелинейные ситуации. Похоже, что физики замечательно умеют это делать в теориях струн и в M-теории. Здесь один за другим появляются примеры удивительных двойственностей, которые служат в широком смысле бесконечномерными нелинейными вариантами преобразований Фурье и, похоже, работают. Но понимание этих нелинейных двойственностей также представляется одной из больших задач следующего столетия.

Наверное, мне следует здесь остановиться. Работы много, и старому человеку вроде меня очень приятно говорить об этом с множеством молодых людей вроде вас; очень приятно, что я могу сказать вам: в следующем столетии для вас найдется много работы!