

## Конкурс задач по линейной алгебре

Большая часть этих задач предлагалась Э. Б. Винбергом студентам НМУ весной 1993 года.

Победители конкурса будут награждены математической литературой (в том числе и с дарственными надписями авторов). При определении победителей будут учитываться в первую очередь наиболее простые и красивые решения. Срок представления решений — 1 мая 2003 г. Участниками конкурса могут быть школьники и студенты первого курса.

Работы следует присылать по адресу 121002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, к. 202 (с пометкой «На конкурс „Математического просвещения“»).

Условия задач конкурса можно также найти в Интернете по адресу [www.mcsme.ru/free-books/matpros.html](http://www.mcsme.ru/free-books/matpros.html)

### УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Доказать, что всякий пятигранный выпуклый конус в трехмерном евклидовом пространстве можно линейным преобразованием привести к такому виду, чтобы каждое ребро было перпендикулярно противоположной грани.

2. Указать конечное число троек подпространств пространства  $K^n$ , обладающее тем свойством, что для любого  $n$ -мерного пространства  $V$  над полем  $K$  и любой его тройки подпространств  $V_1, V_2, V_3$  найдется изоморфизм  $V \rightarrow K^n$ , отображающий  $V_1, V_2, V_3$  на подпространства одной из указанных троек.

3. Доказать, что не существует более чем  $\lceil n^2/4 \rceil + 1$  линейно независимых матриц порядка  $n$ , перестановочных между собой.

4. Функция  $f(x, y)$  двух действительных переменных является многочленом от  $x$  при любом фиксированном  $y$  и многочленом от  $y$  при любом фиксированном  $x$ . Доказать, что  $f$  — многочлен от двух переменных.

5. Пусть  $\mathbf{A}$  — такой линейный оператор в эрмитовом пространстве, что матричные элементы оператора  $(\exp t\mathbf{A}^*)(\exp t\mathbf{A})$  суть многочлены от  $t$ . Доказать, что пространство  $V$  может быть разложено в ортогональную сумму  $\mathbf{A}$ -инвариантных подпространств таким образом, что

ограничение оператора  $A$  на каждое из этих подпространств есть сумма нильпотентного оператора и оператора умножения на чисто мнимое число.

6. Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — движения  $n$ -мерного евклидова пространства, удовлетворяющие условиям  $\alpha^3\beta^3 = (\alpha\beta)^2 = id$ . Доказать, что  $\alpha$  и  $\beta$  имеют общую неподвижную точку или общую инвариантную прямую.

7. Назовем тройку  $(A, B, C)$  квадратных матриц 3-го порядка абсолютно вырожденной, если любая их линейная комбинация вырожденна. Доказать, что с помощью преобразования вида

$$(A, B, C) \mapsto (UAV, UBV, UCV),$$

где  $U$  и  $V$  — невырожденные матрицы, любую абсолютно вырожденную тройку можно привести к виду, удовлетворяющему одному из трех условий:

- 1) первый столбец всех трех матриц нулевой;
- 2) левый нижний угол размера  $2 \times 2$  всех трех матриц нулевой;
- 3) последняя строка всех трех матриц нулевая;
- 4) все три матрицы кососимметрические.