Студенческий конкурс решения задач в Санкт-Петербурге 2001–2002 гг.*

О правилах конкурса

Домашний конкурс решения задач проводится для студентов Санкт-Петербургского университета. Подобные конкурсы проводились неоднократно в прошлом. (Например, о конкурсе 1987–1988 гг. можно прочитать в А. М. Вершик, А. А. Лодкин. Студенческий математический конкурс в Ленинградском государственном университете // Математика сегодня. Киев: Выща школа, 1990, с. 126–142.) Среди их участников есть как недавние, так и очень давние выпускники мат-меха. Идея конкурса (в отличие от олимпиад) в решении задач, в основном, исследовательского характера, которые не решаются одним приемом, а требуют серьезных и неспешных раздумий. Конкурс проводится под эгидой Санкт-Петербургского математического общества. Общество образует жюри и выделяет денежные призы для награждения победителей.

В конкурсе могут принимать участие студенты всех курсов. Итоги среди первокурсников подводятся отдельно. Допускаются коллективные (не более трех человек) работы.

На конкурс предлагаются задачи различной трудности, от сравнительно несложных до нерешенных проблем. Участники могут выбрать задачи по вкусу и подавать решения *любого набора* задач, *даже одной.* Принимаются решения частей задач, состоящих из нескольких пунктов.

Итогам конкурса и обсуждению решений посвящается специальное заседание на факультете. Наиболее интересные решения могут быть опубликованы.

Победителями конкурса 2001–2002 года стали Петров Федор (3 курс) и Сопкина Екатерина (4 курс). (Курс указан на момент участия в конкурсе.)

Ниже приводятся условия задач конкурса 2001–2002 гг. В скобках указаны фамилии тех, кто предложил задачу.

*Проведение конкурса поддержано грантом ФЦП «Интеграция» №Б0029

Условия задач

Задача 1. *Периодическое рациональное отображение.*

Рациональное отображение плоскости в себя, заданное формулой $f(x,y) = (1/y, x(1+y))$, имеет период 5, т. е. его пятая итерация тождественна. Существует ли (нетождественное) рациональное отображение плоскости с целыми коэффициентами, имеющее период 7?

(М. З. Шапиро – С. В. Дужин)

Задача 2. *Корни комплексного многочлена и его производной.*

Пусть P — многочлен с комплексными коэффициентами степени n и $A = (a_1, \ldots, a_n)^\intercal$ — вектор-столбец, состоящий из его корней (в произвольном порядке). Построим новый вектор $B = (b_1, \ldots, b_{n-1}, \beta)^\intercal$, где $b_1, \ldots, b_{n-1}$ — корни производной P', а $\beta = \sum a_i/n = \sum b_j/(n-1)$. Известно, что для любого многочлена корни производной лежат в выпуклой оболочке корней самого многочлена. Поэтому существует такая стохастическая матрица M (т. е. матрица из вещественных неотрицательных чисел с суммами по строкам, равными 1), что ее последняя строка есть $(1/n, 1/n, \ldots, 1/n)$ и $B = MA$. Докажите, что матрицу M можно выбрать дважды-стохастической, т. е. с суммами по столбцам, также равными 1:

(а) для $n = 3$;

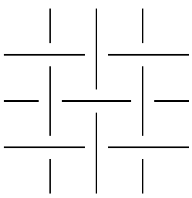
(б) для $n = 4$;

(в) для произвольного n.

(Б. З. Шапиро)

Задача 3. *Плоская проекция набора скрещивающихся прямых.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Дана матрица P размера $m \times n$, состоящая из нулей и единиц. Найти необходимые и/или достаточные условия, при которых существует набор прямых $a_1, \ldots, a_m$, $b_1, \ldots, b_n$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, проекции которых на плоскость xy суть соответственно прямые $x = 1, \ldots, x = m$, $y = 1, \ldots, y = n$, причем над точкой (i, j) прямая a_i выше прямой b_j, если $P_{ij} = 1$, и ниже, если $P_{ij} = 0$.

На рисунке приведены матрица и геометрическая иллюстрация для нее.

(А. Б. Скопенков)

Задача 4. *Разложимые косые функции.*

Функция трех переменных $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ называется *кососимметрической*, если она удовлетворяет тождеству $F(x,y,z) = -F(y,x,z) = -F(x,z,y)$. Оператор альтернирования

$$\begin{aligned} &\mathrm{Alt}(F)(x,y,z) = \\ &= F(x,y,z) + F(y,z,x) + F(z,x,y) - F(y,x,z) - F(z,y,x) - F(x,z,y) \end{aligned}$$

превращает любую функцию в кососимметрическую.

Кососимметрическая функция называется *вполне разложимой*, если она получается альтернированием функции вида $f(x)g(y)h(z)$ для некоторых функций одной переменной f, g, h.

Кососимметрическая функция называется *частично разложимой*, если она получается альтернированием функции вида $f(x, y)g(z)$ для некоторой функции двух переменных f и некоторой функции одной переменной g.

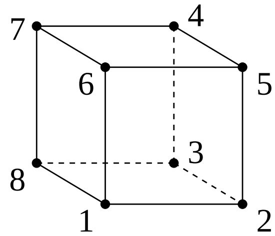
(а) Докажите, что аналитическая функция F вполне разложима тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождеству

$$F(x_1, x_2, x_5)F(x_3, x_4, x_5) - F(x_1, x_3, x_5)F(x_2, x_4, x_5) + \\ + F(x_1, x_4, x_5)F(x_2, x_3, x_5) = 0.$$

(б) Приведите пример неаналитической функции, которая удовлетворяет этому тождеству, но не является вполне разложимой.

(в) Сформулируйте и докажите аналогичный критерий *частичной* разложимости кососимметрических функций. (*С. В. Дужин*)

Задача 5. *Вполне унимодальные псевдобулевы функции.*



Псевдобулева функция (ПБФ) n переменных — это нумерация вершин n-мерного куба, т. е. взаимно однозначное отображение $\{0, 1\}^n \to \{1, 2, \ldots, 2^n\}$. Назовем ПБФ *вполне унимодальной*, если она имеет единственный локальный минимум на каждой двумерной грани куба. (Например, функция, принимающая в последовательных вершинах квадрата значения 1234, этим свойством обладает, а функция 1324 — нет: для нее 1 и 2 являются двумя локальными минимумами). На рисунке приведен пример вполне унимодальной ПБФ размерности 3.

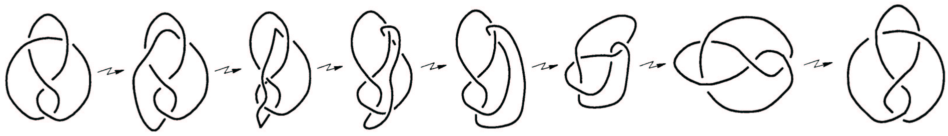
(а) Найдите число вполне унимодальных псевдобулевых функций b_n для малых значений размерности (скажем, $n = 3, 4, 5$).

(б) Найдите асимптотику (или какие-то — верхние/нижние — асимптотические оценки) для числа b_n при $n \to \infty$.

В обоих случаях разрешается вести подсчет с учетом или без учета симметрии куба; если симметрии учитываются, то используемую группу следует явно описать. (*С. Г. Воробьев*)

Задача 6. *Петля в пространстве узлов.*

На рисунке показана непрерывная деформация узла «восьмерка» K в его зеркальное отражение K', т. е. непрерывное отображение $f\colon [0, 1] \times S^1 \to \mathbb{R}^3$, которое при крайних значениях первого аргумента (0 и 1) дает соответственно узлы K и K'.



Взяв зеркальные образы всех узлов, участвующих в этой деформации, мы получим отображение $\bar{f}\colon [0,1]\times S^1 \to \mathbb{R}^3$, осуществляющее деформацию K' в K. Объединение f и f' дает замкнутый путь в пространстве узлов $g : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^3$. Верно ли, что этот путь можно стянуть в точку: существует ли непрерывное отображение $G\colon D^2\times S^1 \to \mathbb{R}^3$, ограничение которого на границу S^1 диска D^2 совпадает с g?

(*В. А. Васильев*)

Задача 7. *Многочлены над конечными полями.*

(а) Разложите на множители над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p — нечетное простое) многочлен $\sum\limits_{k=0}^{(p-1)/2}\binom{2k}{k}x^k$.

(б) Пусть p — простое, $p\equiv 1 \pmod 6$. Докажите, что многочлен

$$G(x) = \sum_{k=0}^{(p-1)/3}\frac{(3k)!}{(k!)^3}x^k$$

не имеет корней в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(в) Верно ли, что $G(x)$ раскладывается на квадратичные множители над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

(*М. В. Всемирнов*)

Задача 8. *Отношение гамма-функций.*

Рассмотрим функцию

$$I(p) = \frac{\Gamma(2-p)\Gamma(3p)}{(p\Gamma(p))^2}, \qquad 0<p<1\,.$$

(а) Докажите, что $I(p)$ — выпуклая функция.

(б) Верно ли, что минимум $I(p)$ достигается при $p=1/2$?

(*Я. Ю. Никитин*)

Задача 9. *Примитивные матрицы.*

Напомним, что $GL(2,\mathbb{Z})$ — группа матриц второго порядка с целыми элементами и определителем ±1. Матрица $M\in GL(2,\mathbb{Z})$ называется *примитивной*, если не существует $n\geqslant 2$ и матрицы $K\in GL(2,\mathbb{Z})$ таких, что $M=K^n$.

(а) Проверьте, будут ли следующие матрицы примитивными:

$$\begin{pmatrix}5&3\\2&1\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}33&10\\10&3\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}27&5\\11&2\end{pmatrix}.$$

(б) Найдите какие-либо достаточные и/или необходимые условия примитивности.

(*Н. А. Сидоров*)

Задача 10. *Минимизация функционала.*
Для каждого $b \geqslant 1$ через C_b обозначим множество всех функций $f \in C[0,1]$, для которых $1 \leqslant f(x) \leqslant b$ при всех x из $[0,1]$. Пусть

$$G(b) = \inf_{f \in C_b} \int_0^1 \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{f(x)}\,dx.$$

(а) Для каждого $b \geqslant 1$ найдите оценки сверху и/или снизу для $G(b)$.

(б) Найдите точное значение $G(b)$.

(*Фамилия предложившего не сохранилась*)