Вокруг монгольского неравенства

А. И. Храбров

Неравенство, о котором здесь пойдет речь, было предложено В. Адъясурэном на 31 монгольской олимпиаде (в заданиях для учителей).

Для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$*, удовлетворяющих условию* $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$*, имеет место неравенство*

$$\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_2+a_3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n+a_1}{2} \leqslant \\ \leqslant \frac{a_1+a_2+a_3}{3}\cdot\frac{a_2+a_3+a_4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n+a_1+a_2}{3}. \quad (1)$$

Решение, напечатанное в сборнике олимпиадных задач, оказалось, увы, неверным.

Из-за своей простой формулировки неравенство быстро распространилось. Каждый, кто узнавал о нем, обычно говорил, что оно не может быть очень трудным, просто все недостаточно хорошо старались. Однако, за несколько лет неравенство удалось проверить лишь в некоторых частных случаях, например, для $n=4$ или для $n=5$, последнее даже без предположения об упорядоченности (см. §4.2). Кроме того, была доказана справедливость этого неравенства при дополнительных ограничениях на числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Доказать неравенство в общем случае никак не получалось. Возникло даже предположение о том, что, как и неравенство Шапиро (см. §4.5), неравенство (1) справедливо не при всех натуральных n. Однако компьютерное построение контрпримера при больших n также не приводило к успеху. Наконец, в 1999 году произошел прорыв: Д. С. Челкак придумал доказательство этого неравенства, основанное на представлении $\ln b - \ln a = \int\limits_a^b \frac{dx}{x}$ (оно приводится ниже в §4). Через год для вывода этого неравенства С. Е. Рукшин предложил использовать неравенство Караматы. А уже в 2001 году на летних сборах по подготовке команды России к международной олимпиаде по математике М. Я. Пратусевич выдал это неравенство в качестве упражнения к занятиям, на которых рассказывалась теория мажоризации и доказательство неравенств с помощью выпуклости по Шуру. Неравенство оказалось следствием достаточно солидно разработанной теории — теории мажоризации. Причем это единственное известное автору неравенство, из предлагавшихся на олимпиадах, которое не удалось доказать без этой теории. Именно этим и обуславливается тот факт, что теория мажоризации ускользнула от внимания любителей математических олимпиад. Из неравенств, имеющим отношение к теории мажоризации, лишь неравенство Мюрхеда (см., например, [6, §11] или [7, §2.18]) широко используется участниками математических олимпиад.

Настоящая статья пытается в некоторой степени восполнить этот пробел. В ней мы расскажем о наиболее простом и при этом очень мощном средстве теории мажоризации — неравенстве Караматы, приведем два доказательства монгольского неравенства, а также нескольких близких неравенств.

§1. Неравенство Караматы

Определение 1. Невозрастающий набор вещественных чисел $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *мажорирует* невозрастающий набор вещественных чисел $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, если при k от 1 до $n-1$ выполнены условия $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \geqslant y_1 + y_2 + \ldots + y_k$ и $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$. Если X мажорирует Y, мы будем писать $X \succ Y$ или $Y \prec X$.

В случае, когда $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — произвольные наборы вещественных чисел, мы будем говорить, что X мажорирует Y и писать $X \succ Y$ или $Y \prec X$, если для их невозрастающих перестановок X^* и Y^* выполнено $X^* \succ Y^*$.

Пример 1. $(1, 0, \ldots, 0) \succ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right) \succ \cdots \succ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$, и вообще, если x_1, x_2, …, x_n неотрицательные числа, сумма которых равна 1, то $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) \prec (x_1, x_2, \ldots, x_n) \prec (1, 0, \ldots, 0)$.

Пример 2. Наборы $(5, 5, 0)$ и $(6, 2, 2)$ несравнимы, т. е. ни один из них не мажорирует другой.

Пример 3. Если все числа y_k равны среднему арифметическому чисел x_1, x_2, …, x_n, то $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \succ (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Неравенство Караматы. Пусть $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция, x_1, x_2, …, x_n, y_1, y_2, …, $y_n \in (a, b)$ и $(x_1, \ldots, x_n) \succ (y_1, \ldots, y_n)$. Тогда

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \geqslant f(y_1) + f(y_2) + \ldots + f(y_n). \tag{2}$$

Если $f(x)$ — вогнутая функция, то

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \leqslant f(y_1) + f(y_2) + \ldots + f(y_n).$$

Замечание. Название неравенства (2) в честь Караматы довольно спорно. В 1923 г. Шур [15] доказал неравенство (2), несколько иначе сформулировав условие мажоризации. В 1929 г. Харди, Литтлвуд и Полиа [12] сформулировали это неравенство и доказали его непрерывный аналог. Через три года Карамата [13] также установил неравенство (2) и доказал некоторое его обобщение.

Доказательство неравенства Караматы. Центральным моментом доказательства является преобразование Абеля:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n,$$

где $A_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$. Можно считать, что $x_k \neq y_k$, в противном случае сократим правую и левую части на $f(x_k) = f(y_k)$. Положим

$$D_k = \frac{f(x_k) - f(y_k)}{x_k - y_k}, \quad X_k = x_1 + \ldots + x_k \text{ и } Y_k = y_1 + \ldots + y_k.$$

Условие $X \succ Y$ означает, что $X_k \geqslant Y_k$ при $k \leqslant n-1$ и $X_n = Y_n$. Из леммы о трех хордах следует, что $D_k \geqslant D_{k+1}$. Стало быть,

$$\sum_{k=1}^{n-1} (X_k - Y_k)(D_k - D_{k+1}) + (X_n - Y_n)D_n \geqslant 0.$$

Применим к левой части преобразование Абеля ($a_k = x_k - y_k$, $b_k = D_k$), получим:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)D_k \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(y_k)) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k) \cdot \frac{f(x_k) - f(y_k)}{x_k - y_k} = \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)D_k \geqslant 0. \quad \square$$

Замечание 1. Другие доказательства неравенства Караматы можно узнать из книг Харди, Литтлвуда и Полиа [7, §3.17] или Беккенбаха и Беллмана [1, глава 1, §28].

Замечание 2. Условие $X \succ Y$ является не только достаточным для выполнения неравенства (2), но и необходимым. А именно, если x_1, x_2, $\ldots$, x_n, y_1, y_2, $\ldots$, $y_n \in (a, b)$, а наборы чисел $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ таковы, что неравенство (2) имеет место для любой выпуклой функции $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, то $X \succ Y$.

Аналогичные рассуждения позволяют доказать и

Неравенство Фукса (см. [11]). Пусть $f(x)$ — выпуклая функция, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — положительные числа, $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$, $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n$,

$$\sum_{i=1}^{k} p_i x_i \geqslant \sum_{i=1}^{k} p_i y_i \quad \text{при } 1 \leqslant k \leqslant n-1 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \sum_{i=1}^{n} p_i y_i.$$

Тогда

$$p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \ldots + p_n f(x_n) \geqslant p_1 f(y_1) + p_2 f(y_2) + \ldots + p_n f(y_n).$$

Замечание. Если положить $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ и $y_1 = \ldots = y_n = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$, то неравенство Фукса превратится в неравенство Йенсена.

§2. Приложения неравенства Караматы

Пример 1. Для любых положительных числах a, b и c имеет место неравенство

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leqslant \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}\,.$$

Применим неравенство Караматы для выпуклой функции $1/x$ и наборов $(2a, 2b, 2c) \succ (a+b, a+c, b+c)$.

Пример 2. (Азиатско–Тихоокеанская олимпиада, 1996.) Пусть a, b и c — длины сторон треугольника. Тогда имеет место неравенство

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\,.$$

Применим неравенство Караматы для вогнутой функции $\sqrt{x}$ и наборов $(a+b-c, c+a-b, b+c-a) \succ (a, b, c)$.

Пример 3. (Международная олимпиада, 2000.) Для чисел a, b, $c > 0$, удовлетворяющих условию $abc = 1$, справедливо неравенство

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqslant 1.$$

Из условия $abc = 1$ следует, что $a = x/y$, $b = y/z$ и $c = z/x$. В новых обозначениях неравенство примет вид $(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y) \leqslant xyz$ или, после логарифмирования,

$$\ln(x-y+z) + \ln(y-z+x) + \ln(z-x+y) \leqslant \ln x + \ln y + \ln z.$$

Последнее следует из неравенства Караматы для вогнутой функции $\ln x$ и наборов $(x-y+z, y-z+x, z-x+y) \succ (x, y, z)$.

Пример 4. (Неравенство Сегё, [18].) Пусть $\varphi(x)$ — выпуклая функция, $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{2n-1} \geqslant 0$, тогда

$$\varphi(a_1) - \varphi(a_2) + \varphi(a_3) - \ldots + \varphi(a_{2n-1}) \geqslant \varphi(a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + a_{2n-1}).$$

Положим для краткости $a = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots - a_{2n-1}$. Неравенство Сегё можно переписать в виде

$$\varphi(a_1) + \varphi(a_3) + \ldots + \varphi(a_{2n-1}) \geqslant \varphi(a) + \varphi(a_2) + \ldots + \varphi(a_{2n-2}).$$

Таким образом, достаточно установить, что $(a_1, a_3, \ldots, a_{2n-3}, a_{2n-1}) \succ$ $\succ (a_2, a_4, \ldots, a_{2n-4}, a_{2n-2}, a)$, что очевидно, поскольку суммы чисел в наборах равны и $a_{2k-1} \geqslant a_{2k}$ при всех k.

Пример 5. (Неравенство Швейцера, [16].) Если $M \geqslant a_k \geqslant m$ при $k =$ $= 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, то

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM} \cdot n^2.$$

Несложно показать, что найдутся такие числа $k \in \mathbb{Z}$ и $\mu \in [m, M)$, что $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \prec (m, \ldots, m, \mu, M, \ldots, M)$, где число m выписано k раз, а число M — $n - k - 1$ раз. Стало быть, нужно проверить неравенство Швейцера для набора $m,\ \ldots,\ m,\ \mu,\ M,\ \ldots,\ M$. С помощью неравенства Йенсена это сводится к элементарному неравенству $(0 \leqslant \alpha \leqslant n)$

$$(\alpha m + (n-\alpha)M)\left(\frac{\alpha}{m} + \frac{n-\alpha}{M}\right) \leqslant n^2 \frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

Два доказательства неравенства Швейцера, не использующее неравенство Караматы, можно прочитать в статье автора [8].

Пример 6. (Международная олимпиада, 1999.) Пусть $n \geqslant 2$. Определите наименьшую константу C такую, что неравенство

$$\sum_{1 \leqslant i < k \leqslant n} x_i x_k (x_i^2 + x_k^2) \leqslant C \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^4.$$

выполняется для всех действительных чисел $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \geqslant 0$.

Поскольку неравенство однородно, можно считать, что $x_1 + x_2 + \ldots +$ $+ x_n = 1$. В этом случае неравенство может быть переписано в виде

$$x_1^3(1 - x_1) + x_2^3(1 - x_2) + \ldots + x_n^3(1 - x_n) \leqslant C.$$

Функция $f(x) = x^3(1 - x)$ выпукла на отрезке $[0, 1/2]$. Пусть x_1 — наибольшее из чисел. Тогда числа $x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n$ не превосходят $1/2$ и $(1 - x_1, 0, \ldots, 0) \succ (x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Следовательно,

$$f(x_1) + \ldots + f(x_n) \leqslant f(x_1) + f(1 - x_1) + (n-2)f(0) = f(x_1) + f(1 - x_1) \leqslant \frac{1}{8}.$$

Пример 7. Пусть α, β и γ углы треугольника. Тогда

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha, \beta, \gamma) \prec (\pi, 0, 0) \quad \text{для всех треугольников,}$$

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha, \beta, \gamma) \prec \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right) \quad \text{для остроугольных треугольников,}$$

$$\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) \prec (\alpha,\beta,\gamma) \prec (\pi,0,0) \qquad \text{для тупоугольных треугольников.}$$

Подставляя эти наборы в неравенство Караматы для конкретных выпуклых и вогнутых на отрезке $[0,\pi]$ функций мы получим разнообразные неравенства на углы треугольника. Например, все неравенства из задачника Прасолова ([5], часть 1, глава 19, §5) могут быть получены таким образом.

Множество приложений неравенства Караматы можно найти в книге Маршалла и Олкина [4]. Там же обсуждаются способы проверки условия $X \succ Y$, устанавливается, для каких функций F от n переменных условие $X \succ Y$ влечет неравенство

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n) \geqslant F(y_1,y_2,\ldots,y_n).$$

Например, это верно для всех выпуклых симметрических функций F или для любой дифференцируемой симметрической функции F, для которой

$$(x_1-x_2)\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}-\frac{\partial F}{\partial x_2}\right) \geqslant 0 \quad \text{при всех } x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \geqslant 0.$$

§3. Доказательство монгольского неравенства

Положим для краткости

$$x_1=\frac{a_1+a_2}{2}, \qquad \ldots, \qquad x_{n-1}=\frac{a_{n-1}+a_n}{2}, \qquad x_n=\frac{a_n+a_1}{2}$$
$$y_1=\frac{a_1+a_2+a_3}{3}, \qquad \ldots, \qquad y_{n-1}=\frac{a_{n-1}+a_n+a_1}{3}, \qquad y_n=\frac{a_n+a_1+a_2}{3}.$$

Нам требуется доказать, что $x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n \leqslant y_1y_2\cdot\ldots\cdot y_n$ или, после логарифмирования,

$$\ln x_1+\ln x_2+\ldots+\ln x_n \leqslant \ln y_1+\ln y_2+\ldots+\ln y_n. \tag{3}$$

Поскольку $\ln x$ — вогнутая функция, учитывая неравенство Караматы, достаточно установить, что $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n) \succ Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$. Обозначим через $X^*=(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)$ и $Y^*=(y_1^*,y_2^*,\ldots,y_n^*)$ невозрастающие перестановки наборов X и Y. Следующие соотношения легко следуют из определения чисел x_k и y_k:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=y_1+y_2+\ldots+y_n, \tag{4}$$
$$x_1 \geqslant y_1 \geqslant x_2 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{n-2} \geqslant y_{n-2} \geqslant x_{n-1}, \tag{5}$$
$$x_n \geqslant x_{n-1} \quad \text{и} \quad y_n \geqslant y_{n-1} \geqslant y_{n-2} \geqslant x_n, \tag{6}$$
$$\sum_{i=1}^{k}(x_i-y_i)=\frac{1}{6}(a_1+2a_2-a_{k+1}-2a_{k+2}) \quad \text{при } k \leqslant n-2. \tag{7}$$

Положим $(\alpha)_+=\max\{\alpha,0\}$. Для проверки мажоризации $X \succ Y$ сравним суммы $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i^*$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} y_i^*$. Равенство при $k = n$ следует из соотношения (4), неравенство при $k = n-1$ получается с помощью вычитания из (4) неравенства $x_{n-1} \leqslant y_{n-2}$. Поскольку числа $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ идут в невозрастающем порядке, то среди k наибольших чисел обязательно будут числа $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$, а оставшимся числом будет большее из чисел x_k и x_n. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^* = \sum_{i=1}^{k} x_i + (x_n - x_k)_+ \,. \tag{8}$$

Аналогично устанавливается равенство

$$\sum_{i=1}^{k} y_i^* = \sum_{i=1}^{k} y_i + (y_n - y_k)_+ + (y_{n-1} - y_{k-1})_+ \,. \tag{9}$$

Итак, нам осталось проверить при всех $k \leqslant n-1$ неравенства $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i^* \geqslant \sum\limits_{i=1}^{k} y_i^*$ при $x_{n-2} \leqslant y_{n-2}$. Или, учитывая соотношения (8) и (9),

$$\sum_{i=1}^{k} x_i + (x_n - x_k)_+ \geqslant \sum_{i=1}^{k} y_i + (y_n - y_k)_+ + (y_{n-1} - y_{k-1})_+ \,.$$

Домножим на 6, перенесем сумму $\sum y_i$ в левую часть, воспользуемся соотношением (7) и запишем разности $x_k - x_n$, $y_k - y_n$ и $y_{k-1} - y_{n-1}$ с помощью чисел a_i. Ровно к такому же результату можно прийти, если сложить три неравенства, легко получаемых из свойств $(\alpha)_+$:

$$\begin{aligned}
&2(a_2 - a_{k+2}) + 2(a_1 + a_n - a_k - a_{k+1})_+ \geqslant \\
&\qquad\qquad \geqslant 2(a_n + a_1 + a_2 - a_k - a_{k+1} - a_{k+2})_+ \,, \\
&a_1 - a_{k+1} = (a_1 - a_{k+1}) + (a_{n-1} + a_n - a_{k-1} - a_k)_+ \geqslant \\
&\qquad\qquad \geqslant (a_{n-1} + a_n + a_1 - a_{k-1} - a_k - a_{k+1})_+ \,, \\
&(a_n + a_1 - a_k - a_{k+1})_+ = (a_n + a_1 - a_k - a_{k+1})_+ + (a_{n-1} - a_{k-1})_+ \\
&\qquad\qquad \geqslant (a_{n-1} + a_n + a_1 - a_{k-1} - a_k - a_{k+1})_+ \,.
\end{aligned}$$

Монгольское неравенство доказано. □

Пример 1. Аналогично для вогнутой функции $\sqrt{x}$ из неравенства Караматы для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющих условию $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$, следует неравенство

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{a_1 + a_2}{2}} + \sqrt{\frac{a_2 + a_3}{2}} + \ldots + \sqrt{\frac{a_n + a_1}{2}} \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant \sqrt{\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}} + \sqrt{\frac{a_2 + a_3 + a_4}{3}} + \ldots + \sqrt{\frac{a_n + a_1 + a_2}{3}}.
\end{aligned}$$

Пример 2. Так же можно показать, что для положительных чисел a, b и c имеет место неравенство

$$\sqrt{a^2+4b}+\sqrt{b^2+4c}+\sqrt{c^2+4a}\geqslant\sqrt{a^2+4a}+\sqrt{b^2+4b}+\sqrt{c^2+4c}.$$

§4. Интегральное доказательство монгольского неравенства

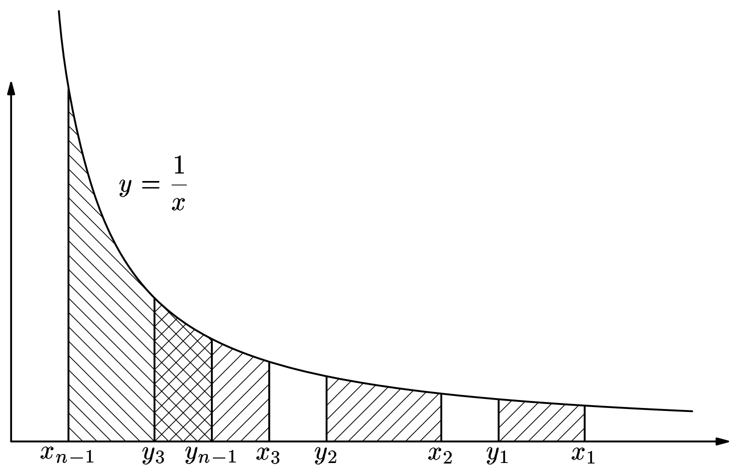
Будем использовать обозначения предыдущего параграфа. Нам требуется доказать, что

$$\ln y_1+\ln y_2+\ldots+\ln y_n\geqslant\ln x_1+\ln x_2+\ldots+\ln x_n.$$

Перенесем $\ln x_k$ в левую часть и воспользуемся интегральным представлением логарифма $\ln b-\ln a=\int\limits_a^b\frac{dx}{x}$:

$$(\ln y_1-\ln x_1)+\ldots+(\ln y_n-\ln x_n)=\int\limits_{x_1}^{y_1}\frac{dx}{x}+\ldots+\int\limits_{x_n}^{y_n}\frac{dx}{x}\geqslant 0. \qquad (10)$$

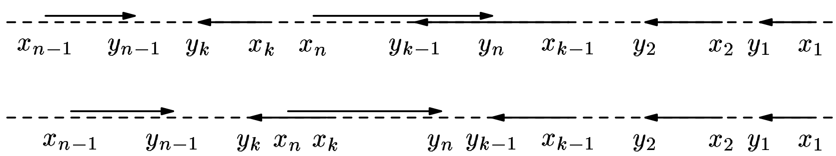
Здесь, в случае, когда $a>b$, мы полагаем $\int\limits_a^b\frac{dx}{x}=-\int\limits_b^a\frac{dx}{x}$. Интеграл $\int\limits_a^b\frac{dx}{x}$ равен площади, заключенной между вертикальными прямыми $y=a$ и $y=b$, расположенной между гиперболой $y=1/x$ и осью Ox. На рисунке, площади, считаемые со знаком «+», заштрихованы сверху-направо , а считаемые со знаком «−» заштрихованы сверху-налево . Для краткости в первом случае отрезок $[a,b]$ будем называть положительным, а во втором случае — отрицательным.



Заметим, что из условия (4) следует, что суммарная длина положительных отрезков равна суммарной длине отрицательных. Из неравенств (5) и (6) заключаем, что отрезки $[y_1, x_1]$, $[y_2, x_2]$, $\ldots$, $[y_{n-2}, x_{n-2}]$ отрицательны и не пересекаются. Стало быть, положительными могут быть только отрезки $[x_{n-1}, y_{n-1}]$ и $[x_n, y_n]$. Значит, их общее число равно 1 или 2.

1. Пусть положительный отрезок ровно один. Левый конец положительного отрезка расположен левее остальных отрезков, ибо $x_k \geqslant x_{n-1}$ и $y_k \geqslant x_{n-1}$ при всех $k \leqslant n$. Поскольку функция $1/x$ монотонно убывает, то движение отрицательного отрезка $[y_k, x_k]$ влево только увеличивает интеграл $\int\limits_{y_k}^{x_k} \frac{dx}{x}$, который мы берем со знаком «$-$». Поэтому при таком движении мы лишь уменьшаем левую часть неравенства (10). Когда мы сдвинем все отрицательные отрезки вправо, они в точности уместятся без наложений в положительном отрезке $[x_{n-1}, y_{n-1}]$, ибо длина положительного отрезка равна суммарной длине отрицательных. Следовательно, сумма интегралов по сдвинутым отрезкам равна нулю и, значит, сумма исходных интегралов неотрицательна.

2. Пусть положительных отрезков ровно два. Поскольку отрицательные отрезки не пересекаются, нам достаточно показать, что, двигая отрицательные отрезки влево, мы сможем уместить их в двух положительных. Для этого все отрезки, умещающиеся в отрезке $[x_n, y_n]$, мы поместим в него, а остальные подвинем еще левее в отрезок $[x_{n-1}, y_{n-1}]$. При этом, возможно, один из отрицательных отрезков придется разделить на две части. Все отрицательные отрезки лежат правее x_{n-1}, поэтому достаточно проверить, что суммарная длина отрицательных отрезков, лежащих правее x_n, не меньше чем длина отрезка $[x_n, y_n]$. В этом случае сдвигами влево отрицательных отрезков, лежащих правее точки x_n, удастся накрыть отрезок $[x_n, y_n]$ «без пустот», а в силу равенства сумм длин положительных и отрицательных отрезков оставшиеся отрицательные отрезки в точности уместятся в отрезке $[x_{n-1}, y_{n-1}]$.



Пусть $y_k \leqslant x_n \leqslant y_{k-1}$, в этом случае все отрезки $[y_1, x_1]$, $[y_2, x_2]$, $\ldots$, $[y_{k-1}, x_{k-1}]$ лежат правее точки x_n. Также, возможно, правее точки x_n лежит часть отрезка $[y_k, x_k]$, длина этой части равна $(x_k - x_n)_+$ (мы считаем длину равной нулю, если такой части нет). Убедимся в том, что, сдвигая влево эти отрезки, мы сможем накрыть отрезок $[x_n, y_n]$. Для этого достаточно проверить, что

$$(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + \ldots + (x_{k-1} - y_{k-1}) + (x_k - x_n)_+ \geqslant y_n - x_n.$$

Последнее получается с помощью применения соотношения (7) к сумме неравенств

$$\begin{aligned} a_1 - a_{k+1} + (a_k + a_{k+1} - a_n - a_1)_+ &\geqslant (a_k - a_n)_+ \geqslant 0,\\ (a_k + a_{k+1} - a_n - a_1)_+ &\geqslant a_k + a_{k+1} - a_n - a_1,\\ (a_k + a_{k+1} - a_n - a_1)_+ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Таким образом, и в случае, когда имеется два положительных отрезка, сдвигая влево отрицательные отрезки, можно уместить их без наложений в положительных отрезках. Сумма интегралов по сдвинутым отрезкам равна нулю и, значит, сумма исходных интегралов неотрицательна. Неравенство доказано. □

Замечание. Немного модифицировав рассуждение с площадями, можно доказать и неравенство Караматы для выпуклой дифференцируемой функции.

§5. Не только монгольское неравенство

Неравенство, с которого мы начали изложение, порождает ряд вопросов. Например, при каких n можно обойтись без условия упорядоченности чисел a_1, a_2, …, a_n или насколько нужно увеличить правую часть, чтобы неравенство (1) имело место без условия упорядоченности. Попробуем в некоторых случаях ответить на эти вопросы. Для удобства будем полагать $a_{n+k} = a_k$.

1. При $n = 3$ неравенство следует из неравенства о средних для чисел $\frac{1}{2}(a_1 + a_2)$, $\frac{1}{2}(a_2 + a_3)$ и $\frac{1}{2}(a_3 + a_1)$.

2. Докажем неравенство при $n = 5$. Заметим, что для положительных x и y, удовлетворяющих условию $x + y \leqslant 1$ имеет место неравенство

$$\left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{y} - 1\right) \geqslant \left(\frac{2}{x+y} - 1\right). \qquad (11)$$

В частности, функция $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$ выпукла на отрезке $(0, 1/2]$.

Положим $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_5$. Тогда доказываемое неравенство можно переписать в виде

$$\left(\frac{S}{a_1 + a_2} - 1\right)\left(\frac{S}{a_2 + a_3} - 1\right)\ldots\left(\frac{S}{a_5 + a_1} - 1\right) \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^5.$$

Поскольку $\frac{a_k+a_{k+1}}{S}+\frac{a_{k+2}+a_{k+3}}{S}\leqslant 1$, неравенство (11) можно применить к парам скобок, идущим через одну:

$$\left(\frac{S}{a_k+a_{k+1}}-1\right)\left(\frac{S}{a_{k+2}+a_{k+3}}-1\right)\geqslant$$
$$\geqslant\left(\frac{2S}{a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3}}-1\right)^2=\left(\frac{2S}{S-a_{k-1}}-1\right)^2.$$

Таким образом, достаточно проверить неравенство

$$\left(\frac{2S}{S-a_1}-1\right)\left(\frac{2S}{S-a_2}-1\right)\ldots\left(\frac{2S}{S-a_5}-1\right)\geqslant\left(\frac{3}{2}\right)^5,$$

являющееся следствием неравенства Йенсена для функции $f(x)$ и чисел $\frac{S-a_k}{2S}$.

3. Перепишем неравенство (1) в виде

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{a_1+a_2}\cdot\frac{a_2+a_3+a_4}{a_2+a_3}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n+a_1+a_2}{a_n+a_1}\geqslant\lambda^n, \tag{12}$$

где $\lambda=3/2$.

При n, отличном от 3 и 5, неравенство (12) с $\lambda=3/2$ не имеет места. Покажем это. Предположим сначала, что $n=2m$. Возьмем $a_1=a_3=\ldots=a_{2m-1}=1$ и $a_2=a_4=\ldots=a_{2m}=a$. В этом случае неравенство (12) примет вид

$$\left(\frac{2+a}{1+a}\right)^m\left(\frac{1+2a}{1+a}\right)^m\geqslant\lambda^{2m}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2m}.$$

Извлечем корень m-й степени и перейдем к пределу при $a\to 0$, получим $2\cdot 1\geqslant\lambda^2=\frac{9}{4}$, что неверно. Следовательно, при четных n неравенство (12) с $\lambda>\sqrt{2}$ не может быть выполнено для всех наборов $\{a_k\}$.

Пусть далее $n=2m+1$. Возьмем $a_1=a_3=\ldots=a_{2m-1}=a_{2m+1}=1$ и $a_2=a_4=\ldots=a_{2m}=a$. В этом случае неравенство (12) примет вид

$$\left(\frac{2+a}{1+a}\right)^m\left(\frac{1+2a}{1+a}\right)^m\left(\frac{2+a}{2}\right)\geqslant\lambda^{2m}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2m}.$$

Переходя к пределу при $a\to 0$, получим $2^{m+1}\cdot 1^m\geqslant\lambda^{2m}=(3/2)^{2m}$, что неверно при $m\geqslant 2$. Следовательно, при нечетных $n\geqslant 5$ неравенство (12) с $\lambda=3/2$ не может быть выполнено.

4. Покажем, что при $\lambda=\sqrt{2}$ неравенство (12) выполнено для всех n. Возведем неравенство в квадрат. Заметим, что

$$(a_{k-1}+a_k+a_{k+1})(a_k+a_{k+1}+a_{k+2})\geqslant$$
$$\geqslant(a_k+a_{k+1})(a_{k-1}+a_k+a_{k+1}+a_{k+2})\geqslant$$
$$\geqslant 2\sqrt{a_{k-1}+a_k}\,(a_k+a_{k+1})\sqrt{a_{k+1}+a_{k+2}}$$

(для доказательства первого неравенства достаточно раскрыть скобки, второе неравенство — это неравенство о средних для двух чисел). Применяя это неравенство для всех k, получаем требуемое.

Как мы установили, при четных n неравенство (12) для $\lambda > \sqrt{2}$ не имеет места, поэтому наибольшее возможное λ равно $\sqrt{2}$. Для нечетных n наибольшее λ, для которого выполнено неравенство (12), автору неизвестно.

5. Если переписать неравенство (12) в виде

$$\left(1+\frac{a_3}{a_1+a_2}\right)\left(1+\frac{a_4}{a_2+a_3}\right)\dots\left(1+\frac{a_2}{a_n+a_1}\right)\geqslant\lambda^n, \tag{13}$$

то оно станет мультипликативным аналогом неравенства Шапиро [17]:

$$\frac{a_3}{a_1+a_2}+\frac{a_4}{a_2+a_3}+\dots+\frac{a_2}{a_n+a_1}\geqslant\frac{n}{2}. \tag{14}$$

История этого неравенства популярно рассказана в статье Курляндчика и Файбусовича [3], а исчерпывающую информацию можно найти в статьях Клаузинга [9] и Финка [10]. Отметим, что сходство между неравенствами (13) и (14) не только внешнее. Неравенство Шапиро также справедливо только при условии монотонности чисел a_1, a_2, $\dots$, a_n. Без предположения монотонности неравенство Шапиро оказывается верным лишь при $n = 3$, 4, $\dots$, 13, 15, 17, 19, 21 и 23, для остальных n оно неверно. Дринфельд [2] установил, что неравенство будет справедливо при всех n, если в левой части $n/2$ заменить на $0,494/n$. Полный список n, для которых неравенство выполнено, удалось установить только через 35 лет после появления задачи в "The American Mathematical Monthly". За это время вышло более 30 статей, посвященных этому неравенству. Но и здесь еще не поставлены все точки над i.

Заинтересовавшимся читателям предлагаем поразмышлять над неравенством

$$\left(1+\frac{a_3t}{a_1+a_2}\right)\left(1+\frac{a_4t}{a_2+a_3}\right)\dots\left(1+\frac{a_2t}{a_n+a_1}\right)\geqslant(1+t)^{n/2}.$$

Интересно установить, при каких n и t оно выполнено для упорядоченных наборов $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_n$ и при каких n и t для произвольных наборов a_1, a_2, $\dots$, a_n. Отметим, что при $t = 1$ это неравенство (13) с $\lambda = \sqrt{2}$, а коэффициент при t — неравенство Шапиро.

§6. Заключение

Все неравенства, о которых шла речь, являются циклическими, т. е. они не изменяются при циклической перестановке переменных. Такие неравенства обычно являются достаточно простыми, если каждое слагаемое или множитель зависит лишь от одной переменной. Остальные циклические неравенства в большинстве случаев оказываются чрезвычайно сложными. Довольно мощные методы их доказательства дает теория мажоризации и, в частности, неравенство Караматы, но часто и этих методов оказывается недостаточно. Некоторые другие способы доказательства циклических неравенств можно найти в очень редкой книге югославских математиков Митриновича и Печарича [14].

Список литературы

[1] Беккенбах Э., Беллман Р. *Неравенства.* М.: Мир, 1965.

[2] Дринфельд В. Г. *Об одном циклическом неравенстве* // Мат. заметки, 1971. Т. 9. №2. С. 113–119.

[3] Курляндчик Л., Файбусович А. *История одного неравенства* // Квант, 1991. №4. С. 14–18.

[4] Маршалл А., Олкин И. *Неравенства: теория мажоризации и ее приложения.* М.: Мир, 1983.

[5] Прасолов В. В. *Задачи по планиметрии. Часть 1.* М.: Наука, 1991.

[6] Прасолов В. В. *Многочлены.* М.: МЦНМО, 2000.

[7] Харди Г. П., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г. *Неравенства.* М.: ИЛ, 1948.

[8] Храбров А. И. *Обращение классических неравенств* // Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике, 2000 год. Изд-во СПбГУ, 2000. С. 96–106.

[9] Clausing A. *A review of Shapiro's cyclic inequality* // General inequalities. Vol. 6. (Oberwolfach, 1990). P. 17–31, Internat. Ser. Numer. Math. Vol. 103. Birkhäuser, Basel, 1992.

[10] Fink A. M. *Shapiro's inequality* // Recent progress in inequalities (Niš, 1996). Math. Appl., 430. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998. P. 241–248.

[11] Fuchs L. *A new proof of an inequality of Hardy–Littlewood–Pólya* // Mat. Tidsskr. B., 1947. P. 53–54.

[12] Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G. *Some simple inequalities satisfied by convex function* // Messenger Math., 1928/29. Vol. 58. P. 145–152.

[13] Karamata J. *Sur une inégalité relative aux fonctions convexes* // Publ. Math. Univ. Belgrade, 1932. V. 1. P. 145–148.

[14] Mitrinović D. S., Pečarić J. E. *Ciklične nejednakosti i ciklične funkcionalne jednačine* // Matematički Problemi i Ekspozicije, 19. Naučna Knjiga, Belgrade, 1991.

[15] Schur I. *Über eine Klasse von Mittelbildungen mit Anwendungen die Determinanten* // Theorie Sitzungsber, Berlin, Math. Gesellschaft, 1923. Bd. 22, S. 9–20.

[16] Schweitzer P. *Egy egyenlőtlenség az arithmetikai középértékrol* // Math. és. Phys. Lapok, 1914. Vol. 23. P. 257–261.

[17] Shapiro H. Amer. Math. Monthly, 1954, Vol. 61, P. 571–572, Problem 4603.

[18] Szegö G. *Über eine Verallgemeinerung des Dirichlestschen Integrals* // Math. Z., 1950. Bd. 52. S. 676–685.