Правильные многогранники

В. О. Бугаенко

Хорошо известно, что на плоскости существует бесконечно много правильных многоугольников, а именно, для любого $m \geqslant 3$ существует ровно один, с точностью до подобия, правильный m-угольник. В трехмерном пространстве имеется всего пять правильных многогранников — так называемых платоновых тел: правильный тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. Столь значительная разница между планиметрической и стереометрической ситуациями кажется на первый взгляд парадоксальной.[1] Возникает естественный вопрос: а какие правильные многогранники существуют в евклидовых пространствах бо́льших размерностей?

Нетрудно построить аналог правильного тетраэдра в пространстве любой размерности n. Он представляет собой выпуклую оболочку $n+1$ точки с попарно равными расстояниями между ними и называется *правильным симплексом.* (В дальнейшем, если речь будет идти о правильных многогранниках, слово «правильный» перед словами «симплекс» или «тетраэдр» мы будем опускать.) Также легко обобщается на случай любой размерности понятие куба. Для этого нужно рассмотреть множество точек в n-мерном пространстве, координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ которых задаются неравенствами $|x_i| \leqslant 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Такой многогранник называется (n-мерным) *кубом.* Наконец, можно построить n-мерный аналог октаэдра. Для этого нужно взять выпуклую оболочку центров всех граней n-мерного куба. Получившийся многогранник называется *кокубом.* У симплекса гранями старшей размерности является $n+1$ симплекс, у куба — $2n$ кубов, а у кокуба — 2^n симплексов.

Конструкция, с помощью которой мы из куба получили кокуб, является стандартной и может быть применена к любому правильному многограннику. Получаемый таким образом многогранник называется *двойственным* к данному. Многогранник, двойственный к правильному[2],

[1] В студенческом фольклоре ходит история о том, что однажды на экзамене студент дал следующее определение площади поверхности сферы: «Это предел последовательности площадей поверхностей вписанных в сферу правильных многогранников при стремящемся к бесконечности количестве граней.»

[2] Двойственный многогранник может быть определен для любого выпуклого (а не только правильного) многогранника, но в общем случае для этого понадобится более сложная конструкция.

также является правильным, причем группы симметрии многогранника и его двойственного совпадают. Куб является многогранником, двойственным к кокубу, и это не случайное совпадение. Двукратное применение к правильному многограннику конструкции двойственного многогранника всегда приводит к многограннику, подобному исходному. Симплекс двойствен сам себе, также самодвойственными являются все правильные многоугольники. Додекаэдр и икосаэдр двойственны друг другу.

Оказывается, что в пространствах размерности $\geqslant 5$ не существует правильных многогранников, кроме симплекса, куба и кокуба. А в четырехмерном пространстве существует шесть правильных многогранников. Кроме трех названных, это пара двойственных многогранников, которые можно считать аналогами додекаэдра и икосаэдра, (один из них содержит 120 граней–додекаэдров, а другой — 600 граней–тетраэдров), и самодвойственный 24-гранник, с гранями–октаэдрами. Доказательство этой классификации, приведенное в настоящей статье, основано на теории групп отражений [3] и классификации многогранников Кокстера [2].

Приведем вначале необходимые определения. Определения выпуклого многогранника, его граней и двугранных углов приведены в статье [2] в настоящем сборнике. Грани коразмерности 1 мы будем называть *гиперgranями*, коразмерности 2 — *гиперребрами*, а коразмерности 3 — *гипервершинами*.

Определение правильного многогранника будем строить по индукции. *Одномерным правильным многогранником* является отрезок (единственный одномерный ограниченный выпуклый многогранник). При $n > 1$ выпуклый n-мерный многогранник называется *правильным*, если его гиперграни являются равными $(n-1)$-мерными правильными многогранниками, и все его двугранные углы равны.

Ключевую роль при классификации правильных многогранников играет изучение их групп симметрии. *Симметрией многогранника* называется движение пространства, переводящее многогранник в себя. Множество всех симметрий многогранника P является группой, называемой *группой симметрии многогранника*, и обозначается $\operatorname{Sym} P$.

Прежде всего заметим, что все симметрии правильного многогранника P имеют общую неподвижную точку. Ею будет центр многогранника, который может быть определен как центр масс множества его вершин. Значит, группа $\operatorname{Sym} P$ является подгруппой группы O^n движений $(n-1)$-мерной сферы S^{n-1}. Кроме того, группа $\operatorname{Sym} P$ является конечной, поскольку симметрия определяется образами конечного числа точек — вершин многогранника.

Можно рассматривать *симметрии грани многогранника*, поскольку грань сама является многогранником. Симметрия грани — это движение, определенное только в плоскости грани. Однако, его легко продолжить на всё пространство, определив на ортогональном дополнении к этой плоскости тождественно. В дальнейшем будем считать любую симметрию грани определенной на всём пространстве, имея в виду такое ее продолжение. В частности, если симметрия грани является отражением, то ее продолжение на всё пространство также является отражением. Его зеркалом является гиперплоскость, проходящая через зеркало отражения в плоскости грани и перпендикулярная ей.

Предложение 1. *Симметрия грани правильного многогранника является также симметрией всего многогранника.*

Доказательство. Доказательство достаточно провести только для гиперграней, а затем воспользоваться индукцией. Любая симметрия гиперграни F правильного многогранника P переводит ее в себя, а гиперребра при F — друг в друга. Поскольку все двугранные углы при этих гиперребрах равны, смежные с F гиперграни также переходят друг в друга. Продолжая аналогичные рассуждения, получаем, что гиперграни, смежные со смежными с F, также переходят в гиперграни, и т. д. Поэтому все гиперграни переходят в гиперграни. Из этого следует, что многогранник переходит в себя.

Приведем еще один пример симметрии правильного многогранника — отражение относительно биссекторной гиперплоскости двугранного угла при некотором гиперребре. Это отражение переводит друг в друга смежные по этому гиперребру гиперграни и является симметрией многогранника. Допуская вольность речи, будем называть ее *отражением относительно гиперребра.*

Разумеется, одна и та же симметрия может быть одновременно симметрией нескольких различных граней и/или отражением относительно нескольких различных гиперребер.

Предложение 2. *Группа симметрии правильного многогранника действует на множестве его гиперграней транзитивно. Другими словами: для любой пары гиперграней правильного многогранника существует симметрия, переводящая одну из них в другую.*

Доказательство. Достаточно использовать только композицию отражений относительно гиперребер: одним таким отражением мы можем перевести любую гипергрань в смежную, а многократным — в любую.

Рассмотрим еще один тип симметрий правильного многогранника. Для этого выберем некоторую его гипервершину. В ней сходятся несколько гиперграней, каждая из которых смежна ровно с двумя другими по гиперребрам. Каждое гиперребро, в свою очередь, принадлежит ровно двум гиперграням. Из этого следует, что количества гиперребер и гиперграней, содержащих выбранную гипервершину, равны между собой. Обозначим это число через m. Тогда поворот на угол $2\pi/m$ относительно $(n-2)$-мерной плоскости (ее естественно назвать *гиперосью поворота*), проходящей через выбранную гипервершину и центр многогранника, переводит друг в друга по циклу сходящиеся в этой гипервершине гиперграни, а также сходящиеся в ней гиперребра, и является симметрией многогранника. Будем называть такую симметрию *поворотом вокруг гипервершины.*

Приведенное выше многомерное рассуждение полностью аналогично трехмерному случаю. Для обоснования правомочности этого рассуждения в любой размерности выберем некоторую внутреннюю точку гипервершины (напоминаем, что гипервершиной называется $(n-3)$-мерная грань), и рассмотрим сечение многогранника трехмерной плоскостью, ортогональной этой гипервершине и проходящей через выбранную точку. Тогда, заменив каждый объект его трехмерным сечением, мы сможем сохранить все рассуждения, отбросив всюду приставку «гипер».

Предложение 3. *Группа симметрии n-мерного правильного многогранника порождается n отражениями.*

Доказательство. Доказательство будем проводить индукцией по размерности многогранника. Для отрезка утверждение очевидно — его группа симметрии порождается одним отражением.

Рассмотрим правильный многогранник P размерности больше единицы и его гиперребро L, являющееся пересечением двух смежных гиперграней F и F'. Нам достаточно доказать, что группа $\operatorname{Sym} P$ порождается подгруппой $\operatorname{Sym} F$ и отражением s относительно гиперребра L. Для этого обозначим порожденную группой $\operatorname{Sym} F$ и отражением s группу через Γ, и будем доказывать, что любая симметрия многогранника P принадлежит Γ.

Любое гиперребро L' многогранника, принадлежащее гиперграни F (для нее оно является гипергранью), может быть получено из L некоторым движением $g \in \operatorname{Sym} F$ (в силу транзитивности действия этой группы на множестве гиперграней многогранника F). Тогда отражение относительно L' представляется в виде $g \circ s \circ g^{-1}$ (такая композиция называется *сопряжением* движения s движением g). Действительно, если мы сначала производим движение g^{-1}, затем — отражение относительно ребра L, и наконец — движение g, то результат будет тот же, что и при одном отражении относительно гиперребра L' (рис. 1). Это следует из того, что пара точек, симметричных относительно L, переходят при движении g в пару точек, симметричных относительно $L' = g(L)$. Значит, отражения относительно всех гиперребер многогранника, принадлежащих гиперграни F, принадлежат группе Γ.

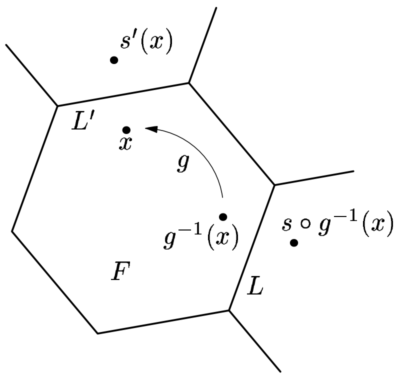

Рис. 1.

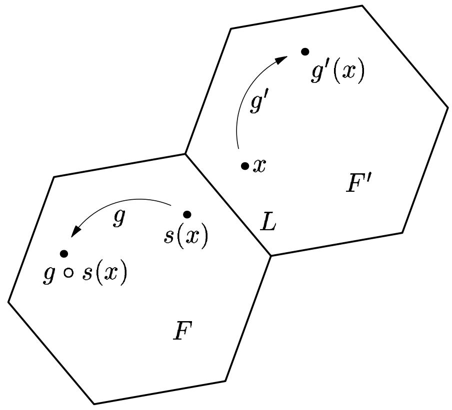

Рис. 2.

Аналогично, рассмотрим сопряжение $g' = s \circ g \circ s$ симметрии g отражением s (здесь последний сомножитель можно не обращать, поскольку $s^{-1} = s$) (рис. 2). Выбирая в качестве g всевозможные симметрии гиперграни F, мы получим в качестве g' всевозможные симметрии гиперграни F', поскольку g можно выразить через g' подобной же формулой $g = s \circ g' \circ s$. Поэтому все симметрии гиперграни F' также принадлежат Γ.

Можно повторить эти рассуждения, заменив F на F', затем на любую грань, смежную с F', и т. д. В результате оказывается, что группе Γ принадлежат все симметрии всех гиперграней многогранника и все отражения относительно гиперребер.

Рассмотрим теперь произвольное движение $g \in \operatorname{Sym} P$ и некоторую гипергрань F многогранника P. Мы уже знаем, что существует композиция отражений относительно гиперребер многогранника P, переводящая F в $g(F)$. Обозначим ее через w. Каждое отражение относительно гиперребра принадлежит Γ, значит, $w \in \Gamma$. Композиция $h = w^{-1} \circ g$ переводит гипергрань F в себя, поэтому $h \in \operatorname{Sym} F \subset \Gamma$. Следовательно, $g = w \circ h \in \Gamma$. А это и означает, что $\operatorname{Sym} P = \Gamma$.

Из доказательства вытекает следующий индуктивный способ построения последовательности $s_1, s_2, \ldots, s_n$ порождающих группу $\operatorname{Sym} P$ отражений. На первом шагу выбираем некоторое ребро F_1 многогранника P, содержащее вершину F_0. В качестве s_1 берем симметрию ребра F_1, переводящую вершину F_0 в другую его вершину. На k-м шагу ($2 \leqslant k \leqslant n$) мы выбираем k-мерную грань F_k, содержащую уже выбранную грань F_{k-1}, и в качестве s_k берем симметрию грани F_k, являющуюся отражением относительно гиперребра F_{k-2}. Первые k отражений $s_1, s_2, \ldots, s_k$ являются, очевидно, образующими группы $\operatorname{Sym} F_k$ симметрии грани F_k.

Таким образом, система образующих группы $\operatorname{Sym} P$ связана с набором попарно вложенных друг в друга граней F_0, F_1, $\ldots$, F_n, где $\dim F_k = k$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ и $F_{k-1} \subset F_k$ при $k \geqslant 1$. Такой набор граней называется *флагом многогранника*. Понятие флага может быть введено для любого выпуклого, а не только правильного, многогранника и играет важную роль при изучении его группы симметрии. Для любой пары флагов существует не более одного движения, переводящего один в другой. Группы симметрий правильных многогранников являются в некотором смысле самыми богатыми: симметрией можно перевести любой флаг в любой. Последнее свойство может быть взято в качестве определения правильного многогранника.

С каждым флагом связан многогранный конус с вершиной в центре многогранника, и направленными в центры всех принадлежащих ему граней ребрами (рис. 3). Он называется *фундаментальным конусом* правильного многогранника. Гиперплоскости отражений s_1, s_2, $\ldots$, s_n являются гипергранями фундаментального конуса.

Предложение 4. *Фундаментальный конус правильного многогранника является многогранником Кокстера; его схема Кокстера линейна и связна.* (*Определения см. в* [2].)

Доказательство. Докажем, что если $|l-k| > 1$, то гиперплоскости отражений s_k и s_l перпендикулярны. Без ограничения общности можно считать, что $k < l$. Рассмотрим такое i, что $k < i < l$. Тогда гиперплоскость отражения s_k перпендикулярна F_{i-1}, а гиперплоскость отражения s_l содержит F_{i-1}. Значит, эти плоскости перпендикулярны.

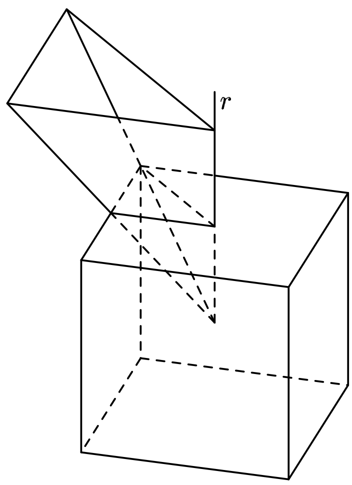

Рис. 3.

Теперь найдем угол между гиперплоскостями отражений s_{k-1} и s_k. Композиция двух любых отражений — это поворот вокруг $(k-2)$-мерной плоскости, являющейся пересечением гиперплоскостей этих отражений. Угол поворота равен удвоенному углу между этими гиперплоскостями. Мы знаем, что композиция отражений s_{k-1} и s_k является поворотом вокруг гипервершины F_{k-3} грани F_k на угол $2\pi/m$, где m — количество сходящихся в этой гипервершине гиперграней (или гиперребер). Значит, угол между гиперплоскостями отражений s_{k-1} и s_k равен π/m. Заметим, что $m \geqslant 3$, поэтому эти гиперплоскости не перпендикулярны.

Итак, угол между любыми двумя гипергранями фундаментального конуса является целой частью π, поэтому он является многогранником Кокстера. Грани с несоседними номерами перпендикулярны, поэтому его схема Кокстера линейна. Грани с соседними номерами не перпендикулярны, поэтому она связна.

Фундаментальный конус высекает на $(n-1)$-мерной сфере симплекс Кокстера. Например, для додекаэдра и икосаэдра получается треугольник с углами $(\pi/2, \pi/3, \pi/5)$. Замощение сферы такими треугольниками приведено на рис. 9 статьи [3].

Каждому правильному многограннику мы поставили в соответствие схему Кокстера его фундаментального конуса. Для простоты будем называть ее *схемой Кокстера правильного многогранника.* Поскольку грани фундаментального конуса естественным образом перенумерованы, эта же нумерация сохраняется и для вершин схемы Кокстера.

Отражения s_1 и s_n соответствуют двум висячим вершинам схемы. Поэтому при задании правильного многогранника схемой Кокстера существенную роль играет ее ориентация — а именно, какая висячая вершина соответствует первому отражению (s_1), а какая — последнему (s_n). Связную линейную схему Кокстера мы будем называть *ориентированной*, если указано, какая из двух ее висячих вершин является началом, а какая — концом.

Сформулируем два свойства схемы Кокстера правильного многогранника, которые фактически уже были доказаны ранее.

▷ Отметка на ребре, соединяющем $(k-1)$-ю и k-ю вершины схемы Кокстера, (или, что то же самое, увеличенная на два кратность этого ребра) равна количеству $(k-1)$-мерных (или $(k-2)$-мерных) граней многогранника, содержащихся в некоторой фиксированной k-мерной грани и содержащих некоторую фиксированную $(k-3)$-мерную грань.

▷ Подсхема, содержащая первые k вершин схемы, является схемой Кокстера k-мерной грани.

Предложение 5. *Каждая ориентированная связная линейная эллиптическая схема Кокстера соответствует ровно одному правильному многограннику.*

Доказательство. *Существование.* Рассмотрим множество отражений s_1, s_2, ..., s_n, соответствующих заданной схеме Кокстера, порождаемую ими группу Γ, симплициальный конус, гранями которого являются гиперплоскости рассматриваемого множества порождающих отражений, а также ребро r этого конуса, являющееся пересечением всех его гиперграней, кроме последней (рис. 3). Пусть Π — гиперплоскость, ортогональная рассматриваемому ребру, а Π^- — полупространство с границей Π, содержащее вершину конуса. Тогда пересечение семейства полупространств, получаемых из Π^- движениями из группы Γ, является искомым правильным многогранником. Докажем это. Гиперплоскость Π одной из его гиперграней можно перевести движением из группы Γ в любую другую по построению. При этом сами гиперграни также переходят друг в друга. Значит, все гиперграни многогранника равны. Они являются правильными многогранниками (тут, строго говоря, нужно применить индукцию). Группа, порожденная s_1, s_2, ..., s_{n-1}, является группой симметрии этой гиперграни, поэтому действует транзитивно на принадлежащих ей гиперребрах. Значит, все двугранные углы при этих гиперребрах равны. Следовательно, построенный многогранник — правильный.

Единственность. Докажем, что любой правильный многогранник с заданным фундаментальным конусом может быть построен приведенным выше (при доказательстве существования) способом. Действительно, гиперплоскость одной из его гиперграней должна быть ортогональной ребру r, а остальные получаются из нее движениями из группы Γ. Единственная имеющаяся при таком построении свобода состоит в выборе гиперплоскости Π из семейства параллельных гиперплоскостей. Очевидно, что все получаемые таким образом многогранники подобны.

При изменении ориентации схемы соответствующий ей правильный многогранник переходит в двойственный. Таким образом, несимметричные связные линейные схемы Кокстера соответствуют парам двойственных многогранников, а симметричные — самодвойственным многогранникам.

Все связные эллиптические схемы Кокстера перечислены в табл. 2 статьи [2]. Воспользовавшись этой классификацией, нетрудно выписать все ориентированные связные линейные эллиптические схемы Кокстера и для каждой из них указать соответствующий правильный многогранник. Это сделано в табл. 1. Нумерация вершин всегда идет слева направо. Четырехмерные аналоги трехмерных правильных многогранников мы назвали теми же именами, добавив приставку «гипер».

n	Схема	Многогранник
1	○	отрезок
2	$\circ\overset{m}{—}\circ$	m-угольник
3	○—○—○	тетраэдр (симплекс)
	○═○—○	куб
	○—○═○	октаэдр (кокуб)
	○≡○—○	додекаэдр
	○—○≡○	икосаэдр
4	○—○—○—○	гипертетраэдр (симплекс)
	○═○—○—○	гиперкуб (куб)
	○—○—○═○	гипероктаэдр (кокуб)
	○≡○—○—○	гипердодекаэдр (120-гранник)
	○—○—○≡○	гиперикосаэдр (600-гранник)
	○—○═○—○	24-гранник
$\geqslant 5$	○—○—○—○-···-○	симплекс
	○═○—○—○-···-○	куб
	○—○—○-···-○═○	кокуб

Табл. 1.

Более подробно о строении правильных многогранников написано в книгах [1, 4]. Там же имеются двумерные изображения некоторых четырехмерных правильных многогранников.

Задача. Докажите, что замощения n-мерного евклидова пространства правильными многогранниками классифицируются ориентированными связными линейными параболическими схемами Кокстера. Найдите все такие замощения с помощью табл. 3 статьи [2].

Список литературы

[1] Берже М. *Геометрия.* Том. 1. М.: Мир, 1984. 560 с.

[2] Бугаенко В. О. *Классификация многогранников Кокстера* // Математическое просвещение, 2003. Сер. 3. Вып. 7. С. 82–106.

[3] Винберг Э. Б. *Калейдоскопы и группы отражений* // Математическое просвещение, 2003. Сер. 3. Вып. 7. С. 45–63.

[4] Кокстер Г. С. М. *Введение в геометрию.* М.: Наука, 1966. 648 с.