Классификация многогранников Кокстера

В. О. Бугаенко

Многогранники Кокстера — это многогранники, все двугранные углы которых являются целыми частями[1] π. Как было объяснено в статье [5], эти многогранники связаны с дискретными группами отражений, которые играют важную роль в различных областях математики. Настоящая статья посвящена классификации таких многогранников.

Вопрос о классификации многогранников Кокстера может быть естественным образом поставлен в любом из трех типов пространств постоянной кривизны: сферическом S^n, евклидовом E^n и Лобачевского L^n. Первым начал изучать эти многогранники выдающийся геометр XX века Г. С. М. Кокстер, по имени которого они и были названы. В 1934 году он получил полную классификацию многогранников Кокстера в сферических и евклидовых пространствах [10]. Все они являются либо симплексами на сферах, либо прямыми произведениями симплексов и симплициальных конусов в евклидовых пространствах.

Задача изучения многогранников Кокстера в пространствах Лобачевского была впервые поставлена Э. Б. Винбергом в 1967 году [3]. Такие многогранники могут иметь сложное комбинаторное строение, и их классификация, подобная евклидовому и сферическому случаям, невозможна.

В настоящей статье мы будем следовать хронологии событий. Сначала рассмотрим сферический и евклидов случаи, при этом получим кокстеровскую классификацию. В параграфе 5 мы перейдем к случаю пространств Лобачевского. Будут приведены способ описания и примеры многогранников Кокстера в L^n, а также обзор некоторых результатов по их классификации.

1. Выпуклые многогранники в евклидовых и сферических пространствах

Определение. *Конечным выпуклым многогранником* (в любом из трех типов пространств постоянной кривизны) называется пересечение

[1] Как и в статье [5], под целой частью π мы понимаем число вида π/k, где k — натуральное число.

конечного семейства полупространств, содержащее непустое открытое множество.

Для простоты мы будем говорить просто «многогранник», опуская слова «конечный» и «выпуклый», поскольку бесконечных или невыпуклых многогранников мы рассматривать не будем.

Будем предполагать, что никакое полупространство семейства не содержит пересечения остальных (в противном случае его можно исключить из семейства, не изменив всего пересечения). Тогда семейство полупространств однозначно определяется по многограннику. Полупространства, входящие в это семейство, будем называть *определяющими многогранник.*

Границы полупространств, определяющих многогранник, называются *гиперплоскостями граней*, а их пересечения с многогранником — его *гранями старшей размерности* (или «гранями коразмерности 1»).

Гиперплоскости граней являются $(n-1)$-мерными пространствами, а грани — многогранниками в них. Их грани старшей размерности являются для исходного многогранника гранями размерности $n-2$ (или коразмерности 2). Продолжая это построение по индукции, получим определение грани любой размерности. Грани размерности 1 называются *ребрами*, а размерности 0 — *вершинами.*

Поскольку многогранник может быть задан набором определяющих его полупространств, начнем с изучения вопроса, каким образом можно задавать полупространства в евклидовых и сферических пространствах. Любое полупространство в E^n задается в виде линейного неравенства

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leqslant c, \tag{1}$$

где коэффициенты a_1, a_2, $\ldots$, a_n являются координатами вектора нормали к гиперплоскости — границе полупространства. В векторном виде неравенство (1) запишется в виде $(e, x) \leqslant c$.

Пара, состоящая из ненулевого вектора e и действительного числа c, задающая некоторое фиксированное полупространство, определена с точностью до умножения на положительную константу. Поэтому если дополнительно потребовать, чтобы вектор e был *нормированным* (т. е. $(e, e) = 1$), то такие пары будут находиться во взаимно однозначном соответствии с полупространствами пространства E^n. Вектор e будем называть *нормалью к полупространству.* Заметим, что вектор нормали направлен наружу полупространства (рис. 1).

При пересечении двух гиперплоскостей в E^n образуются четыре различных двугранных угла, величины которых попарно либо равны, либо дополняют друг друга до π. Если же мы выберем для каждой из гиперплоскостей одно из двух ограничиваемых ею полупространств, то можно однозначно выбрать один из этих четырех двугранных углов.

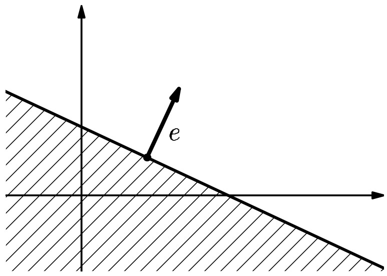


Рис. 1.

А именно, это будет двугранный угол, образованный в пересечении выбранных полупространств. Будем называть этот двугранный угол *углом между полупространствами.* Величину этого угла можно определить как величину плоского угла, получаемого в пересечении этих полупространств с двумерной плоскостью, перпендикулярной их границам. Таким образом определенный угол между полупространствами дополняет до π угол между нормалями к ним.

Углом между гранями многогранника называется угол между соответствующими этим граням полупространствами. Если две грани старшей размерности пересекаются по грани коразмерности 2, то они называются *смежными*, а угол между ними — *двугранным углом многогранника.*

Сфера S^n может быть естественным образом вложена в E^{n+1}:

$$S^n = \{x \in E^{n+1} : (x, x) = 1\}.$$

Каждое полупространство сферического пространства S^n является при таком вложении его пересечением с некоторым полупространством в E^{n+1}, граница которого проходит через нуль. Вектор нормали к полупространству в E^{n+1} будем также называть вектором нормали к соответствующему полупространству в S^n.

Таким образом, мы получили взаимно однозначное соответствие между нормированными векторами в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве и полупространствами n-мерной сферы, задаваемое формулой

$$e \in E^{n+1} : (e, e) = 1 \quad \longleftrightarrow \quad H_e \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E^{n+1} : (x, x) = 1,\ (e, x) \leqslant 0\}$$

Таким же образом получается соответствие между многогранниками в S^n и многогранниками в E^{n+1}, все грани которых проходят через одну точку. Такие многогранники называются *многогранными конусами.*

С каждым многогранником свяжем *систему нормалей* — множество нормалей к определяющим его полупространствам. Для многогранников в E^n система нормалей принадлежит этому же пространству, а для многогранников из S^n система нормалей принадлежит E^{n+1}. Угол между нормалями дополняет до π угол между соответствующими полупространствами.

В свою очередь, конечная система векторов в евклидовом пространстве может быть задана матрицей, составленной из попарных скалярных произведений векторов и называемой *матрицей Грама*. Матрицу Грама системы нормалей конечного многогранника мы будем называть *матрицей Грама многогранника*.

Из определения матрицы Грама $G = (g_{ij})$ следует, что она должна удовлетворять следующим условиям:

- $g_{ij} = g_{ji}$ (симметричность);
- $g_{ii} = 1$ (нормированность);
- все главные миноры матрицы G неотрицательны (положительная полуопределенность). В частности, выполнено неравенство Коши – Буняковского: $|g_{ij}| \leqslant 1$.

Обратно, всякая матрица, удовлетворяющая этим условиям, является матрицей Грама некоторой нормированной системы векторов в евклидовом пространстве (согласно известной теореме из линейной алгебры), и, тем самым, матрицей Грама некоторого конечного евклидова многогранника. Действительно, по системе нормалей можно построить семейство полупространств так, чтобы все они содержали окрестность нуля. Тогда пересечение этих полупространств будет выпуклым многогранником. Кроме того, можно построить систему полупространств так, чтобы все их границы проходили через нуль. Если и в этом случае пересечение полупространств будет содержать непустое открытое множество, то матрице Грама соответствует также многогранник на сфере. Получающийся при этом евклидов многогранник называется *многогранным конусом*.

Рангом системы векторов называется размерность ее линейной оболочки. Ранг системы векторов совпадает с рангом ее матрицы Грама. Ранг системы векторов не больше, чем их количество, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда система линейно независима.

Если система нормалей имеет ранг меньший n, то все нормали содержатся в некотором собственном подпространстве пространства E^n. Многогранник в этом случае является цилиндром над многогранником меньшей размерности. Такие многогранники будем называть *вырожденными*. Многогранник в S^n назовем вырожденным, если вырожден соответствующий ему многогранный конус в E^{n+1}, т. е. система нормалей имеет ранг меньше $n + 1$.

Наконец, если система векторов представляется в виде объединения нескольких попарно ортогональных подсистем, то соответствующий многогранник является прямым произведением соответствующих им многогранников, а матрица Грама имеет клеточно-диагональный вид, в котором клетки являются матрицами Грама подсистем. Многогранник, система нормалей и матрица Грама в этом случае называются *разложимыми.*

Самый простой с точки зрения комбинаторного строения многогранник — *симплекс.* Он имеет $n+1$ грань старшей размерности. Обратно, если пересечение $n+1$ полупространства является ограниченным многогранником, то этот многогранник — симплекс. Количество граней симплекса на единицу больше размерности пространства, а его система нормалей связана единственным линейным соотношением.

Конус в евклидовом пространстве, соответствующий симплексу на сфере, называется *симплициальным конусом.* Система нормалей симплициального конуса линейно независима.

2. Остроугольные многогранники

Мы дадим два определения остроугольного многогранника.

Определение. Многогранник называется *остроугольным*, если выполнено одно из двух следующих (равносильных) условий:

I. все его двугранные углы не тупые;

II. все углы между определяющими его полупространствами не тупые.

На первый взгляд второе определение кажется более сильным, поскольку оно накладывает ограничение на углы между любыми, а не только смежными гранями. Однако в 1970 году Е. М. Андреев [2] доказал, что гиперплоскости несмежных граней многогранника, удовлетворяющего условию I, не пересекаются, а значит, такие многогранники удовлетворяют также условию II. Мы не будем приводить доказательства теоремы Андреева, а для того, чтобы изложение сохранило строгость, будем считать определением остроугольного многогранника условие II.

Углы между нормалями остроугольного многогранника являются не острыми; такую систему векторов будем называть *тупоугольной.*

Замечание. Прямой угол допускается как между гранями остроугольного многогранника, так и между векторами тупоугольной системы.

Оказывается, что в евклидовом пространстве помещается достаточно мало векторов с попарно не острыми углами, поэтому остроугольные многогранники имеют достаточно простое комбинаторное строение. Более точная формулировка содержится в следующей лемме.

Лемма 1. *Любая неразложимая тупоугольная система векторов в E^n содержит не более $n+1$ вектора.*

Доказательство. Доказательство будем проводить индукцией по размерности пространства. База очевидна: максимальная тупоугольная система векторов на прямой состоит из двух противоположно направленных векторов.

Рассмотрим неразложимую тупоугольную систему и один из ее векторов x.

Если вектор $-x$ также принадлежит системе, то все ее векторы, кроме x и $-x$, по условию образуют с ними неострые углы, а это может быть только в случае, когда они ортогональны им обоим. Значит, других векторов нет, иначе система была бы разложимой. Поэтому система содержит всего два вектора, и для этого случая лемма доказана.

Пусть теперь система не содержит вектора $-x$. Спроектируем все векторы системы, кроме x, на гиперплоскость Π, ортогональную ему. Полученная система содержит на один вектор меньше исходной и содержится в пространстве на единицу меньшей размерности. Для завершения доказательства достаточно проверить, что она тупоугольная и неразложимая, и сослаться на предположение индукции.

Для доказательства тупоугольности рассмотрим два вектора u и v системы и их проекции u' и v' на Π. Тогда $u = u' + \lambda x$, $v = v' + \mu x$, где $\lambda \leqslant 0$ и $\mu \leqslant 0$, откуда $(u,v) = (u',v') + \lambda\mu(x,x)$, значит

$$(u',v') \leqslant (u,v). \tag{2}$$

Мы видим, что скалярные произведения при проектировании не увеличиваются; следовательно, углы между векторами остаются не острыми. Поэтому полученная при проектировании система тупоугольна.

Для доказательства неразложимости заметим, что тупые углы не могут проектироваться в прямые, поэтому неразложимая система проектируется в неразложимую. Исходную систему векторов мы выбирали неразложимой, однако при удалении вектора x она могла распасться на несколько ортогональных компонент. При этом вектор x должен образовывать не прямой угол хотя бы с одним из векторов каждой компоненты. При проектировании эти векторы станут образовывать между собой попарно тупые углы, так как скалярные произведения векторов, образующих тупые углы с x, строго уменьшаются (это легко проверить, исследовав случаи выполнения равенства в неравенстве (2)). Значит, полученная при проектировании система неразложима.

Следствие. *Количество векторов неразложимой тупоугольной системы либо равно ее рангу, либо на единицу больше.*

В первом из этих двух случаев система линейно независима, а задаваемый такой системой нормалей многогранник является симплициальным конусом. Во втором случае система связана единственным линейным соотношением. (Нетрудно доказать весьма полезное свойство этого линейного соотношения, что все его коэффициенты имеют одинаковый знак. Однако нам оно не понадобится.) Докажем, что соответствующий системе нормалей многогранник в этом случае является симплексом.

Лемма 2. *Любая неразложимая тупоугольная система в E^n, состоящая из $n+1$ вектора, является системой нормалей некоторого симплекса.*

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}$ — данная система векторов. Докажем, что многогранник $M = \bigcap_i \{x : (x, e_i) \leqslant 1\}$ является симплексом. Достаточно доказать ограниченность M. Предположим противное. Тогда некоторый луч с началом в нуле (нуль — внутренняя точка M) целиком лежит внутри M. Это значит, что существует такой вектор e, что для любого i при любом $\lambda > 0$ выполнено условие $(\lambda e, e_i) \leqslant 1$. Это может выполняться только, если $(e, e_i) \leqslant 0$ для всех i. Но тогда данную тупоугольную систему векторов можно расширить, добавив вектор e. А это противоречит лемме 1.

Теперь мы можем описать строение остроугольных многогранников в евклидовых пространствах и на сферах.

Теорема 1. *Невырожденные остроугольные многогранники в евклидовом пространстве являются прямыми произведениями симплексов и симплициальных конусов.*

Доказательство. Система нормалей остроугольного многогранника является тупоугольной. Согласно следствию, она представляется в виде объединения попарно ортогональных подсистем, каждая из которых либо линейно независима, либо связана единственным линейным соотношением, а значит является системой нормалей симплициального конуса или симплекса. Поэтому рассматриваемый многогранник является прямым произведением многогранников этих двух типов. Заметим, что прямое произведение симплициальных конусов также является симплициальным конусом.

Теорема 2. *Невырожденные остроугольные многогранники на сфере являются симплексами.*

Доказательство. Рассмотрим в E^{n+1} систему нормалей невырожденного остроугольного многогранника в S^n. Добавим к ней вектор, лежащий строго внутри симплициального конуса, соответствующего этому многограннику (такой вектор существует, поскольку многогранник содержит непустое открытое множество). Этот вектор составляет тупые углы со всеми векторами системы нормалей, поэтому получившаяся после добавления система является тупоугольной и неразложимой. Согласно лемме, она содержит не более $n+1$ вектора. Следовательно, исходная система нормалей содержала не более n векторов. Из невырожденности многогранника следует, что она содержала ровно n линейно независимых векторов. Значит, многогранник является симплексом.

3. Многогранники Кокстера и схемы Кокстера

Определение. *Многогранником Кокстера* называется многогранник, все двугранные углы которого являются целыми частями π.

В статье [5] доказывается, что, многократно отражая многогранник Кокстера относительно гиперплоскостей его граней, мы получим замощение пространства «камерами», равными исходному многограннику. Из этого следует, что если две гиперплоскости несмежных граней данного многогранника пересекаются, то они образуют двугранный угол другой камеры. Значит, угол между ними также должен быть равен целой части π.[2)]

В дополнение к двум уже известным нам способам задания многогранников — системой нормалей и матрицей Грама — для многогранников Кокстера существует еще один — схемой Кокстера. Для введения этого понятия нам понадобится язык теории графов. Напомним коротко основные определения.

Граф, ребра которого могут иметь различную кратность, будем называть *схемой. Степенью вершины* схемы называется количество выходящих из нее ребер. Вершины степени нуль называются *изолированными*, степени один — *висячими*, степени два — *обычными*, а большей степени — *узлами.* Ребра кратности 1 назовем *простыми*, а остальные — *кратными.* Путь называется *простым*, если он проходит только по простым ребрам. Будем называть *особенностью* схемы кратное ребро или узел, а *простой особенностью* — ребро кратности 2 или узел степени 3. Связная схема, не содержащая циклов, называется *деревом.* Дерево, не содержащее особенностей, — это линейная схема из простых ребер.

Каждому многограннику Кокстера соответствует схема, называемая его схемой Кокстера. Она определяется следующим образом. Вершины

[2)] Многогранники Кокстера являются остроугольными, поэтому из упоминавшейся ранее теоремы Андреева [2] следует, что гиперплоскости несмежных граней не пересекаются. Нам для классификации многогранников Кокстера потребуется лишь факт, что угол между любыми непараллельными гранями равен целой части π. Мы привели доказательство этого более слабого утверждения, чтобы наши рассуждения не потеряли строгость в отсутствии доказательства теоремы Андреева.

схемы Кокстера соответствуют граням старшей размерности многогранника Кокстера. Если две грани перпендикулярны, то соответствующие вершины схемы Кокстера не соединяются ребром. Если угол между гранями равен π/m ($m \geqslant 3$), то соответствующие вершины схемы соединяются ребром кратности $m-2$ или обычным ребром с отметкой m (эти два обозначения равносильны; использовать ребро с отметкой удобно в случае, если m велико). Если грани параллельны, то вершины схемы Кокстера соединяются жирным ребром (или ребром с отметкой ∞).

Подсхемой схемы Кокстера называется подграф, получаемый удалением некоторых вершин вместе со всеми выходящими из них ребрами.

Ясно, что по схеме Кокстера однозначно восстанавливается матрица Грама и система нормалей. Подсхемам схемы Кокстера соответствуют подсистемы систем нормалей и главные миноры матрицы Грама. Мы будем говорить об *определителе* и *ранге* схемы Кокстера, имея в виду определитель и ранг соответствующей матрицы Грама.

Легко проверить, что связность схемы Кокстера равносильна неразложимости соответствующих ей матрицы Грама, системы векторов и многогранника Кокстера.

Определитель схемы Кокстера равен произведению определителей ее связных компонент. Определитель схемы, состоящей из одной изолированной вершины, равен 1. Для удобства будем считать, что определитель пустой схемы также равен единице.

Для примера рассмотрим схему Кокстера, представляющую собой один простой цикл (рис. 2), и ее матрицу Грама:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Сумма строк этой матрицы равна нулевой строке, поэтому матрица вырожденна, значит определитель схемы Кокстера равен нулю.

Считать определители помогает следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть v — висячая вершина схемы Кокстера S, соединенная с вершиной w ребром с отметкой m. Обозначим через S' подсхему*

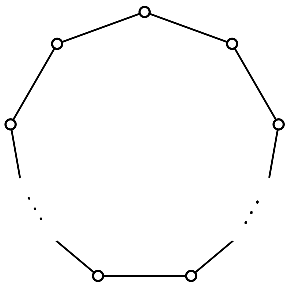


Рис. 2.

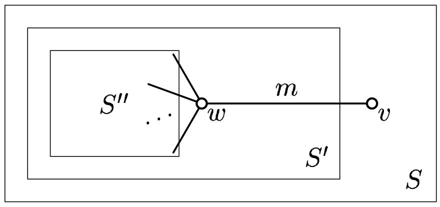


Рис. 3.

схемы S, получаемую удалением вершины v, а через S'' — получаемую удалением пары вершин v и w (рис. 3). Тогда

$$\det S = \det S' - \cos^2 \frac{\pi}{m} \det S''.$$

Доказательство. Матрица Грама схемы S имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cos\frac{\pi}{m} & 0 & \cdots & 0 \\ -\cos\frac{\pi}{m} & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & * & \cdots & * \end{pmatrix},$$

где звездочками заменены матричные элементы, значения которых нам в данный момент не существенны. Матрица Грама схемы S' получается вычеркиванием первых строки и столбца, а матрица Грама схемы S'' — вычеркиванием первых двух строк и столбцов. Доказываемая формула получается разложением определителя по первому столбцу, а затем по первой строке.

Доказанная лемма позволяет легко находить определители схем Кокстера, представляющих собой деревья.

Для удобства счета мы иногда будем рассматривать также определитель удвоенной матрицы Грама. Назовем его *большим определителем* и будем обозначать Det в отличие от просто определителя (или *малого определителя*, обозначаемого det). Очевидно, что большой и малый определители связаны простым соотношением $\operatorname{Det} S = 2^{|S|} \det S$, где $|S|$ — количество вершин схемы S. В терминах больших определителей формула из леммы 3 переписывается следующим образом:

$$\operatorname{Det} S = 2 \operatorname{Det} S' - \lambda \operatorname{Det} S'',$$

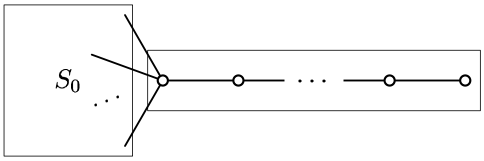


Рис. 4.

где $\lambda = 4\cos^2 \pi/m$. В частности, если $m = 3$, 4, 6 или ∞, то коэффициент λ равен 1, 2, 3 или 4 соответственно.

Следствие. *Пусть S_0 — схема Кокстера. Обозначим через S_{k+1} схему, получаемую присоединением к S_0 линейной схемы, состоящей из k вершин, соединенных простыми ребрами* (*как показано на рис.* 4). *Тогда последовательность больших определителей $D_k = \operatorname{Det} S_k$ образует арифметическую прогрессию.*

Доказательство. Лемма 3 дает нам формулу $D_{k+1} = 2D_k - D_{k-1}$, которая переписывается в виде $D_{k+1} - D_k = D_k - D_{k-1}$, а это и означает, что D_k — арифметическая прогрессия.

Применим полученный результат к нескольким сериям схем. Результаты вычислений определителей сведены в таблицу 1 (с. 93). Во втором столбце таблицы приведен общий вид схемы S_k, а в третьем — схема S_1 с отмеченной вершиной, при удалении которой получается схема S_0. Далее указано количество вершин схемы S_k, большие определители схем S_0 и S_1, разность $d = \operatorname{Det} S_1 - \operatorname{Det} S_0$ получаемой арифметической прогрессии, а также значения k, при которых определитель схемы равен нулю и при которых он больше нуля.

Заметим, что среди этих схем имеются повторяющиеся. Например, схема 2 при $k = 4$ совпадает со схемой 4 при $k = 2$.

Те из схем, определитель которых положителен, запишем в таблицу 2 (с. 95), снабдив стандартными обозначениями. Нижний индекс всегда равен количеству вершин схемы. Аналогично, в таблицу 3 (с. 95) запишем схемы с нулевым определителем. Кроме схем, встретившихся нам в таблице 1, там будут присутствовать четыре бесконечные серии $\widetilde{A}_n$, $\widetilde{B}_n$, $\widetilde{C}_n$ и $\widetilde{D}_n$. Первая из них представляет собой простой цикл, и мы уже нашли ее определитель ранее в этом параграфе. Определители схем трех остальных серий можно легко найти, используя лемму 3. Можно также убедиться, что он равен нулю, и другим способом — найдя линейную зависимость между строками матрицы Грама (советуем выполнить это несложное упражнение). Нижний индекс в обозначении схемы из таблицы 1 на единицу меньше количества ее вершин. Заметим, что каждую схему из таблицы 2 можно получить из одноименной (т. е. обозначенной

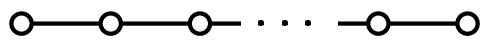
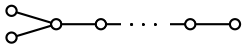
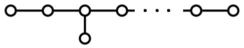
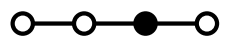
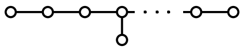
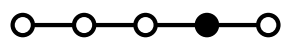
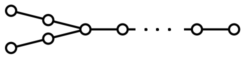
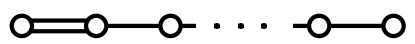
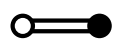
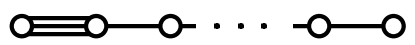
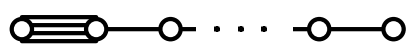
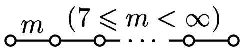
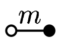
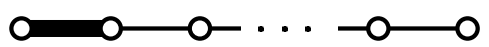
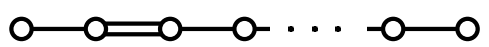
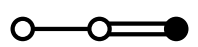
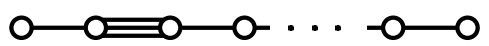
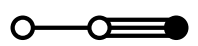
	S_k	S_1	$\lvert S_k \rvert$	Det S_0	Det S_1	d	Det $S_k > 0$	Det $S_k = 0$
1			k	1	2	1	$\forall\, k$	—
2			$k+2$	4	4	0	$\forall\, k$	—
3			$k+3$	6	5	-1	$k \leqslant 5$	$k=6$
4			$k+4$	8	6	-2	$k \leqslant 3$	$k=4$
5			$k+4$	9	6	-3	$k \leqslant 2$	$k=3$
6			$k+1$	2	2	0	$\forall\, k$	—
7			$k+1$	2	$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$k \leqslant 3$	—
8			$k+1$	2	1	-1	$k \leqslant 1$	$k=2$
9			$k+1$	2	$4\left(1-\cos^2\frac{\pi}{m}\right)$	$2-4\cos^2\frac{\pi}{m}$	$k \leqslant 1$	—
10			$k+1$	2	0	-2	$k=0$	$k=1$
11			$k+2$	3	2	-1	$k \leqslant 2$	$k=3$
12			$k+2$	3	$3-\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}$	$k \leqslant 1$	—

Табл. 1.

той же буквой, с тем же индексом, но без тильды) схемы из таблицы 3 посредством удаления некоторой вершины. Две схемы с отрицательными определителями, которые понадобятся нам чуть позже, приведены на рис. 5.

Рис. 5.

Определение. Схема Кокстера называется *эллиптической*, если она является схемой многогранника Кокстера в сферическом пространстве, и *параболической*, если она является схемой многогранника Кокстера в евклидовом пространстве.

Из результатов параграфов 1 и 2 следует, что связная схема является эллиптической тогда и только тогда, когда она положительно определенна, и параболической тогда и только тогда, когда она вырожденна, а любая ее собственная подсхема положительно определенна.

Нетрудно убедиться, что все схемы из таблицы 2 являются эллиптическими, а из таблицы 3 — параболическими. Для этого достаточно проверить, что все их собственные подсхемы содержатся в таблице 2. Как следствие заметим, что нижний индекс в обозначении любой схемы из таблиц 2 и 3 равен ее рангу.

В следующем параграфе мы докажем, что все связные эллиптические и параболические схемы исчерпываются приведенными в таблицах 2 и 3. Тем самым, будет получена полная классификация многогранников Кокстера в S^n и E^n.

Нам понадобится вспомогательное утверждение из теории матриц.

Лемма 4. *Пусть квадратная матрица $M = (a_{ij})$ порядка $n \geqslant 2$ удовлетворяет следующим условиям:*

- ▷ *вне диагонали стоят неположительные числа;*
- ▷ *нули стоят симметрично относительно диагонали;*
- ▷ *все собственные главные миноры положительны.*

Тогда алгебраические дополнения ко всем ее ненулевым элементам положительны.

Доказательство. Утверждение леммы достаточно проверить только для алгебраических дополнений к недиагональным элементам, поскольку алгебраические дополнения к диагональным элементам являются главными минорами, а они положительны по условию. Кроме того, заметим, что диагональные элементы матрицы M положительны по условию, так как являются главными минорами порядка 1.

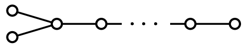
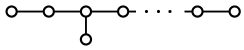
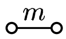
A_n		
B_n (или C_n)		$(n \geqslant 2)$
D_n		$(n \geqslant 4)$
E_n		$(6 \leqslant n \leqslant 8)$
F_4		
$G_2^{(m)}$		$(m \geqslant 6)$
H_3		
H_4		

Табл. 2. *Связные эллиптические схемы Кокстера*

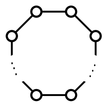
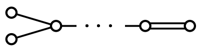
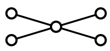
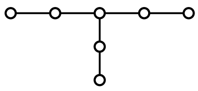
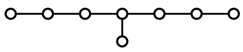
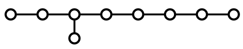
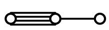
$\widetilde{A}_1$		
$\widetilde{A}_n$		$(n \geqslant 2)$
$\widetilde{B}_n$		$(n \geqslant 3)$
$\widetilde{C}_n$		$(n \geqslant 2)$
$\widetilde{D}_n$		$(n \geqslant 5)$
$\widetilde{D}_4$		
$\widetilde{E}_6$		
$\widetilde{E}_7$		
$\widetilde{E}_8$		
$\widetilde{F}_4$		
$\widetilde{G}_2$		

Табл. 3. *Связные параболические схемы Кокстера*

Доказательство будем вести индукцией по n. Проверка истинности утверждения для $n = 2$ не представляет труда.

Пусть теперь для матриц порядка $n-1$ лемма доказана. Рассмотрим матрицу $M = (a_{ij})$ порядка n. Алгебраическое дополнение A_{ij} к недиагональному элементу a_{ij} (без ограничения общности можно считать, что $i < j$) равно минору, получаемому вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, умноженному на $(-1)^{i+j}$. Вычислим этот минор разложением по i-му столбцу. Все элементы этого столбца неположительны (поскольку единственный положительный его элемент a_{ii} вычеркнут), причем по крайней мере один элемент a_{ji} строго отрицателен. Алгебраические дополнения к этим элементам с точностью до множителя $(-1)^{j-i}$ совпадают с алгебраическими дополнениями к элементам $(j-1)$-го столбца подматрицы, получаемой вычеркиванием i-ых строки и столбца. А эти алгебраические дополнения положительны по предположению индукции. Поскольку произведение множителей $(-1)^{i+j}$ и $(-1)^{j-i}$ равно единице, рассматриваемое алгебраическое дополнение A_{ij} положительно.

Замечание 1. В условии не требуется, чтобы определитель всей матрицы был положителен.

Замечание 2. Если матрица невырожденна, то утверждение теоремы можно переформулировать так: все элементы обратной матрицы имеют одинаковый знак (такой же, как у ее определителя).

Назовем операцию уменьшения кратности любого ребра схемы Кокстера (в частности, стирание ребра), а также композицию таких операций *упрощением схемы.*

Теорема 3. *При упрощении параболическая или эллиптическая схема Кокстера переходит в эллиптическую.*

Доказательство. При упрощении схемы Кокстера в матрице Грама меняется пара элементов, симметричных относительно главной диагонали (они уменьшаются по модулю, оставаясь неположительными). Выясним, что происходит при этом с главными минорами матрицы Грама. Рассмотрим такой минор как функцию $f(g_{ij}, g_{ji})$ от двух переменных — симметричных матричных элементов, считая все остальные элементы константами. Будем изменять значения переменных по очереди, временно забыв, что они должны быть обязательно равны между собой. Разложив определитель по j-му (i-му) столбцу, получаем, что функция f является линейной по первой (второй) переменной, причем коэффициент линейной зависимости равен алгебраическому дополнению к соответствующему матричному элементу, а он по лемме 4 положителен (требует обоснования то, что при рассматриваемом изменении матричных элементов сохраняется последнее условие этой леммы; для этого, формально говоря, нужно применить индукцию). Значит, функция f монотонно возрастает по обеим переменным в области отрицательных чисел. Поэтому функция одной переменной $d(x) = f(x, x)$ также монотонно возрастает в области $x < 0$. Из непрерывности функции d следует, что замыкание $x \leqslant 0$ открытого луча $x < 0$ также является ее областью монотонности.

При упрощении схемы все главные миноры ее матрицы Грама либо не изменяются (если минор не содержит строки и столбца, содержащих измененный матричный элемент), либо увеличиваются (в противном случае). Поскольку все они были положительными, то положительными и остаются. Определитель всей матрицы Грама (который до упрощения был неотрицательным) строго увеличивается (поскольку обязательно содержит измененный матричный элемент), значит, становится положительным. Следовательно, схема становится эллиптической.

4. Классификация евклидовых и сферических многогранников Кокстера

Теорема 4. *Все эллиптические связные схемы Кокстера исчерпываются приведенными в таблице 2. Все параболические связные схемы Кокстера исчерпываются приведенными в таблице 3.*

Доказательство. Будем пользоваться теоремой 3. Докажем, что каждую связную схему, не содержащуюся в таблицах 2 и 3, можно упростить так, чтобы она (или одна из ее связных компонент) оказалась среди приведенных в таблице 3 или на рис. 5.

Итак, пусть мы имеем связную эллиптическую или параболическую схему S. Предположим, что она не содержится в таблицах 2 и 3.

Если S содержит цикл, то можно стереть все ребра, не входящие в него, а кратности оставшихся ребер уменьшить до единицы. Получим параболическую схему $\widetilde{A}_n$ (и, быть может, несколько изолированных вершин). Значит, все остальные эллиптические и параболические схемы являются деревьями.

Если схема S содержит по крайней мере две особенности, то ее можно упростить до одной из параболических схем $\widetilde{D}_n$, $\widetilde{C}_n$ или $\widetilde{B}_n$. Для этого нужно вначале стереть все ребра, кроме участвующих в двух особенностях и в соединяющем их пути. А затем упростить особенности и соединяющий их путь, сделав их простыми.

Осталось рассмотреть схемы с не более, чем одной особенностью: линейные схемы, содержащие не более одного кратного ребра, и схемы без кратных ребер с единственным узлом.

Если S содержит ребро кратности $\geqslant 4$, то этим ребром вся схема исчерпываться не может, поскольку тогда S была бы эллиптической схемой

$G_2^{(m)}$ или параболической схемой $\widetilde{A}_1$. Но тогда схему S можно упростить до параболической схемы $\widetilde{G}_2$.

Если S линейна и содержит ребро кратности 3, то (учитывая, что S не совпадает с эллиптическими схемами H_3 и H_4) она либо является, либо упрощается до одной из схем, изображенных на рис. 5.

Если S линейна и содержит одно двойное ребро, то, с учетом того, что она не совпадает с B_n, F_4 или $\widetilde{H}_4$, ее можно упростить до $\widetilde{H}_4$.

Наконец, S не может быть линейной схемой без кратных ребер, поскольку все такие схемы A_n являются эллиптическими.

Теперь пусть S — схема с единственной особенностью — узлом. Если его степень $\geqslant 4$, то сотрем все ребра, кроме выходящих из узла, а затем из оставшихся сотрем все, кроме четырех. Получим параболическую схему $\widetilde{D}_4$.

Теперь пусть единственная особенность схемы S — простой узел. Такую схему назовем Т-образной. Она характеризуется длиной трех «отростков», отходящих от узла. Пусть их длины образуют тройку чисел a, b, c, которую мы будем считать упорядоченной: $a \leqslant b \leqslant c$. Если $a \geqslant 2$, то схему можно упростить до параболической схемы $\widetilde{E}_6$, если $a = 1$, $b \geqslant 3$, то — до схемы $\widetilde{E}_7$. Если $a = 1$, $b = 2$, то $c \geqslant 6$ (в противном случае она совпала бы либо с одной из эллиптических схем $S = E_6$, E_7, E_8, либо с параболической схемой $\widetilde{E}_8$), и тогда S можно упростить до $\widetilde{E}_8$. Наконец, если $a = b = 1$, то $S = D_n$ — эллиптическая схема.

5. Гиперболические многогранники Кокстера

Перейдем к рассмотрению многогранников Кокстера в пространствах Лобачевского. Для начала определим модель пространства Лобачевского, которую будем использовать. Рассмотрим для этого $(n+1)$-мерное векторное пространство $E^{n,1}$, снабженное псевдоскалярным произведением сигнатуры $(n, 1)$:

$$(x, x) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2. \tag{3}$$

Тогда n-мерным пространством Лобачевского L^n называется множество векторов $x \in E^{n,1}$, удовлетворяющих условиям

$$(x, x) = -1, \quad x_0 > 0.$$

В такой модели L^n представляет собой одну из двух связных компонент двуполостного гиперболоида, поэтому она называется *моделью на гиперболоиде.* Если спроектировать гиперболоид из начала координат на гиперплоскость $x_0 = 1$, то его образом будет внутренность n-мерного единичного шара; при этом получается *модель Клейна* пространства Лобачевского.

Полупространствами в L^n являются множества тех векторов $x \in L^n$, которые удовлетворяют условию $(e, x) \leqslant 0$ для некоторого вектора $e \in E^{n,1}$ такого, что $(e, e) > 0$ (в объемлющем пространстве $E^{n,1}$ множество $\{x : (e, x) < 0\}$ является полупространством, а условие $(e, e) > 0$ означает, что его граница пересекается с гиперболоидом). По аналогии с евклидовым и сферическим случаями вектор e будем называть *нормалью к полупространству*. Нормаль к заданному полупространству определяется с точностью до умножения на положительную константу. Для удобства будем считать ее *нормированной*, т. е. $(e, e) = 1$. Тогда нормаль определяется по полупространству однозначно.

Определения выпуклого многогранника в L^n и его граней дословно повторяют соответствующие определения для евклидова и сферического случаев. Как и в этих случаях, многогранник задается матрицей Грама своей системы нормалей. Аналогично евклидову случаю (параграф 1), матрица Грама гиперболического многогранника должна удовлетворять условиям симметричности и нормированности. Условие положительной определенности заменяется условием: сигнатура матрицы равна $(n, 1)$.

Многогранник называется *невырожденным*, если его система нормалей порождает всё пространство $E^{n,1}$. Система нормалей любого вырожденного многогранника является также системой нормалей некоторого невырожденного многогранника меньшей размерности в пространстве Лобачевского, евклидовом или сферическом (в зависимости от сигнатуры ее матрицы Грама).

Если e_1 и e_2 — нормали к полупространствам Π_1 и Π_2, то взаимное расположение полупространств определяется следующим образом.

- ▹ Если $|(e_1, e_2)| > 1$, то границы полупространств расходятся, причем расстояние ρ между ними задается формулой
$$\operatorname{ch} \rho = |(e_1, e_2)|.$$
- ▹ Если $|(e_1, e_2)| = 1$, то границы полупространств параллельны.
- ▹ Если же $|(e_1, e_2)| < 1$, то границы полупространств пересекаются, причем угол φ между полупространствами задается той же, что и в евклидовом случае, формулой
$$\cos \varphi = (e_1, e_2).$$

В первых двух случаях, если рассматриваемое скалярное произведение отрицательно, то одно из полупространств содержит другое (рис. 6а), а если положительно, то полупространства либо не пересекаются (рис. 6б), либо в объединении образуют все пространство (рис. 6в). Для попарного взаимного расположения полупространств, определяющих выпуклый многогранник, возможен только случай в).

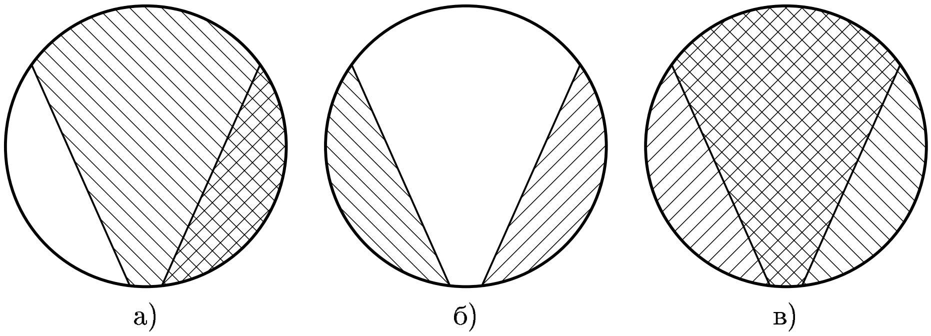


Рис. 6.

Упоминавшаяся в параграфе 2 теорема Андреева остается справедливой в следующей формулировке. Гиперплоскости несмежных граней остроугольного многогранника не пересекаются (параллельны или расходятся). Более того, верно более сильное утверждение. Если несколько гиперплоскостей граней пересекаются по k-мерной плоскости, то соответствующие грани пересекаются по k-мерной грани. Иными словами, непустое пересечение гиперплоскостей граней всегда является плоскостью некоторой грани.

Схемы Кокстера гиперболических многогранников определяются так же, как и евклидовых, с одним лишь дополнением. Если гиперплоскости граней многогранника расходятся, то соответствующие вершины схемы соединяются пунктирным ребром.

Определение. Схема Кокстера называется *гиперболической*, если она является схемой невырожденного многогранника Кокстера в пространстве Лобачевского.

Схема Кокстера является гиперболической тогда и только тогда, когда ее сигнатура равна $(n, 1)$. Чтобы задать многогранник по схеме Кокстера, нужно, как и в евклидовом и сферическом случаях, построить систему векторов с соответствующей матрицей Грама, а затем — систему полупространств, задаваемых этими векторами. Пересечение этих полупространств и будет являться искомым многогранником. Однако, для обоснования этой конструкции нужно доказать: во-первых, что это пересечение содержит непустое открытое множество, и во-вторых, что каждое из построенных полупространств является определяющим для многогранника. Мы опускаем эти доказательства, их можно найти в работе [4].

В отличие от евклидова и сферического случаев гиперболические многогранники Кокстера могут иметь достаточно сложное комбинаторное строение. Остроугольные системы в $E^{n,1}$ могут содержать даже бесконечно много векторов, поэтому гиперболические остроугольные многогранники (в частности, многогранники Кокстера) могут иметь бесконечное число граней (такие многогранники называются *бесконечными*). Мы же, как и условились в параграфе 1, ограничимся рассмотрением только конечных многогранников.

Представляет интерес классификация ограниченных многогранников (являющихся выпуклой оболочкой конечного числа точек) или, более общо, многогранников конечного объема (являющихся выпуклой оболочной конечного числа точек, часть которых может лежать на абсолюте). Проверка того, является ли многогранник ограниченным или конечного объема, сводится, тем самым, к определению его комбинаторного типа (например, достаточно проверить, что любое его ребро содержит в точности две вершины), а комбинаторный тип многогранника, в свою очередь, может быть определен по схеме Кокстера.

Действительно, для определения комбинаторного типа нужно уметь выяснять для каждого набора граней старшей размерности, является ли их пересечение гранью многогранника. А это, в свою очередь, (согласно теореме Андреева) равносильно тому, что гиперплоскости соответствующих граней пересекаются по некоторой плоскости в L^n. Каждая гиперплоскость есть ортогональное дополнение к своей нормали, а их пересечение — ортогональное дополнение к подпространству, порожденному этими нормалями. Это ортогональное дополнение пересекает гиперболоид тогда и только тогда, когда ограничение задающей псевдоскалярное произведение в пространстве $E^{n,1}$ квадратичной формы (3) на него является неопределенным. А это условие равносильно тому, что ограничение квадратичной формы на подпространство, порожденное системой нормалей, является положительно определенным (действительно, сигнатура формы содержит только один минус, поэтому неопределенность формы на некотором подпространстве равносильна ее положительной определенности на ортогональном дополнении). Значит, k-мерным граням остроугольного многогранника соответствуют положительно определенные подматрицы Грама ранга k, а такие матрицы являются матрицами Грама остроугольных многогранников в S^k, т. е. симплексов. Поэтому окрестность любой вершины устроена, как окрестность вершины симплекса. В частности, остроугольные многогранники являются *простыми* — из любой их вершины выходит в точности n ребер.

Аналогично, если набор граней остроугольного многогранника образует в пересечении вершину на абсолюте, то соответствующая подматрица Грама положительно полуопределенна. Поэтому окрестность вершины на абсолюте остроугольного многогранника Кокстера конечного объема комбинаторно устроена как вершина пирамиды над евклидовым остроугольным многогранником — произведением симплексов.

Таким образом, комбинаторное строение гиперболического многогранника в L^n определяется по схеме Кокстера следующим образом. Эллиптические подсхемы ранга находятся во взаимно однозначном соответствии с $(n-k)$-мерными гранями (в частности, вершинам соответствуют эллиптические подсхемы ранга n). Вершины на абсолюте находятся во взаимно однозначном соответствии с параболическими подсхемами ранга n.

Связь строения окрестностей вершин гиперболического остроугольного многогранника со строением сферических и евклидовых многогранников может также быть проиллюстрирована на основе геометрических соображений. Опишем маленькую сферу вокруг вершины гиперболического многогранника. Известно, что сфера в L^n изометрична S^{n-1}. Поэтому высекаемый на этой сфере многогранник будет являться сферическим многогранником того же комбинаторного типа и с теми же двугранными углами. Аналогично, описав вокруг вершины гиперболического многогранника, лежащей на абсолюте, маленькую орисферу (которая изометрична E^{n-1}), мы получим евклидов многогранник, комбинаторный тип и двугранные углы которого совпадают с комбинаторным типом и двугранными углами окрестности вершины гиперболического многогранника.

Для существования k-угольника Кокстера на плоскости Лобачевского необходимо и достаточно, чтобы сумма его углов была меньше $\pi(k-2)$. При выполнении этого условия существует бесконечно много многоугольников Кокстера с заданным набором углов. Все такие многоугольники могут быть параметризованы $k-3$ непрерывными параметрами. Это можно пояснить следующим рассуждением, которое нетрудно довести до строгого доказательства. Матрица Грама k-угольника задается $k(k-1)/2$ параметрами — матричными элементами. Из них k параметров определяют углы многоугольника, а остальные — расстояния между несмежными сторонами (или их продолжениями). Условие, что ранг матрицы Грама равен 3, накладывает $(k-2)(k-3)/2$ соотношений на эти параметры. Их можно задать например так: все миноры порядка 4, окаймляющие некоторый фиксированный ненулевой минор порядка 3, равны нулю. Поэтому в общем случае имеется $2k-3$ свободных параметра; при заданных k углах у нас остается еще $k-3$ свободных параметра.

В случае трехмерных ограниченных простых многогранников фиксированного комбинаторного типа количество свободных параметров равно количеству ребер. Это можно доказать, используя формулу Эйлера. Естественно предположить, что задание двугранных углов однозначно

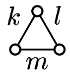
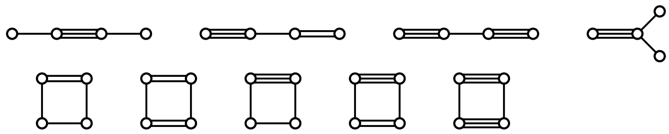
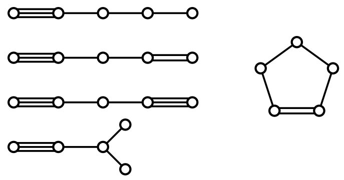
$n=1$	
$n=2$	 $2 \leqslant k,l,m < \infty, \qquad \frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m} < 1$
$n=3$	
$n=4$	

Табл. 4.

определяет многогранник. Для случая остроугольных многогранников такое предположение оказывается верным; это было доказано Е. М. Андреевым [1]. Для существования остроугольного многогранника заданного комбинаторного типа на его двугранные углы накладываются ограничения в виде неравенств, которые приведены в статье [5] в настоящем сборнике.

Количество свободных параметров ограниченного простого многогранника в пространстве Лобачевского размерности больше трех, вообще говоря, меньше количества его двугранных углов. Поэтому в общем случае задание комбинаторного типа и двугранных углов такого многогранника противоречивы. Тем не менее, примеры таких многогранников Кокстера известны, хотя их и достаточно мало.

Перейдем к рассмотрению примеров. Начнем с ограниченных многогранников Кокстера. Самые простые гиперболические многогранники Кокстера — ограниченные симплексы — были описаны Ф. Ланнером [11]. Схемы Кокстера симплексов в пространстве Лобачевского называются *ланнеровскими.* Описание ланнеровских схем является достаточно несложной комбинаторной задачей. Они характеризуются тем, что не являются ни эллиптическими, ни параболическими, а любая их собственная подсхема эллиптична. Например, таковыми являются обе схемы на рис 5. Ограниченные симплексы в L^n существуют лишь при $n \leqslant 4$. Полный их перечень приведен в таблице 4. Ограниченные симплициальные призмы существуют в пространствах Лобачевского размерностей не выше 5 и перечислены в [8].

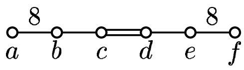


Рис. 7.

На рис. 7 изображена схема ограниченного многогранника Кокстера в четырехмерном пространстве Лобачевского. Докажем это. Положительный индекс инерции схемы не меньше четырех, так как выкинув вершины c и d, мы получим эллиптическую подсхему (a, b, e, f) ранга 4 (мы обозначаем подсхему перечислением входящих в нее вершин). Отрицательный индекс инерции схемы не меньше единицы, поскольку подсхема (a, b, c) является ланнеровской. Наконец, самое удивительное, что ее определитель оказывается равным нулю (это нетрудно вычислить, используя лемму 3), а значит ранг не больше 5. Следовательно, сигнатура схемы равна $(4, 1)$, поэтому она является схемой многогранника Кокстера в L^4.

Схема содержит две ланнеровские подсхемы: (a, b, c) и (d, e, f). Легко убедиться, что любая подсхема, не содержащая целиком ни одной из этих ланнеровских подсхем, является эллиптической. Несложный комбинаторный подсчет показывает, что многогранник содержит 6 трехмерных и 15 двумерных граней, 18 ребер и 9 вершин. Все трехмерные грани являются треугольными призмами, а среди двумерных граней имеются 6 треугольников и 9 четырехугольников. Комбинаторный тип многогранника Кокстера, задаваемого этой схемой, представляет собой прямое произведение двух треугольников. Это самый простой отличный от симплекса многогранник, все грани которого попарно смежны.

Примеры ограниченных многогранников Кокстера в пространствах Лобачевского размерностей 6, 7 и 8, найденные автором статьи, приведены на рис. 8. Последний пример является рекордным по размерности среди известных ограниченных гиперболических многогранников Кокстера.

Перейдем теперь к примерам неограниченных многогранников Кокстера конечного объема. Аналогично ланнеровской классификации можно перечислить все симплексы Кокстера конечного объема. Их схемы Кокстера характеризуются тем, что не являются ни параболическими, ни эллиптическими, а все их собственные подсхемы являются либо

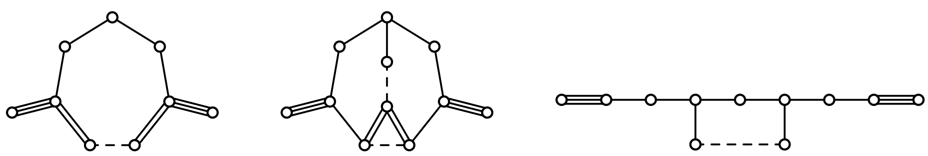


Рис. 8.

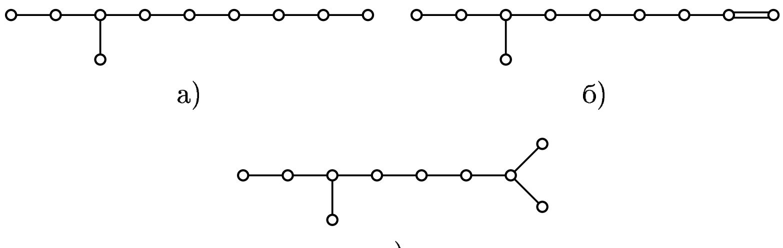


Рис. 9.

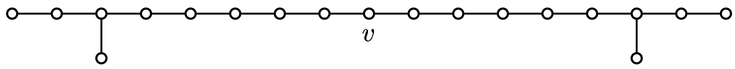


Рис. 10.

эллиптическими, либо связными параболическими. Они существуют в пространствах размерности не более 9. Схемы всех девятимерных симплексов Кокстера конечного объема приведены на рис. 9. Симплекс, задаваемый схемой а), содержит одну вершину на абсолюте, схемой б) — две, а схемой в) — три.

На рис. 10 приведен пример схемы неограниченного многогранника Кокстера конечного объема в L^{17}. При удалении вершины v схемы получается параболическая подсхема, состоящая из двух связных компонент типа $\widetilde{E}_8$. Эта подсхема соответствует вершине многогранника, лежащей на абсолюте, окрестность которой имеет комбинаторный тип прямого произведения двух 8-мерных симплексов. Многогранник Кокстера, задаваемый рассматриваемой схемой, имеет комбинаторный тип пирамиды над таким прямым произведением. Вершина v соответствует основанию пирамиды.

Максимальная размерность пространства Лобачевского, в котором известно существование многогранника Кокстера конечного объема, равна 21.

В пространствах Лобачевского достаточно большой размерности не существует ни ограниченных многогранников Кокстера, ни даже многогранников Кокстера конечного объема. Отсутствие ограниченных многогранников Кокстера в пространствах Лобачевского размерности $\geqslant 30$ было доказано Э. Б. Винбергом [6], а отсутствие многогранников Кокстера конечного объема в пространствах Лобачевского размерности $\geqslant 996$ — М. Н. Прохоровым [9].

Подробнее о классификации многогранников Кокстера в пространствах Лобачевского можно узнать из работ [4, 7]

Список литературы

[1] Андреев Е. М. *О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского* // Матем. сборник, 1970. Т. 81. №3. С. 445–478.

[2] Андреев Е. М. *О пересечении плоскостей граней многогранников с острыми углами* // Матем. заметки, 1970. Т. 8. №4. С. 521–527.

[3] Винберг Э. Б. *Дискретные группы, порожденные отражениями, в пространствах Лобачевского* // Матем. сб., 1967. Т. 72. №3. С. 471–488.

[4] Винберг Э. Б. *Гиперболические группы отражений* // УМН, 1985. Т. 40. Вып. 1(241). С. 29–66.

[5] Винберг Э. Б. *Калейдоскопы и группы отражений* // Математическое просвещение, 2003. Сер. 3. Вып. 7. С. 45–63.

[6] Винберг Э. Б. *Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского больших размерностей* // Труды ММО, 1984. №47. С. 68–102.

[7] Винберг Э. Б., Шварцман О. В. *Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 29. С. 147–259.

[8] Каплинская И. М. *О дискретных группах, порожденных отражениями в гранях симплициальных призм в пространствах Лобачевского* // Матем. заметки, 1974. Т. 15. №1. С. 159–164.

[9] Прохоров М. Н. *Отсутствие дискретных групп отражений с некомпактным фундаментальным многогранником конечного объема в пространствах Лобачевского большой размерности* // Изв. АН СССР, сер. матем., 1986. Т. 50. №2. С. 413–424.

[10] Coxeter H. S. M. *Discrete groups generated by reflections* // Ann. Math., 1934. Vol. 35. No 3. P. 588–621.

[11] Lanner F. *On complexes with tranzitive groups of authomorphisms* // Comm. Sém. Math. Univ. Lund, 1950. V. 11. P. 1–71.